MATHEMATISCHE ANNALEN.

29351

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXIV. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884.

Gou
Hal

Han

Höl
Kön

Küp

Lie
Mar

Net

Pic

Rol

Seg

Sin

Sta

Sto
Vo

Inhalt des vierundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Uebe
Ordn

herrü
werd
zwisc
erhal

ment
nung
welc
der
nütz
auf
1 m
2 c,
und
talp
nutz
nun
sollt

von
im
scha
Sätz
gef
(188
ang

Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3, und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage.

Von

Karl Küpper in Prag.*)

Wir stellen zwei Theoreme auf, aus welchen die von Steiner herrührenden Sätze nebst verschiedenen neuen Folgerungen abgeleitet werden sollen. Dieselben beziehen sich auf die Relation der Lage zwischen Punkten, die auf einer C^3 nach einer gewissen Vorschrift erhalten wurden:

Angenommen werden auf C^3 eine unendliche Menge fester Fundamentalpunkte, die in einer hinfort unverändert beizubehaltenden Ordnung $a, b, c, d \ldots$ heissen. Nun ziehe man durch a eine Gerade, welche die C^3 in 0, 1 schneidet; wobei es gleichgültig ist, welchen der beiden Schnittpunkte man mit 0 bezeichnet, aber es ist nicht unnütz von vornherein anzumerken, dass dieser Nullpunkt keinen Einfluss auf die Lage der noch abzuleitenden Punkte übt. Dann verbinde man 1 mit b, gebe dem Schnittpunkte von C^3 und $b1$ die Nummer 2, ziehe $2c$, bezeichne mit 3 den auf diese Gerade fallenden Punkt von C^3, und in dieser Weise fahre man fort, die unendlich vielen Fundamentalpunkte, die sich übrigens periodisch wiederholen können, zu benutzen, stelle sich dabei vor, dass die ganze Zahlenreihe zur Bezeichnung der auftretenden Punkte, auch wenn diese nicht immer neue sein sollten, verwendet werde.

*) Die Untersuchung von Hrn. Küpper, welche wir im Texte bringen, ist, von dem Nachtrage abgesehen, den der Hr. Verf. jetzt hinzugefügt hat, bereits im Jahre 1873 in den Abhandl. der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (VI. Folge, 6. Bd.) erschienen und hiernach die erste, in welcher die Sätze über Steiner'sche Polygone auf C^3 eine rein geometrische Behandlung gefunden haben. Man vergl. hierzu Schur in diesen Annalen Bd. XVIII, p. 10 (1880), Bd. XX, p. 262—266 (1882), sowie Schoute im Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 95, p. 105ff., 201 (1883). *D. Red.*

Sind ν, $\nu + \delta$ irgend zwei Punkte der Reihe, so heisst die Zahl $+ \delta$ der Abstand des letzteren Punktes vom ersten, während $- \delta$ der Abstand des Punktes $\nu - \delta$ von ν ist.

Wird dagegen bloss vom Abstand zweier Punkte gesprochen, so sei darunter der Abstand des ungerade nummerirten (*unpaaren*) Punktes von dem gerade nummerirten, *paaren* Punkte verstanden, so dass der Abstand von 1, 4 durch -3, der von 2, 5 durch $+3$ ausgedrückt wird. Die Grundeigenschaft der Reihe spricht der Satz aus:

1.

Lehrsatz. *Die Gerade, welche einen bestimmten Punkt ν irgend einer Reihe mit dem um eine ungerade Zahl $+ \delta$ von ihm entfernten Punkte derselben Reihe verbindet, d. h. die Gerade $(\nu,\ \nu + \delta)$ trifft die C^3 in einem festen Punkte, dessen Lage nämlich von der Annahme der Geraden $a01$, und der Wahl des Nullpunktes, also von der besondern Reihe, in welcher man sich gerade befindet, unabhängig ist.*

Beweis. Der Satz gelte für $(\nu - 1,\ \nu - 1 + \delta)$; dann behaupte ich, er gilt für $(\nu, \nu + \delta)$. Dem Bildungsgesetz gemäss trifft $(\nu - 1, \nu)$ die C^3 in einem der Fundamentalpunkte, etwa m; $(\nu + \delta,\ \nu - 1 + \delta)$ trifft sie in einem anderen Fundamentalpunkte q. mq schneide die C^3 in x, einem ebenfalls unveränderlichen Punkte. Da nun nach der Annahme $(\nu - 1,\ \nu - 1 + \delta)$ die C^3 stets im nämlichen Punkte y trifft, so müssen die Geraden xy, $(\nu,\ \nu + \delta)$ sich auf C^3 schneiden, d. h. die letztere Gerade muss durch den unveränderlichen Punkt gehen, in welchem xy der C^3 begegnet.

Damit hiernach der Satz folge, zeige ich, dass er für $(0, \delta)$ richtig ist.

Wäre der Beweis für $(0, \delta - 2)$ erbracht, so würde nach dem eben Gesagten er es auch für $(1, \delta - 1)$ sein; dann würde man haben:

$(0, 1)$ geht durch a, $(\delta, \delta - 1)$ durch den Fundamentalpunkt n, $(1, \delta - 1)$ schneidet C^3 in dem festen Punkte $\mathfrak{y}$, an in dem ebenfalls festen Punkte $\mathfrak{x}$; mithin müssen sich $(0, \delta)$, und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ auf C^3 treffen, d. h. $(0, \delta)$ schneidet C^3 in einem festen Punkte.

Weil aber der Satz richtig ist für $(0, 1)$ so folgt er für $(0, 3)$, $(0, 5) \ldots (0, \delta)$; dann folglich allgemein.

Es seien nur zwei von einander verschiedene Fundamentalpunkte a, b vorhanden, welche abwechselnd der obigen Vorschrift gemäss benutzt werden sollen, so, als wenn c mit a, d mit b, e wieder mit a, u. s. f. zusammenfiele. Die Punktreihe $0, 1, 2, 3 \ldots$ gewinnt dann eine neue Eigenschaft:

2.

Lehrsatz. *Die Geraden, welche zwei Punkte verbinden, deren Abstand eine constante ungerade Zahl δ ist, schneiden sich in einem*

festen Punkte der C^3, dessen Lage auch vom Nullpunkte, also von der Reihe, in der man sich befindet, unabhängig ist.

Beweis. ν sei die kleinere der beiden die Punkte bezeichnenden Zahlen.

1) ν sei gerade; der mit ihm zu verbindende Punkt ist $\nu + \delta$, und es genügt zu zeigen, dass die Geraden $(\nu + 2, \nu + 2 + \delta)$, $(\nu, \nu + \delta)$ sich auf C^3 treffen.

Dem Bildungsgesetz entsprechend liegen in einer Geraden:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & a, & \nu + \delta + 1, & \nu + \delta + 2 \\ \text{II.} & b, & \nu + 1, & \nu + 2. \end{array}$$

Verbindet man a mit $\nu + 1$, b mit $\nu + \delta + 1$, $\nu + 2$ mit $\nu + \delta + 2$, so fallen die drei Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit C^3 in eine Gerade. Sie sind aber der Reihe nach ν, $\nu + \delta$, f, womit der Schnittpunkt von C^3 und $(\nu + 2, \nu + \delta + 2)$ bezeichnet werden möge.

2) ν sei ungerade, mit anderen Worten der constante Abstand sei negativ; $= - \delta$. Der mit ν zu verbindende Punkt heisst auch $\nu + \delta$. Der Beweis bleibt unverändert; nur dass in Folge des Bildungsgesetzes die drei Punkte b, $\nu + \delta + 1$, $\nu + \delta + 2$ beziehlich mit $\nu + 1$, a, $\nu + 2$ zu verbinden sind. Die drei in eine Gerade fallenden Schnittpunkte mit C^3 sind entsprechend ν, $\nu + \delta$, f':

Die beiden für $\pm \delta$ sich ergebenden festen Punkte f, f' haben eine bemerkenswerthe Lage: Weil f' auf jeder Geraden liegt, die eine unpaare Ecke mit einer von ihr im Abstande δ befindlichen verbindet, so ist f' der Schnittpunkt von $(\nu + 1, \nu + 1 + \delta)$, wenn hier ν gerade vorausgesetzt wird, wie beim 1. Theil unseres Beweises. Das dort aufgestellte Schema I., II. lehrt, dass die Schnittpunkte der C^3 mit den 3 Geraden ab, $(\nu + 1, \nu + \delta + 1)$, $(\nu + 2, \nu + \delta + 2)$, d. h. die Punkte c, f', f in einer Geraden liegen. Also:

Die Punkte f, welche als Schnittpunkte der C^3 mit den Verbindungslinien von je einem paaren und unpaaren Punkte in allen denkbaren Reihen auftreten, liegen zu je zwei auf den Strahlen des Büschels (c).

Obwohl die Reihe 0, 1, 2, ... in infinitum fortzusetzen ist, so kann es sich doch ereignen, dass die durch die Zahlen repräsentirten Punkte periodisch wiederkehren, und zwar kommt dies stets vor, wenn einmal ein paar numerirter Punkt ν mit einem schon erhaltenen ebenfalls paaren Punkte μ zusammenfällt, oder wenn ein Zusammenfallen zweier unpaaren Punkte stattfindet. Mit Rücksicht auf die Vorschrift ergiebt sich sofort, dass die Coincidenz von μ ν auch die von $\mu + 1$, $\nu + 1$ u. s. w. zur Folge, aber auch die von $\mu - 1$, $\nu - 1$; $\mu - 2$, $\nu - 2$; etc. zur Voraussetzung hat, dass mithin die Periodicität sich nothwendigerweise auf sämmtliche Glieder der Reihe von 0 an erstreckt.

Coincidirt $2n$ mit 0, so bekommt der Punkt 1 auch die Nummer $2n+1$, 2 die Nummer $2n+2$ u. s. f., und *die $2n$ erschienenen Punkte bilden die Ecken eines Steiner'schen $2n$-Ecks.*

a) Aus unserem ersten Theorem folgt alsdann, *dass wo immer man auf C^3 den Nullpunkt wählen mag, er als $2n^{ter}$ Punkt der Reihe wiederkehren wird.* Jede Ecke des Steiner'schen Polygons ist durch unendlich viele Zahlen bezeichnet, nämlich durch irgend eine Zahl $\lambda < 2n$, und sodann durch jede mit λ für den Modulus $2n$ congruente Zahl.

b) Das 2te Theorem lehrt, *dass die Verbindungslinie zweier Ecken eines Steiner'schen $2n$-Ecks, deren Abstand eine bestimmte ungerade Zahl δ ist, durch einen festen Punkt der C^3 geht, ferner dass, wenn man hierbei dem δ alle möglichen positiven und negativen Werthe beilegt, auf C^3 n feste, für alle Steiner'sche Polygone mit den Fundamentalpunkten a, b unveränderliche Punkte hervortreten.* (Siehe 6 *a*).

Nimmt man zunächst δ positiv, so finden sich schon diese n festen Punkte; denn die Geraden $(0, \delta)$, wo δ irgend eine ungerade Zahl $< 2n$ bedeutet, treffen die C^3 in denselben. Wird dagegen ein negatives δ vorausgesetzt, was bedingt, dass von den verbundenen Ecken die paare eine grössere Zahl trägt, als die unpaare, so schneidet die Gerade $(\nu, \nu-\delta)$ die C^3 im selben Punkte wie die Gerade $(2n, 2n-\delta)$, woraus wegen der Coincidenz von $2n$ und 0 erhellt, dass hier bei variablem δ dieselben Punkte wie vorhin resultiren.

3.

Die Sätze von Steiner.

Hilfssatz. Projicirt man vier Punkte einer C^3, von deren Verbindungslinien ein Paar sich auf der Curve schneidet, aus irgend einem Punkte p der C^3 wieder auf die Curve, so erhält man vier Punkte, denen die gleiche Eigenschaft zukommt.

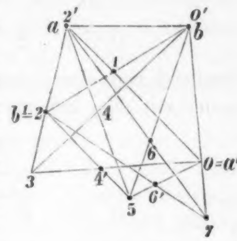
Beweis. Sind 1, 2, 3, 4 die gegebenen Punkte, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ ihre Projectionen, liegt der Schnittpunkt d von $1\,2$, $3\,4$ auf C^3; so projicire man aus dem Tangentialpunkte π von p den Punkt d nach d' auf C^3. Dann ist klar, dass $1'$, $2'$, d' ebenso $3'$, $4'$, d' auf je eine Gerade fallen.

Lehrsatz. Sind a, b zwei Fundamentalpunkte für ein Steiner'sches $2n$-Eck, und man projicirt sie aus irgend einem Punkte π der C^3 nach a', b' auf die Curve, so hat man in $a'\,b'$ wieder zwei Fundamentalpunkte eines $2n$-Ecks.

Erster Beweis. Man ziehe von π aus eine Tangente an C^3, p sei ihr Berührungspunkt. Für die Fundamentalpunkte a, b bilde man ein $2n$-Eck $0, 1, 2, 3, \ldots$ projicire dessen Ecken aus p nach $0', 1', 2', 3', \ldots$ auf die C^3, dagegen a, b aus π wie der Satz verlangt, dann ergiebt

unser Hilfssatz sofort, dass $0', 1', 2', 3', \ldots$ ein zu den Fundamentalpunkten a', b' gehöriges $2n$-Eck ist.

Zweiter Beweis. Das eben angewandte Polygon $0', 1', 2', \ldots$ hat lauter imaginäre Ecken und Seiten, wenn von π aus eine reelle Tangente an C^3 nicht existirt; deshalb geben wir einen, wie wir glauben, der Natur des Gegenstandes möglichst sich anschliessenden Beweis.



Denken wir uns von den unendlich vielen $2n$-Ecken welche mit Hilfe von a, b erhalten werden können, dasjenige $0\ 1\ 2\ 3 \ldots$ in welchem a' der Nullpunkt ist und ausserdem π die Ecke 1 wird. Ich werde dann ein $2n$-Eck nachweisen, das mittels der Fundamentalpunkte b', a' abgeleitet wird, und mit dem vorliegenden einen Theil seiner Ecken gemein hat. Unsere Figur betrifft ein Achteck, wir wollen uns jedoch von einer Figur unabhängig machen, indem das Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccc} & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & & 12 & & 13 & & 0=14 \end{array}$$

bedeuten soll: (0, 1) geht durch a, (1, 2) durch b, (2, 3) durch a und endlich (13, 0) geht durch b, daher dasselbe ein 14-Eck vorstellt. Bezeichnen wir jetzt a mit $2'$, b mit $0'$, beachten ferner, dass 1) (0, 3), (2, 5) sich in einem Punkte der C^3 schneiden müssen, der $4'$ heissen möge,

dass ebenso: 2)	(0, 5), (2, 7)	sich in	$6'$	auf C^3	treffen,
3)	(0, 7), (2, 9)	„ „	$8'$	„ „	„
4)	(0, 9), (2, 11)	„ „	$10'$	„ „	„
5)	(0, 11), (2, 13)	„ „	$12'$	„ „	„

so haben wir das Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccc} & b' & & a' & & b' & & a' & & b' & & a' & & b' & & a' & & b' & & a' & & b' & & a' & & b' & & a' & \\ 0' & & 1 & & 2' & & 3 & & 4' & & 5 & & 6' & & 7 & & 8' & & 9 & & 10' & & 11 & & 12' & & 13 & & 0' \end{array}$$

Denn vermöge 1) geht $(3, 4')$ durch 0 oder a', $(4', 5)$ durch 2 oder b'
„ 2) „ $(5, 6')$ „ „ „ „, $(6', 7)$ „ „ „ „
„ 3) „ $(7, 8')$ „ „ „ „, $(8', 9)$ „ „ „ „
u. s. w.

Lehrsatz. Sind a, b Fundamentalpunkte eines $2n$-Eckes, und man zieht aus dem Schnittpunkte c von ab mit C^3 eine Tangente an C^3,

so giebt der Berührungspunkt t mit a oder b zusammengenommen ein Paar Fundamentalpunkte für ein $4n$-Eck.

Beweis. Gegeben das Schema

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 0 \end{array}$$

Projicirt man das Polygon (10-Eck) aus t auf die C^3, so entsteht ein neues mit dem Schema:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & & b & & a & \\ 0' & & 1' & & 2' & & 3' & & 4' & & 5' & & 6' & & 7' & & 8' & & 9' & & 0 \end{array}$$

; denn

$a01$ ist eine Gerade, ctt ebenfalls, ca trifft C^3 in b, somit $b0'1'$ gerade, und

$b12$ ist eine Gerade, „ „ , cb „ „ „ a, „ $a1'2'$ „ .

Bildet man jetzt folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} t & b & t & b & t & b & t & b & t & b & t & b & t & b & t & b & t & b & t & b \\ 0 & 0' & 1' & 1 & 2 & 2' & 3' & 3 & 4 & 4' & 5' & 5 & 6 & 6' & 7' & 7 & 8 & 8' & 9' & 9 & 0, \end{array}$$

so hat man für die Fundamentalpunkte t, b ein $4n(20)$-Eck.

Diesen Sätzen kann man anschliessen:

a) Projicirt man die Ecken eines Steiner'schen Polygons aus einem beliebigen Punkte p der C^3 auf die Curve, so erhält man ein neues, dessen Fundamentalpunkte mit denen des gegebenen und dem Tangentialpunkte π von p in einer Geraden liegen.

Beweis. Die Fundamentalpunkte für 0, 1, 2, 3, ... seien a, b, sie mögen aus π nach a', b' projicirt sein, während $0', 1', 2', 3', \ldots$ das mittels des Projectionscentrums p erhaltene Polygon ist. Weil a, 0, 1 in einer Geraden liegen, so gilt (Hilfsatz) Gleiches für a', $0'$, $1'$; wegen b, 1, 2 in einer Geraden, folgt dasselbe für b', $1'$, $2'$ u. s. f.

b) Die Tangentialpunkte der Ecken eines Steiner'schen $2n$-Eckes sind die Ecken eines solchen Polygons, das zu Fundamentalpunkten die Tangentialpunkte des ursprünglichen hat.

Denn wenn a, 0, 1 in einer Geraden liegen, so gilt das Nämliche für ihre Tangentialpunkte. *Hierbei ist wohl zu beachten, dass das derivirte Polygon kein einfaches $2n$-Eck sein muss, sondern aus mehreren sich deckenden Polygonen bestehen kann. Siehe 8.*)

c) *Vertauschung der Fundamentalpunkte a, b.*

Würde das Polygon $0\,1\,2\,3 \ldots 2n-1$ durch Befolgung der gegebenen Vorschrift gebildet, so genügt es dem Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & a & & b & & a & & b & \quad & a & & b & \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \ldots 2n-2 & & 2n-1 & & 0=2n. \end{array}$$

Lesen wir dies Schema von rechts nach links, so wird das ursprüngliche Polygon in einem dem ursprünglichen entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Es kommt dies offenbar auf das Nämliche heraus, als wenn wir mit Beibehaltung des Nullpunktes die Fundamentalpunkte a, b ihre Rollen wechseln lassen.

d) *Verlegung des Nullpunktes in eine Polygonecke.*

Wenn man irgend eine Ecke des $2n$-Eckes $0\,1\,2\ldots$ zum Nullpunkte wählt, so resultirt selbstverständlich das nämliche Polygon, doch tragen seine Ecken andere Zahlen; Gesetzt, die paare Ecke μ würde mit 0 bezeichnet, dann erhält $\mu+1$ die Nummer 1, $\mu+2$ die Nummer 2, etc., $2n$ oder der frühere Nullpunkt erhält die Nummer $2n-\mu \equiv -\mu$; also steht statt 1 jetzt: $2n-\mu+1 \equiv 1-\mu$ u. s. f., endlich statt $\mu : 2n \equiv 0$.

Es ergiebt sich demnach, dass die ursprünglichen Nummern um μ Einheiten zu verringern sind, und wenn hierbei negative Zahlen herauskommen, diese durch Addition von $2n$ positiv gemacht werden müssen.

Nehmen wir an, der Nullpunkt würde in eine unpaare Ecke λ verlegt; dann bekommt $\lambda-1$ die Nummer 1, $\lambda-2$ erhält 2, etc., und der frühere Nullpunkt wird jetzt λ heissen. Die neuen Nummern $\lambda+1$, $\lambda+2, \ldots$ stehen bei $2n-1$, $2n-2, \ldots$ etc. Hier sind die ursprünglichen Nummern von λ zu subtrahiren, wenn sich dabei negative Zahlen ergeben, so müssen diese durch Addition von $2n$ positiv gemacht werden. Z. B. $2n-z$ sei eine der früheren Nummern und $>\lambda$; die zugehörige neue Nummer ist dem Gesagten nach $\lambda+z$; wäre dagegen $2n-z<\lambda$, also eine der Zahlen von 1 bis λ, so ist die neue Nummer $\lambda-(2n-z)$. Verlegen wir beispielsweise den Nullpunkt in die Ecke 1, so wird der frühere Nullpunkt jetzt 1 heissen, die früher mit $2n-1$, $2n-2$, $2n-3, \ldots$ bezeichneten Ecken tragen jetzt die Nummern $2, 3, 4, \ldots$ und das Polygon wird von 1 aus in demselben Sinne durchlaufen, wie bei der Vertauschung von a, b mit einander.

e) *Zusammenfallen der paaren und unpaaren Ecken.*

Wenn eine paare Ecke μ auf eine unpaare λ fällt, so müssen alle paaren mit allen unpaaren zusammenfallen.

Nehmen wir an, die Zahlen μ, λ seien um 1 unterschieden, dann werden die Ecken λ, μ entweder auf einem Strahle (a) oder von (b) liegen, je nachdem $\lambda \gtrless \mu$; sei ersteres der Fall. Wir verlegen den

Nullpunkt nach μ, λ wird 1, und da 0, 1 coincidiren, so wird $a0$ eine Tangente in 0 an C^3 sein. Da $1b$ die C^3 in 2, $0b$ die C^3 in $2n - 1$ schneidet, so findet ein Zusammenfallen statt für:

$$2 \text{ u. } 2n - 1, \quad 3 \text{ u. } 2n - 2 \ldots, \quad n \text{ u. } n + 1,$$

d. h. auf jede Ecke fällt noch eine, so dass nur n verschiedene Ecken sich darbieten. Man muss beachten, *dass, wenn n ungerade, $n + 1$ also gerade ist, die Tangente der C^3 in n durch b geht; wenn hingegen n gerade ist, so geht diese Tangente durch a.*

Wenn die Differenz $\lambda - \mu > 1$, so lässt sich dieser Fall auf den behandelten zurückführen: Man verbinde λ mit a (wäre $\lambda < \mu$, so müsste man λb ziehen); λa trifft die C^3 in einer, sowohl mit $\lambda - 1$, als mit $\mu + 1$ zu bezeichnenden Ecke, in welcher sich also eine paare und unpaare decken, jene ist $\lambda - 1$, diese $\mu + 1$, weiter deckt sich $\lambda - 2$ auf $(b, \lambda - 1)$ liegend mit $\mu + 2$ auf derselben Geraden u. s. f. Nothwendig findet man im Verlauf zwei sich deckende Ecken, deren Nummern um 1 verschieden sind. Wenn dann die unpaare Ecke die grösste Zahl trägt, etwa λ', so geht die Tangente von C^3 für den Punkt λ' durch a, anderenfalls geht sie durch b. Verlegen wir dann den Nullpunkt nach λ', so coincidirt 1 mit ihm, und wir kommen in frühere Betrachtung hinein.

Zu den Fundamentalpunkten a, b gehören, wie man bald erkennt, im Allgemeinen vier $2n$-Ecke, für welche die paaren Ecken mit den unpaaren zusammenliegen. Man muss unterscheiden, ob n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Von a aus ziehen wir eine Tangente in C^3 und verlegen in ihren Berührungspunkt den Nullpunkt, also auch 1. Ist nun n eine unpaare Ecke, so berührt bn die C^3 in n; verlegen wir daher den Nullpunkt nach n, und vertauschen die Fundamentalpunkte in ihren Rollen, so entsteht das schon erhaltene Polygon. Den 4 von a an die C^3 gehenden Tangenten entsprechen 4 Polygone, und diese entsprechen ebenfalls den 4 von b an C^3 gezogenen Tangenten.

Wenn n eine paare Ecke ist, so berührt an die C^3 in n; verlegen wir daher den Nullpunkt nach n, vertauschen aber a, b nicht, so entsteht dasselbe Polygon; den 4 Tangenten von a an C^3 entsprechen somit nur zwei verschiedene Polygone, und ebenso verhält es sich mit den 4 Tangenten von b.

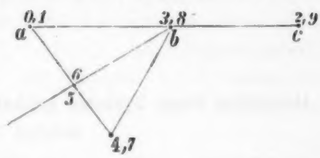
Man könnte meinen, es sei bei unpaarem n dennoch möglich, dass ausser 0, 1 noch zwei mit a in einer Geraden liegende Ecken μ, λ coincidiren. Zieht man $b\mu$, so schneidet diese Gerade die C^3 wieder in 2 coincidirenden Ecken, in $\mu - 1$, $\lambda + 1$ wenn b paar ist. Verbindet man $\mu - 1$ oder $\lambda + 1$ mit a, so liefert diese Gerade zwei coincidirende Ecken $\mu - 2$, $\lambda + 2$ und so fortfahrend bekommt man coincidirend: 0, $\lambda + \mu$. Weil nun in 0 die Ecke 1 und keine andere unpaare Ecke liegt, so muss $\lambda + \mu = 2n + 1$; weil aber $\lambda - \mu = 1$,

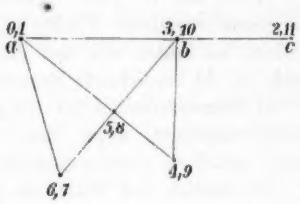
so folgt: $\lambda = n + 1$, $\mu = n$; d. h. *n ist eine paare Zahl, wenn ausser 0, 1 noch 2 mit a in gerader Linie liegende Ecken zusammenfallen.*

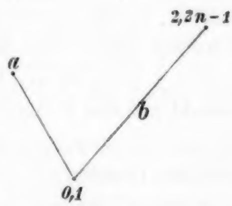
Ebenso beweist man, dass wenn ausser den zusammenfallenden Ecken 0, 1, die auf einer durch a gehenden Geraden liegen, noch 2 mit b in einer Geraden liegende Ecken λ, μ coincidiren sollen, wobei, unter μ die paare Ecke verstanden, $\mu - \lambda = 1$, *nothwendig $n = \lambda$, also unpaar sein muss.*

Wir werden später auf den eben hervorgehobenen Unterschied zwischen einem paaren und unpaaren n zurückkommen; dann wird auf andere Weise die Richtigkeit des Gesagten deutlich werden.

Bemerkenswerth ist die Gestalt des Polygons, wenn ein Fundamentalpunkt (a) ein Wendepunkt ist, und man überdies den Nullpunkt in a wählt. 1 fällt von selbst nach a, und es entsteht ein Polygon, in welchem die paaren Ecken mit den übrigen zusammenfallen. Zeichnen wir z. B. ein 10-Eck: ab schneide die C^3 in c, dann bekommt c die Zahl 2, b erhält 3, der Tangentialpunkt von b wird 4. Denkt man sich das Zehneck vollendet, so muss a die 10^te^, also c die 9^te^, b die 8^te^, der Tangentialpunkt von b die 7^te^ Ecke sein. Trifft mithin $a4$ die Curve in 5, so ist hier auch die 6^te^ Ecke. Ein Punkt, der von 1 aus das Polygon beschreibt, bewegt sich nach 2, dann nach 3, 4, 5. In 5 beschreibt er das Element 5 6 der C^3, geht sodann von 6 nach 7, 8, 9, 0. Von 5 an beschreibt er also im entgegengesetzten Sinne jede bis dahin durchlaufene Strecke. Weil 5 ungerade ist, so tritt die Tangente $5b$ auf; bei einem 12-Eck würde die Tangente $6a$ sich einstellen.

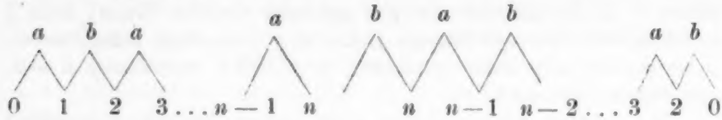




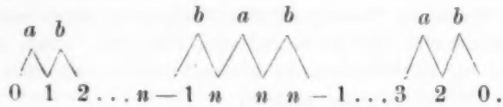


Man wird ganz naturgemäss darauf geführt, diese auf den ersten Blick sonderbaren Polygone zu untersuchen, wenn man sieht, dass ein Punkt, welcher von der Ecke 1 aus der Reihe nach die Seiten 1 2, 2 3, etc. beschreibt, wieder auf demselben Wege zurück muss. Man fragt sich demnach, an welcher Stelle ändert er seine Bewegung? Man findet, dass dies gerade in der Mitte seiner Bewegung, wenn er nach n gekommen ist, stattfindet, wo er ein Element $(n, n+1)$ der C^3 beschreibt, das bei paarem n nach a, bei unpaarem n nach b

gerichtet ist. Verwendet man bei einem solchen Polygone zur Bezeichnung der Ecken die Zahlen von 0 bis n, so wird das Schema für ein unpaares n:



für ein paares n:



4.

Definition eines Systems gepaarter Punkte auf C^3. Zeichen für ein solches System: $[a, b]$.

Wenn auf C^3 zwei Punkte a, b gewählt werden, diese sodann aus einem variablen Punkte p_1 auf die Curve nach a_1, b_1 projicirt werden, so bilden alle auf diese Weise erhaltenen Punktepaare das durch $[a, b]$ bezeichnete System gepaarter Punkte.

a) *Charakteristisch für ein derartiges System ist, dass dasselbe stets wieder entspringt, wenn man das ursprünglich gegebene Paar* a, b *durch irgend ein daraus abgeleitetes* a_1, b_1 *ersetzt, d. h.* $[a, b] \equiv [a_1, b_1]$.

Ist nämlich mit Hilfe des Punktes p_1 das Paar a_1, b_1, mit Hilfe von p_2 das Paar a_2, b_2 erlangt worden, so bedarf es nur des Nachweises, dass a_2, b_2 aus a_1, b_1 mittels irgend eines Curvenpunktes x abgeleitet werden kann: Nun liegen die 8 Punkte

$$a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, p_1, p_2$$

auf C^3; sowohl auf den 3 Geraden:

$$(ap_1a_1), \quad (bp_2b_2), \quad (a_2b_1),$$

als auch auf den Geraden

$$(ap_2a_2), \quad (bp_1b_1), \quad (a_1b_2);$$

folglich müssen sich a_2b_1, a_1b_2 im selben Punkte x der C^3 schneiden. Das Zeichen $[a_i, b_i]$ repräsentirt somit, was auch i sei, immer dasselbe unveränderliche System $[a, b]$, wenn nur a_i, b_i ein in letzterem enthaltenes Paar sind, mit anderen Worten: *Zwei Systeme sind entweder identisch, oder sie haben kein einziges Paar gemein.*

b) *Jeder Punkt* a_i *der* C^3 *erscheint in einem vorliegenden System* $[a, b]$ *mit zwei verschiedenen Punkten, und nur mit diesen gepaart.* Man bekommt diese beiden b_i, β_i, indem man mit den Geraden aa_i,

ba_i, die C^3 in p_i, q_i schneidet, und diese Punkte zur Ableitung der Paare a_i, b_i; α_i, β_i benutzt.

Hat man aber ausser b den noch mit a gepaarten Punkt β, so kann man die Paare a_i, b_i; α_i, β_i; bloss mit Hilfe von p_i aus a, b und α, β ableiten.

Es ist möglich, dass die beiden Paarlinge von a, d. i. b u. β in einem einzigen b vereinigt sind, dann lässt der zweite Ableitungsmodus erkennen, dass auch b_i, β_i coincidiren oder was auf dasselbe hinausläuft, dass die *zwei* Geradenpaare, welche ein Punktepaar im System $[a, b]$ mit einem anderen verbinden, sich auf C^3 treffen. Wenn man sich in diesem Falle zur Ableitung des Tangentialpunktes a' von a bedient, so muss $a' b$ die C^3 in β treffen, d. h. weil b, β coincidiren, a' muss auch Tangentialpunkt von b sein. Umgekehrt, haben a, b denselben Tangentialpunkt, so fallen b, β zusammen, denn sonst würde nach a) der Schnittpunkt von C^3 mit $b\,\beta$ der Tangentialpunkt von a sein. *Deshalb, wenn ein Paar des Systems $[a, b]$ correspondirende Punkte sind, so sind es alle.* Uebrigens wird diese Behauptung von dem Ausspruche umfasst:

„In einem System $[a, b]$ sind entweder alle Paare Fundamentalpunkte Steiner'scher Polygone mit constanter Eckenanzahl, oder es lässt kein Paar die Bildung eines Steiner'schen Polygons mit irgend welcher Eckenzahl zu.“

Dieses folgt unmittelbar aus dem ersten unter Nr. 3 angeführten Lehrsatze. Nun ist klar, dass zwei Punkte a, b, die einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt a' haben, zu einem Steiner'schen Viereck gehören. Man lege den Nullpunkt in a, so wird $a' = 1$, $b = 2$ der Schnittpunkt c von C^3 mit ab erhält die Nummer 3, $a = 4$. Aber auch umgekehrt, sind a, b Fundamentalpunkte eines Vierecks, so haben sie denselben Tangentialpunkt. Denn setzt man $a = 0$, so muss $c = 3$ werden, $3a$ muss die C^3 in 2 schneiden, also $b = 2$, und jetzt muss 1 sowohl auf $a0$ als $b2$ liegen, d. h. 1 muss gemeinschaftlicher Tangentialpunkt von a, b sein.

c) Der Satz $3b$) giebt ein Mittel an die Hand, sich Fundamentalpunkte Steiner'scher Polygone zu verschaffen, wenn man zwei solche a, b kennt. Sind a', b' die Tangentialpunkte von a, b, so hat man in ihnen zwei neue Fundamentalpunkte, aus diesen kann man in gleicher Weise a'', b'', aus $a''\,b''$ wieder a''', b''' u. s. f. ableiten. Es entsteht von selbst die Frage, ob man so unendlich viele Systeme $[a', b']$, $[a'', b'']$, $[a''', b''']$ bekommt, und ob dieselben von einander verschieden sind?

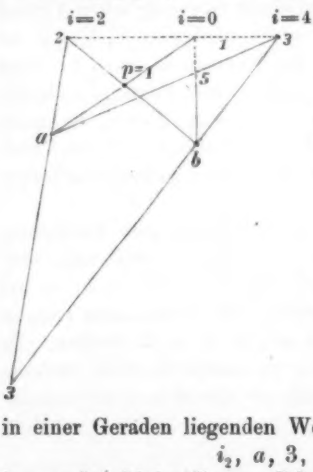
Zunächst findet der Satz statt:

„Wenn a, b und a_i, b_i demselben Systeme angehören, so befinden sich auch die Paare a', b' und a_i', b_i', die aus den Tangentialpunkten

der erstgenannten Punkte bestehen, in einem und demselben Systeme, welches jedoch mit $[a, b]$ nicht identisch zu sein braucht".

Dann sind a_i, b_i aus a, b mittels des Curvenpunktes p_i abgeleitet und heisst π_i der Tangentialpunkt von p_i, so liegen a', π_i, a_i'; b', π_i, b_i' in einer Geraden, oder a_i', b_i' sind aus a', b' mittels π_i abgeleitet.

Was nun die Relation der Systeme $[a, b]$, $[a', b']$ zu einander betrifft, so behaupte ich, dass sie dann und nur dann identisch sind, wenn im System $[a, b]$ zwei Wendepunkte i_1, i_2 gepaart erscheinen, und dasselbe also auch durch $[i_1, i_2]$ bezeichnet werden kann. Gesetzt $a b'$, $a' b$ schnitten die C^3 im nämlichen Punkte c, dann müsste der Tangentialpunkt c' von c auf ab fallen, weil sowohl das Geradenpaar aa', bb', als auch ab', $a'b$ einen durch a, b, a', b' gehenden Kegelschnitt darstellen, und somit c' diesen 4 Punkten gegenüberliegt. Hiernach sind a, b Fundamentalpunkte des 6-Ecks $a a' c b' b c' a$. Wenn wir jetzt nachweisen, dass a, b im System $[i_1, i_2]$ enthalten ist, so ersehen wir zugleich, dass in einem Wendepunktsystem, und nur in einem solchen die Fundamentalpunkte der Sechsecke vorkommen. Zu dem Ende verbinden wir a mit einem beliebigen Wendepunkt i_1, und nennen p den Punkt, wo ai_1 der C^3 begegnet. Es existirt dann ein Kegelschnitt, der in p und a die C^5 osculirt. Deshalb wird jeder Kegelschnitt des Büschels $(pppa)$ — d. h. der in p osculirt und a enthält — die C^3 in zwei mit a' in einer Geraden liegenden Punkten schneiden, oder a' ist Gegenpunkt von p, p, p, a. Mithin giebt es im Büschel $(p\,p\,p\,a)$ einen Kegelschnitt, der durch b, c geht, also im



Büschel $(pppb)$ einen solchen, der a, c aufnimmt, was anders ausgedrückt, besagt, dass b' der Gegenpunkt von p, p, p, b ist. Demnach muss im Büschel $(p\,p\,p\,b)$ ein die C^3 in b osculirender Kegelschnitt vorhanden sein, und dann muss bp durch einen Wendepunkt i_2 gehen.

Das war zu beweisen. Um einzusehen, dass ein aus i_1, i_2 durch den Punkt p abgeleitetes Paar $a\,b$ Fundamentalpunkte eines Sechsecks sind, mache man i_1 zum Nullpunkte, p wird 1, $i_2 = 2$. Trifft $i_2 a$ die C^3 in 3, so muss $3b$ sie in $i_3 = 4$, dem mit $i_1\, i_2$ in einer Geraden liegenden Wendepunkte treffen, da sowohl

$$i_2,\ a,\ 3,\ \text{ als auch } i_2,\ p,\ b$$

in geraden Linien liegen. Schneidet endlich $i_3\, a$ die C^3 in 5, so muss dieser Schnittpunkt auf $i_1\, b$ fallen, weil $i_3\, 3$ die C^3 in b, $i_3\, i_2$ sie in i_1 trifft.

Wenn aber $[a, b]$, $[a', b']$ nicht identisch sind, so kann es sich ereignen, dass in der gebildeten Reihe $[a'', b'']$, $[a''', b''']$, ... ein System $[a^i, b^i]$ auftritt, welches mit $[a, b]$ identisch ist. Alsdann muss nach unserem Satze $[a^{i+1}, b^{i+1}]$ identisch mit $[a', b']$ sein und es werden sich die Systeme periodisch wiederholen. An einer späteren Stelle werden wir im Stande sein, die hiebei sich darbietenden Möglichkeiten erschöpfend zu erörtern.

5.

Criterium dafür, dass zwei Punkte a, b der C^3 Fundamentalpunkte eines Steiner'schen $2n$-Ecks sind.

Wir verlegen den Nullpunkt nach a, und bilden die Reihe $1, 2, 3, \ldots, 2n = 0$. Hiernach ist 1 der Tangentialpunkt von a; soll nun $a = 2n$ sein, so muss der Punkt, in welchem ab die C^3 trifft, $2n - 1$; b selbst die Nummer $2n - 2$ tragen. Weiter muss, weil $2n - 2$ paar ist, die Gerade $(b, 2n - 2)$ auf C^3 den Punkt $2n - 3$ bestimmen, d. h. dieser ist der Tangentialpunkt von b. Wir sehen daher, dass, wenn das Polygon sich schliesst, der Tangentialpunkt von b eine seiner Ecken ist, und umgekehrt, wenn dieser Tangentialpunkt etwa die q^{te} Ecke ist, so schliesst sich das Polygon, und wird ein $q + 3$-Eck. Umfassender ist nachstehendes Criterium:

Wenn irgend zwei paare Ecken μ, ν *mit* 1 *in einer Geraden liegen, so schliesst sich das Polygon, und sämmtliche paare Ecken liegen zu je zwei auf den Strahlen von* 1.

Beweis. Ich behaupte, wenn (μ, ν) durch 1 geht, so ist daraus auch der Fall mit $(\mu + 2, \nu - 2)$ oder auch $(\mu - 2, \nu + 2)$, woraus der Satz unmittelbar folgt: Die 9 Punkte

$$a,\ b,\ 1,\ \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2,\ \nu - 1,\ \nu - 2$$

vertheilen sich auf 3 gerade Linien in der Anordnung:

$$(\mu, \nu, 1); \quad (\mu + 1, \mu + 2, b); \quad (\nu - 1, \nu - 2, a).$$

Aber 6 dieser Punkte liegen auf 2 Geraden in dieser Weise:

$$(\mu, \mu + 1, a); \quad (\nu, b, \nu - 1),$$

somit liegen 1, $\nu - 2$, $\mu + 2$ in einer Geraden.

Es ergiebt sich, dass, wenn man 1 mit einer paaren Ecke verbindet, diese Verbindungslinie auf C^3 noch eine paare Ecke bestimmen muss. Ziehen wir jetzt $1\,2$, so trifft diese Gerade die C^3 in b, b ist folglich eine paare Ecke, etwa $= q + 1$; die folgende Ecke muss auf $(a, q + 1)$ liegen, mithin heisst der Schnittpunkt von ab mit C^3: $q + 2$, die nachfolgende Ecke $q + 3$ liegt auf $(b, q + 2)$, d. h. sie ist a.

Berücksichtigt man, dass die Punktepaare $0, \mu$; $0, \nu$ mittels des Punktes 1 aus einander abgeleitet erscheinen, dass die Systeme $[0, \mu]$, $[0, \nu]$ identisch sind; so kann man das Criterium auch so fassen:

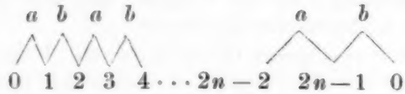
Combinirt man die Ecke $a = 0$ mit allen paaren Ecken, so sind die Systeme $[0, 2]$, $[0, 4]$ $\cdots$ entweder paarweise identisch, oder sie sind alle untereinander verschieden, je nachdem a, b Fundamentalpunkte sind, oder nicht.

Es ist wohl klar, dass, wenn ein $2n$Eck entsteht, b also die Nummer $2n - 2$ bekommt, und mithin auf dem Strahl $1b$ zwei paare Ecken $(2, 2n - 2)$ liegen, auch auf jeden von 1 aus nach einer paaren Ecke μ gezogenen Strahl, noch eine zweite paare Ecke ν fällt.

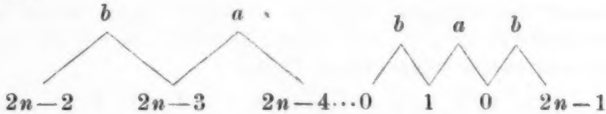
6.

Von dem Kernpolygon P_0.

Hat man in der eben beschriebenen Weise das Polygon $P_0 = 0, 1, 2, 3 \cdots 2n$ erhalten, so kann man die Punkte a, b ihre Rollen vertauschen lassen; dabei entsteht das nämliche Polygon, nur wird es jetzt in einem dem früheren entgegengesetzten Sinne beschrieben. Für das ursprüngliche Schema:



tritt ein:



Wir nennen dieses Polygon P_0 das Kernpolygon für die Fundamentalpunkte a, b, die selbst zwei paare Ecken, der eine Punkt die 0^{te}, der andere die $2n - 2^{\text{te}}$ von P_0 sind.

a) Die paaren Ecken von P_0 sind einerlei mit den n festen Punkten auf C^3, von welchen der Satz 2 b) handelt.

Hieraus folgt:

b) Verbindet man eine paare Ecke des Kernpolygons P_0 mit allen unpaaren, oder auch eine unpaare mit allen paaren, so fällt auf jede dieser Geraden noch eine paare Ecke, d. h. die Geraden der einen, wie die der andern Kategorie decken sich zu je zwei.

λ sei unpaar, μ paar, sonst beide beliebig. Die Gerade (λ, μ) trifft nach unserem zweiten Lehrsatze die C^3 im nämlichen Punkte wie die Gerade $(\lambda - \mu, 0)$, oder auch wie $(\lambda + 2n - \mu, 2n)$. Sei

erstens $\lambda > \mu$, also $\lambda - \mu$ positiv und unpaar; so muss auf $(0, \lambda - \mu)$ noch eine paare Ecke $\nu = \lambda - \mu - 1$ fallen, und wir erhalten:

I. $\lambda = \mu + \nu + 1$; demnach auch $\lambda > \nu$.

Wenn zweitens: $\lambda < \mu$, so muss auf $(\lambda + 2n - \mu, 2n)$ oder $(0, \lambda + 2n - \mu)$ noch die paare Ecke $\nu = \lambda + 2n - \mu - 1$ fallen, und wir erhalten

II. $\lambda + 2n = \mu + \nu + 1$, somit auch, weil $\mu + 1 < 2n$, $\lambda < \nu$.

Auf der Verbindungslinie zweier paaren Ecken liegt jedesmal eine unpaare Ecke, deren Nummer von jenen bedingt ist. Hierbei brauchen die paaren Ecken nicht verschiedene zu sein, weil, wenn man eine beliebige paare Ecke ν mit allen unpaaren verbindet, die entstehenden Geraden die C^3 in allen n paaren Ecken treffen müssen, unter ihnen also auch die Tangente von ν vorkommen muss. Nach unseren Formeln heisst der Tangentialpunkt von ν:

$$2\nu + 1; \quad \text{oder} \quad 2\nu + 1 - 2n,$$

wenn $2\nu + 1 > 2n$ sein sollte. Wir ersehen daraus, dass die Tangentialpunkte der paaren Ecken unter den unpaaren sich befinden; ob aber jede der letzteren der Tangentialpunkt für eine der ersteren ist, dies hängt von der Zahl $2n$ ab. Ist n unpaar, so wird durch $2\nu + 1$ jede unpaare Zahl $< 2n$ dargestellt (siehe den Beweis zum 12. Lehrsatz); alsdann sind die unpaaren Ecken Tangentialpunkte der übrigen, und natürlich jede ist von einer einzigen der Tangentialpunkt. Ist dagegen n paar $= 2n'$, so setze man $\nu = 2\nu'$, daher $2\nu + 1 = 4\nu' + 1$. Wenn jetzt ν' der Reihe nach die Werthe von $0'$ bis $n' - 1$ annimmt, so bekommt man durch die Formel $4\nu' + 1$ genau n' verschiedene unpaare Zahlen jede $< 2n$ und $\equiv + 1$ für den modulus 4. Wird dann ν' den Zahlen n' bis $n - 1$ gleich gesetzt, so bekommt man durch die nunmehr geltende Formel $4\nu' + 1 - 2n$ die nämlichen unpaaren Zahlen wie vorhin, folglich erscheint nur die Hälfte der unpaaren Ecken als Tangentialpunkte der paaren, und zwar ist jede unpaare Ecke λ gemeinschaftlicher Tangentialpunkt von zwei paaren Ecken. Die Formeln I, II gestatten die letzteren durch λ auszudrücken; nämlich zunächst muss $\lambda \equiv 1 \bmod. 4$ sein; sodann ist die eine paare Ecke $\frac{\lambda - 1}{2}$, die andere $n + \frac{\lambda - 1}{2}$.

7.

In der Folge setzen wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil hervorgehoben wird, voraus, dass die Anzahl der Ecken $2n$ nicht durch 4 theilbar ist.

a) Lehrsatz. *Combinirt man eine paare Ecke ν_0 des Kernpolygons mit allen anderen paaren Ecken μ, so erhält man $\frac{n-1}{2}$ untereinander verschiedene Systeme $[\nu_0, \mu]$.*

Beweis. Ist ν_0 der Nullpunkt selbst, so hat man ausser 0 noch $n-1$ paare Ecken. Diese sind zu je 2 auf einem Strahl von 1 gelegen. Daher ist die Zahl der differenten Systeme: $\frac{n-1}{2}$; denn ein Punkt 0 gehört stets *zweien* Paaren desselben Systems an. Setzen wir statt 0 die Ecke ν_0, so erkennt man sogleich, dass die Systeme $[\nu_0, \mu]$ mit den betrachteten identisch sind, denn die Gerade $(0, \nu_0)$ trifft die C^3 in ν_0+1; die Gerade (ν_0+1, μ) trifft C^3 in einer paaren Ecke μ'; die Systeme $[\nu_0, \mu]$, $[0, \mu']$ sind mithin identisch. Oder, jedem in der Formel $[\nu_0, \mu]$ enthaltenen Systeme entspricht ein solches aus der Formel $[0, \mu]$, und da dies, wie man ebenso zeigt, auch vice versa wahr ist, so werden durch beide Formeln die nämlichen Systeme repräsentirt.

b) Lehrsatz. *Projizirt man die paaren Ecken eines Kernpolygons P_0 aus einem beliebigen Punkte p der C^3, die unpaaren Ecken aus dem Tangentialpunkte π von p wieder auf die Curve, so bekommt man die Ecken eines neuen Kernpolygons P_0'.*

Beweis. Aus π mögen die Ecken $0, 2, 4 \cdots 2n-2$ nach $0', 2', 4' \cdots (2n-2)'$, aus p die Ecken $1, 3, 5 \cdots$ nach $1', 2', 3'$ projizirt sein. Dann wird $1'$ der Tangentialpunkt von $0'$, $(2n-2)'$ verbunden mit $2'$ giebt eine durch $1'$ gehende Gerade, weil $2n-2, 2, 1$ in einer Geraden sind. Ebenso liegt $3'$ auf $0'2'$, weil 3 auf 02 liegt u. s. f.

Wir nennen die n paaren Ecken eines Kernpolygons mit den Fundamentalpunkten a, b eine zum System $[a, b]$ gehörige Involutionsgruppe n^{ten} Grades; es lautet dann unser Satz: Projizirt man eine Involutionsgruppe des Systems $[a, b]$ aus einem Punkte p der C^3 auf die Curve, so entsteht eine neue, welche dem ursprünglichen System angehört, weil ihre Fundamentalpunkte ein Paar in jenem Systeme bilden. Alle auf diese Weise durch Variation von p aus einer beliebig gegebenen Gruppe abgeleitete Gruppen bilden daher ein und dasselbe Gruppensystem.

e) Lehrsatz. Die unpaaren Ecken eines Kernpolygons sind selbst paare Ecken in einem anderen solchen Polygon, oder *die Tangentialpunkte der eine Involutionsgruppe bildenden Punkte liefern eine neue solche Gruppe im nämlichen System.*

Beweis. Wenn man etwa aus 0 die paaren Ecken $0, 2, 4 \cdots$ auf C^3 projizirt, so erhält man die unpaaren Ecken $1, 3, 5 \cdots$ w. z. b. w.

Hierbei kann man das Projectionscentrum in irgend einer paaren Ecke annehmen, so dass die möglichen Verbindungslinien zwischen allen paaren Ecken durch $1, 3, 5 \cdots$ gehen, oder *zu jeder Involutionsgruppe* $0, 2, 4 \cdots$ *gehören n Projectionscentren* $1, 3, 5 \cdots$, *aus denen die Gruppe als ihre eigene Projection erscheint.* Es ist klar, dass aus einem von $1, 3, 5 \cdots$ verschiedenen Projectionscentrum eine In-

volutionsgruppe sich ableitet, die mit $0, 2, 4 \cdots$ keinen Punkt gemein hat.

d) Schreibt man $0', 2', 4' \cdots \mu', \cdots$ statt $1, 3, 5 \cdots \mu + 1 \cdots$, so bemerkt man, dass $0', \mu'$ dem System $[0, \mu]$ angehört, weil das Paar $1, \mu + 1$ oder $0', \mu'$ mittels des Punktes 0 aus dem Paare $0, \mu$ abgeleitet worden ist. Im Anschlusse hieran lässt sich die Frage entscheiden, ob die aufeinander folgenden Paare von Tangentialpunkten, die aus zwei beliebigen Punkten a, b abgeleitet werden, nämlich a', b'; a'', b'' u. s. w. immerfort neue Systeme liefern? Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens: a, b sind für ein $2n$Eck Fundamentalpunkte.

Setzen wir $a = 0$, und denken das Kernpolygon $0\,1\,2\,3 \cdots$, so wird $b = 2n - 2$, $a' = 1$, b' ist $2n - 3$; weil aber $[0,2] \equiv [0, 2n - 2]$, so folgt (nach 4*c*) $[1, 5] \equiv [a', b']$. Nun ist $1, 5$ einerlei $0', 4'$,

$$\text{oder } [1, 5] \equiv [0, 2^2], \text{ daher } [a', b'] \equiv [0, 2^2].$$

In Folge von 4*c* ist ferner

$$[a'', b''] \equiv [1, 2^3 + 1] \equiv [0, 2^3],$$
$$[a''', b'''] \equiv [1, 2 \cdot 2^3 + 1] \equiv [0, 2^4] \text{ u. s. f.}$$

Wäre $2n$ eine Potenz von 2, etwa $= 2^p$, so kommt $[0, 2^p] \equiv [0, 0]$, d. h. es tritt einmal ein Paar mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkte auf, und die Ableitung erreicht hier ein Ende.

Die zum Vorschein gekommenen Systeme sind, wie man leicht sieht, von einander verschieden, denn wäre $[0, 2^q] \equiv [0, 2^{q'}]$, so müssten die Punkte $2^q, 2^{q'}$ auf einem Strahl von 1 liegen, folglich gemäss der Relation I.: $2^q + 2^{q'} = 2^p$, was nicht möglich ist.

Ist $2n = 2^p \cdot u$, wo u eine unpaare Zahl bedeutet, so möge x der Congruenz: $2^x - 1 \equiv 0 \bmod. u$ genügen, also $2^{x+p} \equiv 2^p \bmod. 2n$; dann sind die Systeme $[0, 2^p]$ und $[0, 2^{x+p}]$ offenbar identisch, also kehrt ein schon dagewesenes System wieder, worauf diejenigen periodisch sich wiederholen müssen, welche demselben anfangs folgten. Das System $[0, 2^p]$ ist auch von allen dasjenige, welches zuerst wiederkehrt, denn würde $[0, 2^q] \equiv [0, 2^{q'}]$, so müsste entweder $2^q + 2^{q'}$, oder $2^{q'} - 2^q$ durch $2^p \cdot u$ theilbar sein; in jedem Falle müsste, $2^q < 2^{q'}$ vorausgesetzt, 2^q den Factor 2^p enthalten.

Zweitens: a, b lassen kein Steinersches Polygon zu, also verbleibt auch den Tangentialpunktenpaaren diese negative Eigenschaft, und gemäss der zweiten Fassung des Kriteriums 5) sind alle in der Formel $[0, 2^p]$ begriffene Systeme, was auch p sei, von einander verschieden, daher auch unter den Systemen der Tangentialpunktepaare keine gleichen anzutreffen sein werden.

8.

Lehrsatz. *Zwei Involutionsgruppen n^{ten} Grades, welche Projectionen von einander aus einem gewissen Centrum p_1 der C^3 sind, erscheinen auch als Projectionen von einander aus $n-1$ anderer Centren $p_2, p_3 \cdots p_n$, und diese n Punkte bilden wieder eine Involutionsgruppe. Die drei auf diese Art zusammenhängenden Gruppen heissen connex.*

Beweis. Gesetzt, aus p_1 projizire sich die Gruppe $0, 2, 4 \cdots \nu \cdots$ nach $0', 2', 4' \cdots \nu' \cdots$. Ziehen wir $0', \nu$, so wird diese Gerade die C^3 in einem Punkte p_i treffen, aus diesem projicire man die Punkte $0, 2, 4 \cdots$ nach $0^i, 2^i, 4^i, \cdots$ unter welchen auch $0'$ vorkommt.

Durch Combination von $0'$ mit jedem der Punkte $0^i, 2^i, 4^i, \cdots$ hat man $\frac{n-1}{2}$ differente Systeme, welche der Reihe nach mit $[\nu, 0]$, $[\nu, 2]$, $[\nu, 4] \cdots$ identisch sind.

Combinirt man anderseits $0'$ mit jedem der Punkte $2', 4', \cdots$, so erhält man ebenso viele, mit den eben genannten identische Systeme, woraus hervorgeht, dass die Punkte $0^i, 2^i, 4^i \cdots$ in irgend einer Ordnung mit $2', 4', \cdots$ zusammenfallen müssen. Betrachtet man die drei connexen Gruppen, so sieht man, dass je zwei Projectionen von einander für irgend ein in der dritten Gruppe gewähltes Centrum sind.

9.

Lehrsatz. *Zwei Punkte einer Involutionsgruppe sind stets Fundamentalpunkte eines $2n$Ecks, welches aber unter Umständen aus mehreren sich deckenden Steinerschen Polygonen niederen Grades zusammengesetzt ist. Nur im Falle einer Primzahl n sind alle auftretenden $2n$ Ecke einfache.*

Beweis. In der Gruppe $0, 2, 4 \cdots 2n-2$ seien die Punkte μ, μ' gewählt, dann wird 0 mit einem gewissen Punkte ν ein System liefern, das mit $[\mu, \mu']$ identisch ist. Wenn daher $0, \nu$ Fundamentalpunkte eines $2n$Ecks sind, so werden es μ, μ' ebenfalls sein. Es handelt sich also um den Nachweis für $0, \nu$; ich werde zeigen, dass für diese Punkte ein Kernpolygon existirt, indem ich mit ν als Anfangsecke beginne:

Der Tangentialpunkt von ν ist $2\nu + 1$. Auf $(0, 2\nu + 1)$ liegt eine paare Ecke x, für welche:

$$x + 0 + 1 = 2\nu + 1; \quad \text{da} \quad x = 2\nu.$$

Auf $(\nu, 2\nu)$ liegt eine unpaare Ecke $= \nu + 2\nu + 1 = 3\nu + 2$.
„ $(0, 3\nu + 1)$ „ die paare Ecke 3ν; u. s. f.

Ist $g\nu$ das kleinste Vielfache von ν und $2n$, so kommt man nothwendig zum Punkte $g\nu$, der mit 0 coinzidirt, d. h. die Gerade $(0, g\nu + 1)$ berührt die C^3 in 0, welcher Punkt die Nummer $g\nu$ bekommt.

Jetzt ist $g\nu$ oder 0 mit ν zu verbinden, und wir erhalten die letzte Ecke $(g+1)\nu+1$ im Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit C^3.

Von dem gefundenen Polygone schneiden sich in ν die g Seiten:

$$(\nu, 2\nu+1), \quad (2\nu, 3\nu+1)\cdots(g\nu, (g+1)\nu+1),$$

in 0 die g Seiten:

$$(2\nu, 2\nu+1), \quad (3\nu, 3\nu+1)\cdots(\nu, (g+1)\nu+1).$$

Dasselbe ist somit ein $2g$Eck. Wenn n eine Primzahl ist, so ist $n\nu$ das kleinste Vielfache von ν und $2n$, mithin entsteht dann ein $2n$Eck; dieses findet auch Statt, wenn ν, n relative Primzahlen sind, also $n\cdot\nu$ das kleinste Vielfache von ν, $2n$ ist. Im anderen Falle sei t der grösste gemeinschaftliche Theiler von n, ν, also $\frac{n\cdot\nu}{t}$ das kleinste Vielfache von $\nu, 2n$, so folgt $g=\frac{n}{t}$ d. i. g ein Theiler von n oder $2g$ ein Theiler von $2n$.

Zusatz. Weil $n+1$, n relative Primzahlen sind, so werden die Punkte 0, $n+1$ Fundamentalpunkte eines einfachen $2n$Ecks sein. Ihren Tangentialpunkten 1, $2(n+1)+1$, oder 1, 3 kommt ebenfalls diese Eigenschaft zu, weil die Systeme $[1, 3]$, $[0, 2]$ identisch sind, 2 und n aber 1 zum grössten gemeinschaftlichen Theiler haben. Wählt man 1, 3 zu Fundamentalpunkten a, b und legt den Anfangspunkt des entsprechenden $2n$Ecks in den Punkt 0 der Gruppe, so erhält man eins der unter 3e betrachteten Polygone, deren paare und unpaare Ecken coinzidiren. Man gewahrt aber bald, dass dieses Polygon nur Ecken der vorliegenden Gruppe bekommt.

10.

Lehrsatz. *Die paaren sowohl wie die unpaaren Ecken eines $2n$Ecks P für die Fundamentalpunkte a, b sind zwei Involutionsgruppen im System* $[a, b]$.

Beweis. Betrachtet man die n paaren Ecken des zu a, b gehörigen Kernpolygons P_0, so sind diese nach Früherem die Schnittpunkte der C^3 mit denjenigen Geraden, welche eine beliebig ausgesuchte unpaare Ecke von P mit seinen sämmtlichen paaren Ecken verbinden. Deshalb bilden die paaren Ecken von P_0, dann die paaren Ecken von P, endlich die unpaaren Ecken von P drei connexe Gruppen.

Mit jedem Steinerschen Polygone P sind demnach drei connexe Involutionsgruppen enge verbunden: Zwei Gruppen werden durch die Ecken des P constituirt; die dritte besteht aus den Ecken des Kernpolygons P_0. Wenn indess P selbst ein Kernpolygon ist, so fällt die letztere Gruppe mit der aus den paaren Ecken von P bestehenden

zusammen. Ist P eines der speciellen unter 3*e* betrachteten Polygone, so decken sich die beiden erstgenannten Gruppen, während die dritte aus den Tangentialpunkten für diese besteht.

11.

Lehrsatz. *Die 3n Punkte dreier connexen Gruppen gehören zu den Basispunkten eines Bündels von Curven n^{ter} Ordnung. Für $n = 3$ sind sie selbst diese Basispunkte.*

Der Satz ergiebt sich leicht aus folgender Haupteigenschaft dreier connexen Gruppen.

12.

Lehrsatz. *Je zwei solche Gruppen bestehen stets, die eine aus den paaren, die andere aus den unpaaren Ecken eines Steiner'schen Polygons, welches seine Fundamentalpunkte in der dritten Gruppe hat, so dass diese die paaren Ecken des zugehörigen Kernpolygons enthält.*

Beweis. Nach 9) giebt es in der Gruppe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ zwei Fundamentalpunkte für ein Steiner'sches $2n$Eck; sie mögen durch α_0, $\alpha_{2(n-1)}$ bezeichnet werden. Construirt man das entsprechende Kernpolygon P_0, indem man seine Anfangsecke mit α_0 zusammenfallen lässt, so werden dessen paare Ecken $\alpha_4, \alpha_6 \cdots \alpha_{2(n-1)}, \alpha_{2n}$ die Punkte $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ selbst in einer gewissen Anordnung sein (7*b*). Benützt man α_0, $\alpha_{2(n-1)}$ als Fundamentalpunkte für ein Steiner'sches Polygon P, indem man zum Nullpunkte einen der Punkte $a, b, c \cdots$ nimmt, so wird 1 in einen der Punkte $a', b', c' \cdots$ fallen, 2 in einen der Punkte $a, b, c \cdots$ u. s. f.; so dass als paare Ecken von P nothwendig alle Punkte der Gruppe $a, b, c \cdots$ auftreten werden, als unpaare Ecken die Punkte $a', b', c' \cdots$.

Bedeutet 2ν eine der paaren Ecken, so verbinde man sie mit der unpaaren Ecke $4\nu + 1$, diese Verbindungslinie trifft alsdann (2*b*) die C^3 im nämlichen Punkte wie die Gerade, welche 0 mit $2\nu + 1$, oder auch α_0 mit $\alpha_{2\nu+1}$ verbindet, d. h. im Punkte $\alpha_{2\nu}$. Legt man jetzt dem ν alle Werthe $< n$ bei, so erhält man n Verbindungslinien: (0, 1), (2, 5), (4, 9); welche bezüglich durch α_0, α_2, α_4 etc. gehen. Dass nun auf diesen n Geraden wirklich sämmtliche $3n$ Punkte unserer Gruppen vertheilt sind, wird daraus erhellen, dass die Formel $4\nu + 1$ für $\nu < n$ alle ungeraden Zahlen unter $2n$ liefert.

Legt man dem ν zunächst die Werthe von 0 bis $\frac{n-1}{2}$ bei, so erhält man für 4ν jede durch 4 theilbare Zahl $< 2n$, also ist durch $4\nu + 1$ jede auf eine solche unmittelbar folgende ungerade Zahl dargestellt. Nimmt darauf ν die Werthe von $\frac{n+1}{2}$ bis $n - 1$ an, so wird 4ν nach dem Modulus $2n$ einer durch 2, nicht aber durch 4

theilbaren Zahl congruent, und es ergeben sich als Reste von 4ν für den Divisor $2n$ alle diejenigen geraden Zahlen $< 2n$, welche den Factor 4 nicht enthalten. Dem entsprechend wird jetzt durch $4\nu + 1$ jede auf eine solche folgende ungerade Zahl dargestellt; überhaupt repräsentirt also die Formel $4\nu + 1$, $(\nu < n)$ jede unter $2n$ befindliche ungerade Zahl.

Beispiel. $n = 5$. Da n eine Primzahl ist, so kann man für α_0, α_8 zwei beliebige Punkte der Gruppe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ nehmen, die übrigen Punkte bekommen die Marken α_2, α_4, α_6. Die Punkte $a, b, c \cdots$ werden durch 0, 2, 4, 6, 8; $a', b', c' \cdots$ durch 1, 3, 5, 7, 9 bezeichnet. Es liegen nun in je einer Geraden die Punkte:

$$0,\ \alpha_0,\ 1; \qquad 2,\ \alpha_2,\ 5; \qquad 4,\ \alpha_4,\ 9;$$
$$6,\ \alpha_6,\ 3; \qquad 8,\ \alpha_5,\ 7.$$

Eine andere Ordnung wäre:

$$0,\ \alpha_0,\ 1; \qquad 4,\ \alpha_2,\ 7; \qquad 3,\ \alpha_2,\ 8;$$
$$2,\ \alpha_6,\ 9; \qquad 6,\ \alpha_8,\ 5.$$

Wir haben oben n gerade Linien erhalten, auf welchen unsere $3n$ Punkte zu je 3 combinirt liegen. Dabei war die erste Gerade $0, \alpha_0, 1$ in sofern willkürlich, als der Punkt 0 irgend ein Punkt der Gruppe $a, b, c \cdots$ sein kann. Verlegen wir den Nullpunkt $0'$ in den vorhin mit 2 bezeichneten Punkt und nennen $1'$, $2'$, etc. die Ecken des neuen Steiner'schen Polygons, so werden diese bezüglich mit 3, 4 etc. des früheren coincidiren. Die paare Ecke $(2\nu)'$ werde wieder mit $(4\nu + 1)'$ verbunden, dann geht diese Verbindungslinie zwar auch durch die Ecke $\alpha_{2\nu}$ des Kernpolygons, aber die auf ihr noch befindlichen Punkte sind nicht die früheren 2ν, $4\nu + 1$; sondern: $2\nu + 2$, $4\nu + 1 + 2$.

Grösserer Deutlichkeit wegen wollen wir die früher gefundenen n Geraden durch die 3, auf jeder liegenden Punkte bezeichnen, sie sind:

$$(0,\ \alpha_0,\ 1), \qquad (2,\ \alpha_2,\ 5), \qquad (4,\ \alpha_4,\ 9) \cdots$$
$$(2\nu,\ \alpha_{2\nu},\ 4\nu + 1) \cdots .$$

Bei der neuen Ordnung hat man:

$$(2,\ \alpha_0,\ 3), \qquad (4,\ \alpha_2,\ 7), \qquad (6,\ \alpha_4,\ 11) \cdots$$
$$(2\nu + 2,\ \alpha_{2\nu},\ 4\nu + 3) \cdots .$$

Beide Systeme von je n Geraden schneiden sich in n^2 Basispunkten eines Büschels von Curven n^{ter} Ordnung, von welchen $3n$ Punkte auf unserer C^3 liegen und die angenommenen Gruppen constituiren.

Zusatz. Es wird nicht überflüssig sein, wenn wir an zwei Beispielen erläutern, wie man sich 3 connexe Gruppen, in beliebiger Anzahl, mit Hilfe von Curven dritter Ordnung verschaffen kann.

1. *Beispiel.* $n = 3$. a, b seien beliebige Punkte, ebenso sind die Gerade $(a, 0, 1)$ und die auf ihr liegenden Punkte 0, 1 beliebig. Auf $b1$ ist noch 2, auf $a2$ noch 3, auf $b3$ noch 4 willkürlich anzunehmen, endlich ist der Schnittpunkt von $a4$ und $b0$ mit 5 zu bezeichnen. Nun lege man durch die 8 Punkte $a, b, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ irgend eine C^3, so geht diese nothwendig durch den Punkt c, in welchem 03, 14 sich schneiden; denn man hat die 3 Geraden:

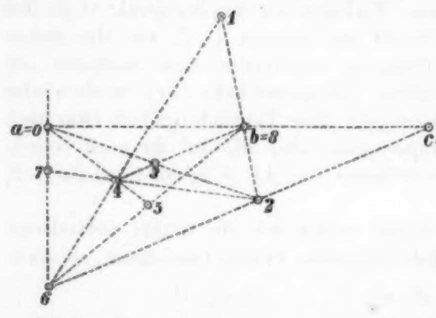
$$(0, 3, c), \quad (a, 4, 5), \quad (b, 1, 2)$$

und diese:

$$(1, 4, c), \quad (b, 0, 5), \quad (a, 2, 3).$$

Auf jeder C^3 des Büschels $(a, b, c, 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ bilden diese Punkte 3 connexe Gruppen, und somit kann eine jede dieser C^3 benützt werden, um sich beliebige Gruppen zu verschaffen. Liegen speciell die 6 Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5 auf einem Kegelschnitt, so fallen a, b, c in eine Gerade, und werden für jede Curve des Büschels Wendepunkte.

2. *Beispiel.* $n = 5$. Von einer C^3 sei gegeben a und sein Tangentialpunkt 1, b und sein Tangentialpunkt 7; a sei Nullpunkt, also $b = 8$. Auf $a7$ sei 6, auf $b1$ noch 2 beliebig; dann enthält die C^3 stets den Schnittpunkt $c = 9$ von 62 mit ab. Die 9 Punkte $a, 0, b, 8, 1, 7, 2, 6, c$ sind die Basis eines Büschels von Curven dritter Ordnung. Bezeichnen wir jetzt den Schnittpunkt von 16 und 27 mit 4, und betrachten diejenige C^3 des Büschels, welche 4 enthält, so bemerken wir, dass auf ihr 9 oder c der Tangentialpunkt von 4 ist.



Auf 02 liegt ein Curvenpunkt 3, der auch auf 84 liegen muss; denn 09 trifft die C^3 in 8, 16 trifft sie in 4, und sowohl 0, 0, 1 wie 9, 2, 6 liegen in gerader Linie. Ganz ebenso findet man 5 im Durchschnitt von 04 mit 86. Wir haben mithin ein Kernpolygon für die Fundamentalpunkte a, b von 10 Ecken; und die Punkte 0, 2, 4, 6, 8 sowie 1, 3, 5, 7, 9 bilden je ein Involutionsquintupel auf der angegebenen C^3. Mit Hilfe dieser Curve kann man sich daher, indem man den Strahl $a01$ um a sich drehen lässt, beliebig viele solcher Quintupel verschaffen.

13.

Die Ordnungscurve eines Systems gepaarter Punkte $[a, b]$.

Den unter Nr. 4 angeführten Eigenschaften eines Systems $[a, b]$ mögen noch die nachstehenden angeschlossen werden:

d) Die beiden Paarlinge eines Punktes a_1, *nämlich* b_1, β_1 *liegen mit dem Tangentialpunkte von* a_1 *in einer Geraden.* Denn mittels dieses Punktes erscheint das Paar a_1, β_1 aus a_1, b_1, oder auch dieses aus jenem abgeleitet. Hieraus ergiebt sich:

e) Die Paarlinge eines Wendepunktes liegen mit ihm in einer Geraden, und umgekehrt liegen zwei mit einem und demselben dritten Punkte zu Paaren verbundene Punkte mit diesem in einer Geraden, so ist der dritte Punkt ein Wendepunkt.

f) Wenn die Paarlinge b, β *eines Punktes* a *unter sich wiederum gepaart sind, so findet dieses im System* $[a, b]$ *durchgehends Statt.*

a_1 sei ein beliebiger Punkt auf C^3; $a_1 a$ treffe die C^3 in p, pb treffe sie in b_1, $p\beta$ in β_1; dann hat man im System $[a, b]$ die Paare a_1, b_1; a_1, β_1; b_1, β_1 mittels des Punktes p aus den gegebenen abgeleitet.

g) Die Eigenschaft f) kommt dem System zweier Wendepunkte $[i_1, i_2]$ *stets zu, jedoch keinem anderen System.*

Liegt der Wendepunkt i_3 mit i_1, i_2 in einer Geraden, so sind nach *d*) diese 3 Punkte zu je zwei gepaart; also findet ein Gleiches im System $[i_1, i_2]$ durchgehends Statt. Wenn andererseits a, b, β eine Gruppe von zu je zwei gepaarten Punkten bedeutet, i_1 ein Wendepunkt ist, so liegen (*e*) die mit i_1 gepaarten Punkte x, y in einer Geraden, und es sind x, y ebenfalls gepaart. Nach *e* muss nun, weil die Paarlinge von x mit x in einer Geraden liegen, dieser Punkt ein Wendepunkt sein, ebenso y, oder die Systeme $[a, b]$, $[i_1, x]$, $[i_1, y]$, $[x, y]$ sind identisch.

h) In einem System $[a, b]$ *existiren* 18, *mit ihren Tangentialpunkten gepaarte Punkte.*

Beweis. Es giebt 9 Kegelschnitte A, welche durch a, b gehen, in a die C^3 berühren, und diese Curve überdies in x osculiren. Leitet man nun mit Hilfe von x aus a, b das Paar α, β ab, wobei ax durch α, bx durch β geht, so ist β der Tangentialpunkt von α. Betrachtet man ferner einen der 9 Kegelschnitte B, welche durch a, b gehen, in b die C^3 berühren, und sie in x' osculiren, und leitet aus a, b mittels x' das Paar α', β' ab, wobei ax' durch α', bx' durch β' gehe; so wird α' der Tangentialpunkt von β' sein. Die 9 Punkte α, und die 9 anderen β' haben die im Satze ausgesprochene Eigenschaft. Ausser ihnen giebt es keine, denn wären α'' β'' aus a, b mittels x'' abgeleitet, und β'' der Tangentialpunkt von α'', so müsste es einen Kegel-

schnitt geben, der in x'' die C^3 osculirt, durch a, b geht und sie in a berührt; aber wir haben alle diese Kegelschnitte schon in Rechnung gezogen.

Wenn a, b den nämlichen Tangentialpunkt haben, so existiren wohl die 18 Kegelschnitte A, B; doch liefern die Osculationspunkte zu je zwei immer nur ein und dasselbe Paar α, β, so dass deren nur 9 auftreten. Denn ist beispielsweise α, β mit Hilfe von x aus a, b abgeleitet worden, so müssen sich jetzt auch $a\beta$, $b\alpha$ auf C^3 schneiden, etwa in x'. In diesem Falle giebt es einen Kegelschnitt A, der in x osculirt, in a berührt, und b enthält; β wird der Tangentialpunkt von α sein. Demnach ist auch ein Kegelschnitt B vorhanden, der in x' osculirt, in b berührt, und a enthält. Hier sind mithin nur 9 Punkte α auf C^3, die mit ihren Tangentialpunkten β gepaart sind. Weil endlich α, β ebenfalls einerlei Tangentialpunkt haben müssen (nach b), so folgt, dass die Punkte β Wendepunkte sind.

i) Die achtzehn Punkte der vorigen Nummer liegen zu je sechs auf drei Kegelschnitten, und sind die Ecken dreier Steiner'scher Sechsecke.

Beweis. 0 sei einer dieser Punkte, $0'$ sein Tangentialpunkt; i_1, i_2, i_3 seien drei in gerader Linie liegende Wendepunkte: $i_1 0$ treffe die C^3 in 1, $i_1 0'$ in $1'$, dann wird $1'$ der Tangentialpunkt von 1 sein, und nebstdem ist $1, 1'$ ein Paar im System $[0, 0']$.

Ziehen wir ferner $i_2 1, i_2 1'$, welche die Curve in $2, 2'$ schneiden, so ist $2'$ Tangentialpunkt von 2, und $2, 2'$ ist ein Paar im System $[0, 0']$. Vollenden wir das Sechseck für die Fundamentalpunkte i_1, i_2, dessen erste Ecke 0 ist, und nennen 1, 2, 3, 4, 5 die folgenden Ecken, so bilden deren Tangentialpunkte $0', 1', 2', 3', 4', 5'$ ebenfalls ein Steiner'sches Sechseck für dieselben Fundamentalpunkte i_1, i_2. Das Kernpolygon für Beide hat die doppelt zu rechnenden Punkte i_1, i_2, i_3 zu Ecken, daher haben wir in

$$(i_1\, i_2\, i_3), \quad (0, 2, 4), \quad (1, 3, 5)$$

drei connexe Involutionsgruppen. Weil nun i_1, i_2, i_3 in eine Gerade fallen, so müssen die 6 übrigen Punkte in einem Kegelschnitte liegen. Es ist von selbst klar, wie sich die noch fehlenden 12 Punkte auf zwei andere Kegelschnitte vertheilen.

Um den besonderen Fall noch zu behandeln, dass im vorliegenden Systeme jedes Paar denselben Tangentialpunkt hat, und also der Punkt 0 immer so gewählt werden kann, dass i_1 sein Tangentialpunkt ist (ohne mit ihm zu coincidiren); so bemerken wir zunächst das Steiner'sche Sechseck mit den Fundamentalpunkten i_1, i_2, und der Anfangsecke 0. Dasselbe erhält zwei unendlich kleine Seiten — Elemente der C^3 — und zwei endliche Seiten, welche jede zweimal beschrieben wird. Da nämlich $0 i_1$ Tangente der C^3 für 0 ist, so fällt 1 mit 0

zusammen; $i_2 1$ treffe die C^3 in 2, dann ist i_3 Tangentialpunkt von 2. Wenn daher $i_1 2$ die C^3 in 3 schneidet, so wird i_2 Tangentialpunkt von 3 sein, d. h. 4 wird mit 3 coincidiren. Nun trifft $i_1 4$ die Curve wieder in 3, welcher Punkt also auch die Nummer 5 erhält, endlich geht 5 0 wieder durch i_2, oder der Nullpunkt erhält die Nummer 6.

Wir sehen somit, dass der die gefundenen Ecken aufnehmende Kegelschnitt die C^3 in den drei Punkten 0, 2, 4 berührt, die in i_1, i_2, i_3 ihre Tangentialpunkte haben.

k) *Die Enveloppe der Verbindungslinien aller in einem System* $[a, b]$ *befindlichen Paare heisst die Ordnungslinie des Systems.*

Um die Classe dieser Curve zu finden, untersuchen wir, wie viele solcher Verbindungslinien durch einen willkürlichen Punkt m der C^3 gehen. Heissen n, ν die Paarlinge von m, so hat man zuvörderst die Geraden:

$$mn, \quad m\nu.$$

Gesetzt $m a_1 b_1$ sei eine andere Gerade durch m. Sie trage das Paar a_1, b_1, und es sei dieses mittels des Punktes x_1 aus a, b abgeleitet, so dass aa_1, bb_1 sich in x_1 auf C^3 schneiden.

Nennen wir y den Tangentialpunkt von x_1, c den 3ten Schnittpunkt von ab mit C^3, so ist y der gegenüberliegende Punkt zu a, b, a_1, b_1; deshalb muss die Gerade mc durch y gehen. Umgekehrt bestimmen wir den Durchschnitt von mc mit C^3, und legen von diesem Punkte y eine Tangente yx_1 an C^3, leiten sodann mittels x_1 aus a, b das Paar a_1, b_1 ab, so wird $a_1 b_1$ durch m gehen. Von y aus lassen sich aber vier Tangenten an C^3 ziehen; wir sehen also, dass durch m sechs, und nur sechs Verbindungslinien gepaarter Punkte gehen; *die in Rede stehende Enveloppe ist folglich von der sechsten Classe.*

Wir haben absichtlich den Punkt m auf C^3 gewählt, um die sehr brauchbare Construction der 4 Tangenten wie $a_1 b_1$ mitzutheilen; es ist bei ihrer Anwendung festzuhalten, dass a, b durch irgend ein Paar im System $[a, b]$ vertreten werden kann, etwa durch m, n oder $a_1 b_1$ selbst, falls diese eine der gesuchten Tangenten schon anderweitig bekannt wäre.

Ist i_1 ein Wendepunkt, und sind u, v mit ihm gepaart, also $i_1 uv$ eine Gerade, so wird diese eine Doppeltangente der Enveloppe sein. Sonach giebt es 9 Doppeltangenten, und die Enveloppe könnte höchstens von der Ordnung $30 - 18 = 12$ sein; wir werden zeigen, dass sie niedriger Ordnung nicht sein kann.

Zuvor wollen wir die anderen vier von i_1 ausgehenden Tangenten angeben:

Wir benützen dazu die obige Construction, indem wir statt a, b das Paar i_1, u verwenden: $i_1 u$ trifft die C^3 in v, $i_1 v$ trifft sie in u; zieht man daher von u an C^3 vier Tangenten, verbindet ihre Berührungs-

punkte u_1, u_2, u_3, u_4 mit i_1, so erhält man in diesen Verbindungslinien die verlangten Tangenten der Enveloppe, sie schneiden die C^3 in vier Punkten v_1, v_2, v_3, v_4, deren gemeinschaftlicher Tbngentialpunkt v ist.

l) Bestimmung des Berührungspunktes auf einer beliebigen Tangente ab der Enveloppe. Unter a, b irgend ein Paar verstanden, sei a', b' ein benachbartes Paar, d. h. aa', bb' unendlich klein; und t sei der Schnittpunkt von $aa'\ bb'$. Liegt t nicht auf C^3, was der allgemeine Fall ist, so müssen die Geraden ab', $a'b$ sich auf C^3 schneiden (4a). Die Grenzlage dieses Schnittpunktes ist offenbar der Punkt c, in welchem ab die C^3 trifft. Bezeichnet man mit γ den Schnittpunkt von ab, $a'b'$, so hat man den harmonischen Büschel $t\,(ab\,c\gamma)$, folglich γ von c durch a, b harmonisch getrennt.

Liegt speciell t auf C^3, so ist dies bekanntlich auch mit dem Schnittpunkt von ab', $a'b$ der Fall, und es bleibt Alles wie vorhin.

Die Berührungspunkte der Doppeltangente i_1uv sind, wie man sieht, durch i_1 und die harmonische Polare dieses Punktes von einander harmonisch getrennt; die Berührungspunkte der Tangenten

$$i_1u_1, \quad i_1u_2, \quad i_1u_3, \quad i_1u_4$$

liegen auf der harmonischen Polaren von i_1.

Wenn α, β ein Paar im Systeme $[a, b]$, und β der Tangentialpunkt von α ist, so wird C^3 von der Enveloppe in α berührt; denn α ist für das Paar α, β sich selbst harmonisch zugeordnet. Da es 18 Punkte auf C^3 giebt, die mit ihren Tangentialpunkten gepaart sind, so berühren sich C^3 und die Enveloppe in 18 Punkten, somit kann letztere von keiner niedrigeren als der 12ten Ordnung sein; 12 ist also ihre Ordnung. Sie schneidet z. B. die harmonische Polare von i_1 in 12 Punkten, von denen wir schon vier kennen, die Berührungspunkte nämlich der durch i_1 gehenden einfachen Tangenten. Ich behaupte, dass die fehlenden 8 Schnittpunkte durch vier Doppelpunkte der Enveloppe dargestellt werden: Denn es sei σ einer der Schnittpunkte, und es schneide die Tangente der Enveloppe für den Punkt σ die C^3 in den gepaarten Punkten p, q, ausserdem in s, wo dann s, σ durch p, q harmonisch getrennt sind. Projicirt man nun aus i_1 die Punkte p, q, s nach p', q', s' auf C^3, so werden p', q', s' nicht nur in einer Geraden liegen, welche durch σ geht, sondern es werden auch $p'q'$ gepaart, und durch σ, s' harmonisch getrennt sein. Folglich berührt die Gerade $p'q'$ unsere Enveloppe im nämlichen Punkte σ, wie pq; beide Geraden sind mithin Tangenten im Doppelpunkte σ. In derselben Weise erkennt man die ferneren Schnittpunkte auf der harmonischen Polare von i_1 als Doppelpunkte; die Curve hat deren

somit 36, welche zu je 4 auf die 9 harmonischen Polaren der C^3 sich vertheilen. Noch besitzt sie 18 Spitzen, deren Aufsuchung dem geneigten Leser überlassen bleibe.

14.

Specialitäten der Ordnungscurve.

Eine bekannte Specialität ist die Cayley'sche Curve, eine andere, bisher nicht untersuchte Curve ist die Ordnungslinie J eines Inflexionssystems $[i_1, i_2]$. Derselben sind alle Dreiecke abc umschrieben, deren Ecken Involutionsgruppen dritter Ordnung in dem genannten System sind, für welche wir den kürzeren Ausdruck Inflexionstripel gebrauchen werden. Man kann ein solches Tripel abc dadurch erhalten, dass man die drei in einer Geraden liegenden Inflexionspunkte i_1, i_2, i_3, welche selbst eines bilden, aus irgend einem Punkte p_1 der C^3 auf die Curve projicirt. Heissen dann $p_2 p_3$ die Punkte, welche mit p_1 ein Tripel ausmachen, so hat man in (i_1, i_2, i_3), (p_1, p_2, p_3), (a, b, c) drei connexe Tripel (8), und die sechs letztgenannten Punkte liegen in einem Kegelschnitte. Sie sind die Ecken eines Steiner'schen Sechsecks, als dessen Fundamentalpunkte irgend zwei der genannten Wendepunkte genommen werden können. Für die Kegelschnitte aber, denen alle diese Sechsecke eingeschrieben sind, ist, wie man leicht sieht, der gemeinschaftliche Punkt der drei harmonischen Polaren von i_1, i_2, i_3 der Pol der Geraden $i_1 i_2 i_3$. Weiter erkennt man, dass diese Gerade von jenen Kegelschnitten in zwei festen Punkten x, y geschnitten wird:

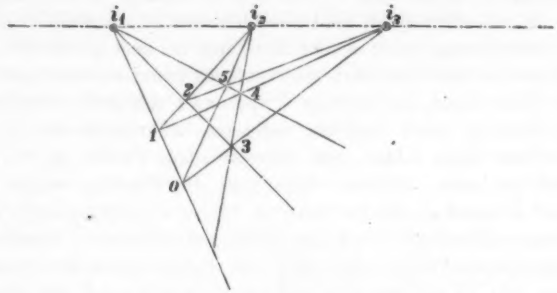
Sind nämlich j_1, j_2, j_3 die 3 Punkte, welche von jedem Wendepunkte i durch die beiden andern harmonisch getrennt werden, so dass i_1, j_1; i_2, j_2; i_3, j_3 drei Paare einer Involution bilden, so hat man in den Doppelpunkten dieser Involution x, y. Unter den Kegelschnitten, um die es sich hier handelt, befindet sich auch das Geradenpaar, welches die 2×3 übrigen Wendepunkte enthält. Wären daher i_1, i_2, i_3 reell, und somit x, y imaginär, so muss dieses Geradenpaar aus 2 imaginären Geraden bestehen. Bei einer C^3 mit einem Doppelpunkte δ sind δx, δy die Tangenten in δ, und zugleich berühren diese die fraglichen Kegelschnitte in x, y.

Nimmt man statt p_1 einen Wendepunkt i_4, so werden a, b, c drei neue Wendepunkte i_7, i_8, i_9, die in einer Geraden liegen. Dann kann man die beiden zu i_4 gehörigen Tripelpunkte finden, indem man i_7, i_8, i_9 aus i_1 auf die Curve projicirt; sie seien i_5, i_6. Hier sind nun die drei connexen Tripel auf drei Geraden vertheilt, von denen je zwei vollkommen bestimmt sind, wenn die dritte angenommen wird. Jede dieser Geraden ist eine dreifache Tangente der Curve J, die wie

im allgemeinen Fall 12ter Ordnung, sechster Classe ist; sie berührt die C^3 in 18 Punkten, welche eine eigenthümliche Lage haben:

Wir wissen bereits, dass sie zu je sechs auf drei Kegelschnitten sich befinden, und die Ecken Steiner'scher Sechsecke sind.

Betrachten wir aber genau das Sechseck 0 1 2 3 4 5 für die Fundamentalpunkte i_1, i_2, so bemerken wir, dass die Tangentialpunkte $0'\,1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ wieder dasselbe Sechseck bilden. Zunächst leuchtet ein, dass sowohl 0, 2, 4, als 1, 3, 5 ein Tripel darstellen, also muss der



Tangentialpunkt von 0 entweder 2, oder 4 sein (i); er sei 2. Dann ist nothwendigerweise 4 der Tangentialpunkt von 2, weil 0 es nicht ist, und einer der beiden 0, 4 es sein muss; aus demselben Grunde hat 4 den Tangentialpunkt 0. Weil ferner $i_1 0$, $i_1 2$ die C^3 in 1, 3 treffen, so ist 3 Tangentialpunkt von 1, ebenso 5 von 3, 1 von 5. Die Dreiecke 024, 135 sind demnach der C^3 zugleich ein- und umschrieben, und die Berührungspunkte ihrer Seiten fallen in die Ecken selbst. Ganz in derselben Weise sind diese Dreiecke der Curve J ein- und umschrieben.

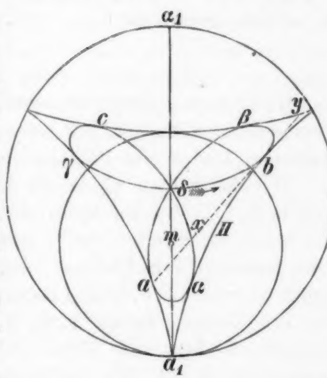
Hat C^3 einen conjugirten Punkt δ, so reducirt sich die Classe und Ordnung von J auf 4, respective 6; δ wird ein Doppelpunkt von J, und diese Curve hat hier dieselben (imaginären) Tangenten wie C^3, ihre drei anderen Doppelpunkte fallen je einer auf die harmonischen Polaren der (reellen) Wendepunkte i_1, i_2, i_3. Die Gerade $i_1 i_2 i_3$ ist für J eine dreifache Tangente. J berührt die C^3 in 6 Punkten 0, 1, 2, 3, 4, 5, welche in einem Kegelschnitt liegen, und ein Steiner'sches Sechseck für irgend ein Paar Wendepunkte, etwa i_1, i_2 bilden; die Dreiecke 024, 135 sind der C^3 zugleich ein- und umschrieben, und ausser ihnen giebt es keine derartige Dreiecke.

Eine interessante Anwendung kann man hiervon auf die berühmt gewordene Cykloide H mit 3 Spitzen machen. Ihre Polarfigur in Bezug auf den durch die Spitzen gehenden Kreis (δ) ist eine C^3, welche den Mittelpunkt δ dieses Kreises zum conjugirten Punkte, und hier die

Verbindungslinien des δ mit den unendlich fernen Kreispunkten zu Tangenten hat. Die Wendepunkte i_1, i_2, i_3 liegen auf der unendlich fernen Geraden, und sind die Pole der Rückkehrtangenten von H. Dieser C^3 entspricht also eine Ordnungscurve J für das System $[i_1, i_2]$, welche 4^{ter} Classe 6^{ter} Ordnung ist, die unendlich ferne Gerade zur dreifachen Tangente, den Punkt δ zum conjugirten Punkt, und hier die nämlichen Tangenten wie die C^3 hat. Sei jetzt J' die Polarfigur von J in Bezug auf den Kreis δ, so hat J' den Punkt δ zum dreifachen Punkte; ist 4^{ter} Ordnung 6^{ter} Classe, hat die unendlich ferne Gerade zur ideellen Doppeltangente, welche sie in den Kreispunkten berührt, sonst noch drei leicht aufzufindende Doppeltangenten. Durch Polarisation der für J geltenden Construction bekommt man:

Schneidet man irgend zwei Rückkehrtangenten der H mit einer anderen Tangente, und zieht von den Schnittpunkten aus an H die beiden noch möglichen Tangenten, so treffen sich diese auf J', etwa in t. (Benützt man in gleicher Weise die drei Rückkehrtangenten, so sind die drei Punkte t der J', welche man erhält, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.)

Von t aus lässt sich an H noch eine Tangente ziehen, diese und die Tangente der J' im Punkte t sind durch die beiden ersten Tangenten harmonisch getrennt. Die Curve J' ist endlich selbst eine Cykloide, für welche der Kreis (δ) Grundkreis und deren Wälzungskreis $\frac{2}{3}$ des Radius von (δ) hat. Lässt man die H, was möglich ist, durch denselben Wälzungskreis erzeugen, so erhält man beide Curven H, J' gleichzeitig beschrieben; nur muss dabei der beschreibende Punkt von J' in δ sich befinden, wenn der die H beschreibende Punkt a_1 auf dem Kreise (δ) liegt. Erwähnenswerth sind die metrischen Relationen:



Der Radius des Grundkreises (δ) sei $= 3$, der des rollenden Kreises (m) also $= 2$. Die Dreiecke abc, $\alpha\beta\gamma$, welche der H und J' zu gleicher Zeit ein- und umschrieben sind, haben ihre Seiten $= 3$; die Seite ab trifft die H noch in y, die J' in x, so dass $ax = by = 1$. Der Punkt x liegt auf dem mit $\delta m = 1$ um δ beschriebenen Kreise, und der Bogen mx beträgt $\frac{1}{18}$ des Kreisumfanges. Beschreibt man über $\delta\alpha_1 = 2$ als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser die J' in den Berührungspunkten einer Doppeltangente, welche von δ den Abstand $\frac{9}{8}$ hat; die beiden

andern Doppeltangenten der J' berühren sie in 4 Punkten, welche mit δ in einer Hyperbel liegen, die von dem eben genannten Kreise in ihrem Scheitel osculirt wird.

Zusatz. Von Interesse dürften nachstehende aus unseren allgemeinen Sätzen fliessenden Besonderheiten sein:

Auf der C^3, welche die Polarfigur von H ist, befinden sich die zur Gruppe i_1, i_2, i_3 connexen Tripel auf Kreisen, deren Mittelpunkt δ ist. Ein solcher Kreis hat zur Polarfigur einen mit ihm concentrischen Kreis, daher dieser mit H sechs gemeinschaftliche Tangenten besitzt, die zu je drei zwei gleichseitige Dreiecke bilden. Die Ecken dieser Dreiecke liegen auf J', die Fusspunkte ihrer Höhen, die sich in δ schneiden, auf einer der J' ähnlichen halb so grossen Cykloide J''. Man gelangt ferner zu dem synthetisch leicht zu beweisenden Satze:

„*Projicirt man die Ecken der einem Kreise K eingeschriebenen regulären Dreiecke abc rechtwinklig auf einen Durchmesser* $00'$ *dieses Kreises nach* a', b', c'; *zieht dann aus diesen Punkten zu* $0a, 0b, 0c$ *respective Parallelen, so liefern diese ein Dreiseit, das einer Cykloide H mit* 3 *Spitzen umschrieben, einer Cykloide J' mit einem dreifachen Punkte einbeschrieben ist. Die Höhenfusspunkte des Dreiseits liegen auf einer der J' ähnlichen Curve J''. Die reciproke Curve von J'' ist* C^3, *Polarfigur von H; die Reciproke von J ist die Fusspunktcurve jener mit J bezeichneten zu* $[i_1, i_2]$ *gehörigen Ordnungslinie für* C^3."

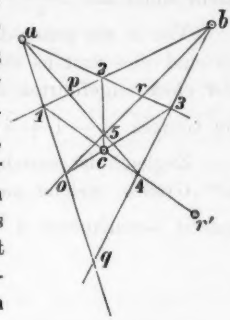
15.

Lehrsatz. *Projicirt man alle Involutionsgruppen* n^{ten} *Grades eines gegebenen Systems aus einem Punkte a der* C^3, *so bilden die projicirenden Linien eine Strahleninvolution* n^{ten} *Grades.*

Wir betrachten näher die Involutionsgruppen dritten Grades im System $[i_1, i_2]$ d. i. die Inflexionstripel: a gehört einem einzigen Tripel an, b sei ein zweiter Punkt desselben, dann kann man mittels a, b jedes beliebige Tripel bilden. Man wähle nämlich 0 beliebig als ersten Punkt eines Steiner'schen Sechsecks für die Fundamentalpunkte a, b; von den übrigen Ecken 1, 2, 3, 4, 5 gehören 2, 4 zu 0, während 1, 3, 5 ebenfalls ein Tripel bilden. Hierbei schneiden sich nach unseren Sätzen 03, 25, 14 in dem Punkte c, der mit a, b ein Tripel ausmacht. Lassen wir jetzt den Punkt 0 die C^3 durchlaufen, so ändern sich die drei Strahlen $a0$, $a2$, $a4$ dergestalt, dass sie alle auf C^3 denkbaren Tripel projiciren. Dabei bleibt c ein fester Punkt, aus welchem 0 nach 3, 2 nach 5, 4 nach 1 auf die C^3 projicirt sind.

Nach einem von uns in einem früheren Beitrage mitgetheilten Satze begegnen die Strahlen $b1$, $b3$, $b5$ respective der $a4$, $a0$, $a2$ auf einem gewissen Kegelschnitte K, und bestimmen dort drei Punkte p, q, r einer Involution des dritten Gerades: K geht, wie man so-

gleich sieht, durch die Berührungspunkte der 4 von c aus an die C^3 gezogenen Tangenten und berührt ca, cb in a, b. Zu seiner Construction bedarf es der C^3 nicht, es genügen hiezu die beiden Geraden $a0$, $b3$, welche sich in q auf K treffen. Dreht sich nämlich um c eine Gerade, welche aq in x, bq in y trifft, so schneiden sich ay, bx auf K etwa in z. Die Tangente des K in z findet sich so: Man bestimme auf xy den Punkt c', welcher von c durch x, y harmonisch getrennt ist, dann wird $c'z$ die verlangte Tangente sein. Benützt man zur Bestimmung erstens der Tangenten in p, q den Punkt r', der von c durch 1, 4 harmonisch getrennt ist, zweitens der Tangenten in q, r den Punkt p', der auf 03, von c durch 0, 3 harmonisch getrennt ist, drittens der Tangenten r, p den Punkt q' auf 25, der durch 2, 5 von c harmonisch getrennt ist; so erhält man ein Dreieck $p'q'r'$, dessen Seiten $q'r'$, $r'p'$, $p'q'$ den K in p, q, r berühren, und dessen Ecken auf den conischen Polaren von c in Bezug auf C^3 liegen. Hieraus folgt, dass das Dreieck pqr einem Kegelschnitt umschrieben ist, welcher als Polarfigur der conischen Polare von c für die Basis K sich darstellt.



Wir haben mithin den Beweis geliefert, dass p, q, r die Schnittpunkte der Strahlen $a0$, $a2$, $a4$ mit einem durch a gehenden Kegelschnitt K eine Punktinvolution 3^{ten} Grades auf diesem K bilden, und zu gleicher Zeit die entsprechende Involutionscurve nachgewiesen.

16.

Besitzt die C^3 einen Doppelpunkt δ, so sind auf ihr die Involutionen von einem höheren als dem 2^{ten} Grade nicht mehr reell, wohl aber dann, wenn δ ein conjugirter Punkt ist. Projicirt man in letzterem Falle die Involution n^{ten} Grades aus δ, so entsteht um δ eine Strahleninvolution, welche die beiden imaginären Doppelpunktstangenten zu $n$fachen Strahlen hat. Sind insbesondere diese Doppelpunktstangenten nach den unendlich fernen Kreispunkten gerichtet, so theilen die projicirenden Strahlen einer jeden Involution den Winkelraum um δ in $2n$ gleiche Theile. Hiernach sieht man auch das Gesetz ihrer Anordnung, falls die Doppelpunktstangenten eine andere als die angegebene Richtung haben.

17.

Zum Schlusse wollen wir die Frage erledigen, *welches die Enveloppe aller Verbindungslinien von je zwei Punkten einer und derselben Gruppe eines Involutionssystems n^{ten} Grades ist*?

Legen wir eine willkürliche Gruppe $a\,b\,c\,d\,e \ldots$ zu Grunde, so entstehen durch Combination eines ihrer Punkte a mit dén übrigen (nach dem Satze 7a) $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Systeme $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, d]$ u. s. w., und nur diese, welchen Anfangspunkt man auch statt a wählen mag.

Ist $a'\,b'\,c'\,d' \ldots$ eine andere Gruppe, so liefert diese die nämlichen Systeme, oder *die Verbindungslinie irgend zweier Punkte trägt ein Paar aus einem der genannten Systeme.* Die fragliche Enveloppe besteht somit aus $\frac{n-1}{2}$ Curven 6^{ter} Classe 12^{ter} Ordnung.

Von a aus gehen demnach an die Enveloppe $3(n-1)$ Tangenten; es sind dies erstens die Geraden ab, ac, ad, ..., zweitens für jedes der oben angeführten Systeme 4 Verbindungslinien gepaarter Punkte, im Ganzen $n - 1 + 4\,\frac{n-1}{2} = 3(n-1)$ Tangenten.

Zugleich ist ersichtlich, dass die Doppelstrahlen der Involution n^{ten} Grades, welche aus a das gegebene System projicirt, eben die zuletzt bezeichneten $4\,\frac{n-1}{2}$ Tangenten der Enveloppe sind.

Nachtrag.

I.

Eindeutige Transformation einer C^3 in sich.

Herr Em. Weyr hat neuerdings bemerkt, dass in einem System gepaarter Punkte $[a, b]$ (v. Nr. 4) die allgemeine nicht centrische Transformation der C^3 in sich vorliegt: Weist man nämlich $b = a'$ dem Punkte a zu, sodann jedem Punkte x denjenigen x', der mit a und dem Schnittpunkte von xa' mit C^3 in einer Geraden liegt, so erhält man diese Transformation. Ausser ihr existirt nur noch die centrisch involutorische, bei welcher die sich entsprechenden Punkte auf den Strahlen eines Büschels liegen, dessen Centrum 0 auf C^3 beliebig ist.

Wir haben unter Nr. 4 gezeigt, dass die nichtcentrische Transformation dann und nur dann involutorisch ist, wenn a, a' den nämlichen Tangentialpunkt haben; wir werden jetzt angeben, welchen Charakter die Transformation hat, bei welcher 3 Punkte a, b, c einer bestimmten Geraden ihre entsprechenden a', b', c' wieder auf einer Geraden haben.

Zunächst ist klar, dass dies bei einer centrischen Transformation dann und nur dann eintritt, wenn das Centrum ein Wendepunkt ist. Was die nicht centrische Transformation angeht, so sei i ein Wendepunkt. Um den entsprechenden Punkt i' zu finden, schneide man die Curve mit ia', ib', ic' in α, β, γ, die in einer Geraden liegen wer-

den; dann müssen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ durch i' gehen. Daraus folgt, dass auch i' ein Wendepunkt ist, und liegen nunmehr die entsprechenden von *irgend* 3 in gerader Linie befindlichen Punkte wieder in einer Geraden, also: bei einer linearen Transformation der C^3 in sich entspricht entweder ein Wendepunkt sich selbst, wobei er das Centrum der Transformation wird, oder zwei Wendepunkte entsprechen einander, und bei einer andern eindeutigen Transformation fallen die Punkte, welche den einer Geraden angehörigen entsprechen, nicht auf eine Gerade.

Ein brauchbares Beispiel einer eindeutigen Transformation ist dieses: Auf C^3 seien drei feste Punkte a, b, c und ein variabler d angenommen und es werde dem d der Gegenpunkt d' von $abcd$ zugewiesen. Wenn hier abc zu den Grundpunkten eines Büschels von Curven C^3 gehören, so hat man in der Ebene eine Cremona'sche Transformation, bei welcher, wie leicht zu sehen, einer Geraden eine Curve 10ter Ordnung entspricht die in a, b, c 5-fache Punkte, in den andern 6 Grundpunkten des Büschels Doppelpunkte hat.

II.

Zusammenhang zwischen den einer C^3 ein- und umbeschriebenen m-Ecken P_m und gewissen Steiner'schen Polygonen $\mathfrak{P}_{2n}$.

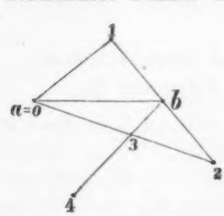
Unter P_m ist ein m-Eck zu verstehen, in welchem jede Ecke a die nächstfolgende b zum Tangentialpunkte hat, das mit P_m in inniger Beziehung stehende $\mathfrak{P}_{2n}$ werden wir als ein Steiner'sches Kernpolygon (von $2n$ Seiten und n-Ecken) erkennen, für welches eine Ecke a des P_m und sein 2ter Tangentialpunkt b' Fundamentalpunkte sind. Wäre beispielsweise das Dreieck abb' ein P_3, d. h. a der Tangentialpunkt von b', so gewahrt man, dass bei Annahme von a, b' als Fundamentalpunkten und indem man die Ecke 0 in a legt ein $\mathfrak{P}_6$ resultirt, dessen Ecken 0, 3 in a, 1, 2 in b, 4, 5 in b' zusammenfallen. Hieraus folgt dann, dass abb' ein $\mathfrak{P}_6$ ist, dessen Existenz und Lage auf C^3 wir (Nr. 14) nachgewiesen haben. Es ist selbstverständlich, dass ein P_m keinen Wendepunkt zur Ecke haben kann.

a) Lehrsatz. *Wenn a', b' Fundamentalpunkte eines Steiner'schen Polygons sind, so sind auch irgend 2 Punkte a, b, welche in a', b' ihre Tangentialpunkte haben, Fundamentalpunkte. Hiebei ist aber die Seitenzahl beider Polygone nicht nothwendig die nämliche.*

Beweis. $0'\,1'\,2'\,3' \ldots 2n' = 0'$ sei ein Polygon zu den Fundamentalpunkten a', b', dabei $0'$ so gewählt, dass von diesem Punkte eine reelle Tangente an C^3 möglich ist; diese berühre in 0. Bildet man nun mit Benutzung von a, b als Fundamentalpunkten die Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$, so hat diese ihre Tangentialpunkte in $0', 1', 2', 3', \ldots, 2n'$.

Daher fällt $2n$ entweder auf 0, oder $2n$ ist der Berührungspunkt 0_1 einer andern von $0'$ an C^3 gehenden Tangente. Im letzten Falle bilde man wie oben die Reihe $0_1\, 1_1\, 2_1 \ldots 2n_1$, dann wird $2n_1$ entweder auf 0 oder 0_1 oder auf den Berührungspunkt 0_2 einer dritten von $0'$ an die Curve gezogenen Tangente fallen. Trifft letzteres ein, so bilde man wieder $0_2\, 1_2\, 2_2 \ldots 2n_2$, so wird $2n_2$ entweder mit einem der Punkte $0, 0_1, 0_2$ oder mit dem Berührungspunkte 0_3 der einzigen noch möglichen Tangente von $0'$ an C^3 coincidiren. Die Reihe $0_3\, 1_3\, 2_3 \ldots 2n_3$ hat jetzt nothwendig ihren Endpunkt $2n_3$ in einem der 4 Punkte $0, 0_1, 0_2, 0_3$, folglich resultirt stets ein geschlossenes Polygon. Die Umkehr dieses Satzes wurde Nr. 2b gegeben.

b) Benutzt man zwei Punkte a, b, welche *nicht* Fundamentalpunkte sind, wie zwei solche, und bildet die Reihe $0, 1, 2, \ldots$ in inf. wobei der Nullpunkt a ist, so ergeben sich (nach Nr. 5) unendlich viele unter einander verschiedene Systeme $[0,2], [0,4], [0,6], \ldots, [0,\nu]$, von denen das erste mit $[a, b]$ identisch ist: $[a, b] \equiv [0, 2]$. Die Tangentialpunkte der Reihe $0, 2, 4, \ldots, \nu$ sind mit ungeraden Zahlen bezeichnete Punkte und zwar der Reihe nach $1, 5, 9, \ldots, 2\nu + 1$.



Weil nämlich die Gerade $(0, \nu + 1)$ durch ν geht, so thut dies auch nach Nr. 2 die Gerade $(\nu, 2\nu + 1)$, folglich ist $2\nu + 1$ Tangentialpunkt von ν. Verfährt man jetzt für die Tangentialpunkte von a, b die a', b' sein mögen, ebenso wie für a, b geschehen, so erhält man eine Reihe $0', 1', 2', \ldots, \nu'$, die aus den Tangentialpunkten der ersten Reihe besteht, d. h. die Punkte $0', 2'\, 4', \ldots, \nu'$ coincidiren mit $1 = a', 5, 9, \ldots \ldots 2\nu + 1$. Weil nun die Geraden $(0, 4)$ durch 5, $(0, 8)$ durch 9, $(0, 2\nu)$ durch $2\nu + 1$ gehen, so hat man durch Projection der Punktepaare $0, 4$; $0, 8$; $0, 2\nu + 1$ aus θ auf die Curve:

$$[0', 2'] \equiv [0, 4], \quad [0', 4'] \equiv [0, 8], \quad [0', \nu'] \equiv [0, 2\nu + 1].$$

Sind $a''\, b''$ die Tangentialpunkte von $a'\, b'$, und liefern sie die Reihe $0'', 1'', 2'', \ldots, \nu''$, so bekommt man

$$[0'', 2''] \equiv [0', 4'] \equiv [0, 2^3] \text{ u. s. w.}$$

Für $a'''\, b'''$ ergiebt sich:

$$[0''', 2'''] \equiv [0'', 4''] \equiv [0', 8'] \equiv [0, 2^4]$$

u. s. f.

Da aber

$$[a, b] \equiv [0, 2[, \quad [a', b'] \equiv [0', 2'], \quad [a'', b''] \equiv [0'', 2''],$$

so hat man:

$$[a', b'] \equiv [0, 2^2], \quad [a'', b''] \equiv [0, 2^3], \quad [a''', b'''] \equiv [0, 2^4] \text{ u. s. w.}$$

Erstens: Wenn, wie vorausgesetzt, a, b nicht Fundamentalpunkte sind, so können es nach unserm Satze auch $a^{(x)} b^{(x)}$ nicht sein, und alle Systeme $[a^{(x)}, b^{(x)}]$ sind von einander verschieden.

Zweitens: Sind dagegen a, b Fundamentalpunkte eines $2n$-Seits, so sind es auch die Tangentialpunkte $a^{(x)} b^{(x)}$ von irgend einem Grade x. Für gewisse Werthe von x, y wird sein

$$[0, 2^x] \equiv [0, 2] \quad \text{und} \quad [0, \;{}^{y}] \equiv [0, 2n-2],$$

nämlich für diejenigen Werthe x, y, welche den Congruenzen

$$2^x \equiv 2 \text{ (mod. } 2n), \quad 2^y \equiv -2 \text{ (mod. } 2n)$$

genügen. Ergiebt sich x_1 als kleinster Werth, der irgend einer dieser Congruenzen genügt, so ist das System $[a^{x_1-1}, b^{x_1-1}]$ mit $[a, b]$ identisch, während alle ihm voraufgehenden Systeme von Tangentialpunktenpaaren unter sich und von $[a, b]$ verschieden sind. Wegen der 2ten Congruenz verweisen wir auf Nr. 5, wo hervorgehoben wurde, dass b die Nummer $2n - 2$ erhält, d. i. $[a, b] \equiv [0, 2n - 2]$.

Drittens: Aus dem Gesagten erhellt, dass wenn man von einem Punkte 0 der C^3 ausgehend seinen Tangentialpunkt 1 bestimmt, von diesem wieder, u. s. f., man eine unendliche Reihe bekommt, welche sich nie schliesst, wenn nicht 0, 1 Fundamentalpunkte eines Steiner'schen Polygons sind. Wenn die Reihe sich schliesst, so müssen demnach 0, 1 Fundamentalpunkte sein. Wir zeigen jetzt, dass auch umgekehrt, wenn 0, 1 Fundamentalpunkte sind, die Reihe der Tangentialpunkte sich schliesst.

c) Wenn b der Tangentialpunkt von a ist und a, b ein Steiner'sches $2n$-Seit (n ungerade) zulassen, und man bildet die Reihe $a, b, b', b'' \dots$ in der jeder Punkt Tangentialpunkt des vorangehenden ist, so kommt man in ihr auf den Anfangspunkt a zurück.

Beweis. Da a, b' mittels des Punktes b aus a, b abgeleitet sind, so ist

$$[a, b] \equiv [a, b].$$

Bildet man das Kernpolygon $\mathfrak{P}_{2n}$ für die Fundamentalpunkte a, b' d. h. wählt man a zum Nullpunkte, so erkennt man, dass dies eins der früher betrachteten Polygone ist, in welchem auf jede paare Ecke eine unpaare fällt. Die n differenten Ecken, wo dies stattfindet, haben also die Eigenschaft, dass ihre Tangentialpunkte in einer andern Ordnung wieder die nämlichen Punkte sind.

Die Reihe $a\, b\, b'\, b'' \dots$ enthält somit nur Eckpunkte des Kernpolygons, und es muss ein schon dagewesener Punkt wiederkehren. Wäre der zuerst wiederkehrende Punkt einer der b, so würde er Tangentialpunkt für zwei verschiedene Ecken des Kernpolygons sein, was bei ungeradem n gemäss Nr. 6 nicht angeht; daher kommt zuerst a wieder. Es entsteht ein Polygon P_m; die Anzahl m seiner Ecken muss

ein Vielfaches der Zahl x sein, welche angiebt, wie viel *verschiedene* Systeme sich unter den $[a, b]$, $[b, b']$, $[b', b'']$ finden. Diese Anzahl ist aber nach b) die kleinste Lösung der Congruenz

$$2^x \equiv \pm 1 \text{ (mod. } n).$$

Aus der Construction von $\mathfrak{P}_{2n}$ erhellt, dass jede der n Ecken eine paare und unpaare Nummer hat, und zwar wird, wenn ν eine gerade Zahl $< 2n$ bezeichnet, die Ecke ν auch die unpaare Nummer $2n+3-\nu$ bekommen. Aber es kann dieselbe Ecke durch jede positive oder negative Zahl bezeichnet werden, welche von ν um ein Vielfaches von $2n$ verschieden ist, die zugehörige unpaare Nummer λ hat nur der Bedingung $\nu + \lambda \equiv 3 \text{ mod. } 2n$ zu genügen. Nach dieser Bemerkung ist es leicht, eine Formel für die Nummer des μ^{ten} Tangentialpunktes von a aufzustellen.

Der erste Tangentialpunkt von a hat, wie man sieht, die paare Nummer $+2$, mithin der 2^{te}, $2 \cdot 2 + 1$ oder $3 - (2 \cdot 2 + 1)$ d. i. $2 - 2^2$. Die unpaare Nummer des 3^{ten} ist $2(2 - 2^2) + 1$, folglich seine paare Nummer: $3 - 2(2 - 2^2) - 1 = 2 - 2^2 - 2^3$. Der μ^{te} hat somit die paare Nummer:

$$-2\,\frac{(-2)^\mu - 1}{3}.$$

Ist m der kleinste Exponent, bei welchem $(-2)^m - 1$ durch $3 \cdot n$ theilbar ist, so hat die Reihe $a\,b\,b'\,b'' \ldots m$ Glieder, und dieser Exponent giebt die Eckenzahl von P_m an. Sie liegen alle in den Ecken von $\mathfrak{P}_{2n}$.

Ehe wir die etwas entwickelte Frage beantworten, unter welchen Umständen das sich ergebende P_m alle Ecken des $\mathfrak{P}_{2n}$ hat, wollen wir von einem P_m ausgehen, und das zugehörige $\mathfrak{P}_{2n}$ ermitteln.

d) Seien $a\,b\,b'$ drei aufeinanderfolgende Ecken von P_m; a, b' sind, wie gezeigt wurde, Fundamentalpunkte eines $\mathfrak{P}_{2x}$, unter dessen n-Ecken sich die sämmtlichen des P_m befinden. Mithin muss $\frac{(-2)^m - 1}{3}$ durch x theilbar sein und m ist der kleinste Exponent, für den dies stattfindet. Folglich ist die Zahl x unter den Factoren von $\frac{(-2)^m - 1}{3}$; und jeder Factor f dieser Zahl, zu welchem m als kleinster Exponent gehört, liefert ein $\mathfrak{P}_{2f}$, in welchem irgend ein P_m liegt. Jedoch lässt sich nicht entscheiden, welcher dieser Factoren (wenn es mehr als einen solchen giebt) für das eben vorliegende P_m zu nehmen ist. Immerhin kann man sagen, dass zu den Fundamentalpunkten a, b' ein $\mathfrak{P}_{2 \cdot \frac{(-2)^m - 1}{3}}$ gehört, wenn man hinzufügt, dass dieses Polygon auch aus einigen sich überdeckenden $\mathfrak{P}_{2f}$ bestehen kann. Es entsteht nun die Frage, ob, wenn man drei andere consecutive Ecken von P_m statt $a\,b\,b'$, etwa $\alpha\,\beta\,\beta'$ nimmt, ein Kernpolygon von derselben Seitenzahl sich er-

giebt, oder nicht? Sei α der μ^{te} Tangentialpunkt von a, denn haben wir nach der Entwicklung unter b):

$$[\alpha, \beta] \equiv [0, 2^{\mu+1}],$$

worunter $2^{\mu+1}$ die mit dieser Nummer versehene Ecke in dem zu a, b' gehörigen Kernpolygon $\mathfrak{P}_{2x}$ zu verstehen ist. Weil $2^{\mu+1}$ relativ prim zu x ist, so folgt nach Nr. 9, dass $0, 2^{\mu+1}$ Fundamentalpunkte eines $\mathfrak{P}_{2x}$ sind, ein Gleiches gilt somit von α, β; ebenso von a, β'. Ferner sieht man, dass das zu α, β' gehörige $\mathfrak{P}'_{2x}$ keine andern Ecken hat, als das zu a, b' gehörige $\mathfrak{P}_{2x}$.

e) *Wenn kann ein aus einem gegebenen $\mathfrak{P}_{2n}$ abgeleitetes P_n existiren?* Wir heben die an sich bemerkenswerthen Fälle hervor, wo ein P_n nicht auftritt; wo das abgeleitete P_m weniger als n Ecken hat.

Lehrsatz. *Wenn n von der Form $6k \pm 1$ ist, so kommt unter den Ecken von $\mathfrak{P}_{2n}$ ein Wendepunkt vor, und nur in diesem Falle.*

Beweis. Die n Ecken des $\mathfrak{P}_{2n}$ seien mit den Zahlen $< 2n$ bezeichnet, ν sei eine gerade Zahl $< n$. Der Tangentialpunkt von ν hat die unpaare Nummer $2\nu + 1$, also die paare

$$2n + 3 - (2\nu + 1) = 2n - 2\nu + 2;$$

dies wird $= \nu$, wenn:

$$\nu = \frac{2}{3}(n + 1).$$

Im Falle $n = 6k - 1$ ist somit die Ecke $4k$ ein Wendepunkt. Setzen wir $\nu > n$ voraus, so wird der Tangentialpunkt $2\nu + 1 - 2n$ sein, weil $2\nu + 1 > 2n$, seine paare Nummer ist:

$$2n + 3 - (2\nu + 1 - 2n) = 4n - 2\nu + 2,$$

und dies wird ν für:

$$\nu = \frac{2}{3}(2n + 1).$$

Im Falle $n = 6k + 1$ ist mithin die Ecke $2(4k + 1)$ ein Wendepunkt.

Ist n nicht durch 3 theilbar, so kann das abgeleitete P_m nicht alle n Ecken von $\mathfrak{P}_{2n}$ haben, oder $m < n$.

f) Lehrsatz. *Ist $n = 3^\alpha$, so enthält P_m alle Ecken des $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$, d. i.: $m = 3^\alpha$.*

Beweis. 2 ist wie leicht zu zeigen, primitive Wurzel jeder Potenz von 3; folglich ist $2 . 3^\alpha$ der kleinste Werth von x, für den $2^x - 1$ durch $3 . 3^\alpha$ aufgeht. Und hieraus folgt, dass 3^α der kleinste Exponent ist, für welchen $(-2)^{3^\alpha} - 1$ durch $3 . 3^\alpha$ theilbar wird. Es ist also $m = 3^\alpha$.

g) Lehrsatz. *Ist $n = 3^\alpha \cdot p$, und $p = 6k \pm 1$ ($k > 0$), so enthält $\mathfrak{P}_{2n}$ alle Ecken mindestens eines P_{3^α}, während P_m keine dieser Ecken besitzt.*

Beweis. μ, μ' seien die paaren Nummern einer Ecke μ von $\mathfrak{P}_{2n}$ und ihres Tangentialpunktes. Auf die Gerade $(0, \mu)$ fällt noch die

Ecke $\mu + 1$; alsdann liegt auf der Geraden $(\mu + 1, \mu')$ noch eine paare Ecke ν, gemäss Nr. 6 b bestimmt durch

$$\nu = \mu + 1 - \mu' - 1 = \mu - \mu'.$$

Da aber

$$\mu' \equiv 3 - (2\mu + 1) \equiv 2 - 2\mu \pmod{2n},$$

so folgt,

$$\mu - \mu' \equiv 3\mu - 2 \pmod{2n}.$$

Demnach enthält $\mu - \mu'$ den Factor 3 nicht. Weil ferner die Punkte $0, \nu$ aus dem Punkte $\mu + 1$ sich nach μ, μ' projiciren, so sind μ, μ' Fundamentalpunkte eines Steiner'schen Polygons, das mit dem zu $0, \nu$ gehörigen einerlei Seitenzahl hat. Wäre ν durch p theilbar, wo dann p grösster Theiler von ν, n wäre, so müsste nach Nr. 9 dieses Polygon die Seitenzahl $2 \cdot 3^\alpha$ haben.

Setzen wir daher

$$\mu - \mu' \equiv 3\mu - 2 \equiv 2p,$$

so ergiebt sich

$$\mu = \frac{2}{3}(p + 1),$$

wodurch μ bestimmt ist, falls $p = 6k - 1$.

Bei $p = 6k + 1$ setze man:

$$3\mu - 2 = 4p; \quad \mu = \frac{2}{3}(2p + 1).$$

Unter allen Umständen lässt sich somit eine Ecke μ auffinden, die mit ihrem Tangentialpunkte zu einem Steiner'schen Polygon von $2 \cdot 3^\alpha$ gehört. Gleiches gilt dann für μ und μ'' dem Tangentialpunkte von μ', weil diese Punkte die Projectionen von $\mu\mu'$, aus μ' darstellen. Das zu μ, μ'' gehörige Kernpolygon $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$ liefert nach f) ein P_{3^α} mit der Anfangsecke μ, und dessen fernere Ecken sämmtlich Ecken von $\mathfrak{P}_{2n}$ sind.

Nun ist es nicht möglich, dass die eben bestimmte Ecke μ von $\mathfrak{P}_{2n}$ dem aus $\mathfrak{P}_{2n}$ ableitbaren P_m angehört. Denn wäre μ etwa der μ^{te} Tangentialpunkt von a, oder

$$\mu = -2\,\frac{(-2)^\mu - 1}{3},$$

so folgt:

$$\mu - \mu' \equiv (-2)^{\mu+1},$$

(was übrigens auch aus der unter b) abgeleiteten Formel

$$[\mu, \mu'] \equiv [0, 2^{\mu+1}]$$

hervorgeht).

Unter dieser Voraussetzung kann $\mu - \mu'$ den Factor p nicht enthalten. Wenn hiernach die nach der Formel $3\mu - 2 = 2p$ oder $3\mu - 2 = 4p$ bestimmte Ecke μ nicht unter den Ecken von P_m vorkommt, so kann unter diesen auch keine andere Ecke des von μ ausgehenden P_{3^α} sein. Hier ist wieder

$$m < n.$$

Aus dem Vorstehenden ist zu ersehen, dass, wenn man von einem P_m ausgehend findet, dass in dem zugehörigen P_{2n} n von 3^α verschieden ist, auch $n > m$ sein muss; und dass nur, wenn $n = 3^\alpha$, alle Ecken beider Polygone zusammenfallen; d. h. dass dann immer $m = 3^\alpha$. Somit muss, damit dies überhaupt eintreten könne, $m = 3^\alpha$ sein. Man darf indess nicht schliessen, dass, wenn $m = 3^\alpha$ angenommen wird, nun auch $n = 3^\alpha$ resultiren *müsse*. Es bestehen z. B. die 19 Ecken eines $\mathfrak{P}_{38}$ aus einem Wendepunkte und den Ecken zweier P_9; würde man von einem dieser P_9 ausgehen, so fände man als zugehöriges $\mathfrak{P}_{2n}$ ein $\mathfrak{P}_{2.19}$, und nicht ein $\mathfrak{P}_{2.9}$.

h) Lehrsatz. Ein Polygon P_{3^α}, welches die sämmtlichen Ecken des zugehörigen $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$ hat, besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass seine Ecken sich zu je 3 im $3^{\alpha-1}$ Inflexionstripel gruppiren, von denen jedes aus den Tangentialpunkten eines andern besteht.

Beweis. Um ein solches P_{3^α} zu erhalten, seien a, b Fundamentalpunkte eines Steiner'schen Polygons von $2 \,.\, 3^\alpha$ Seiten, und zwar b Tangentialpunkt von a, (berechtigt ist diese Annahme nach Nr. 13, h), b' sei Tangentialpunkt von b, daher gehört zu a, b' als Fundamentalpunkten ein Kernpolygon $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$, und die Polygone P_{3^α}, $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$ haben die nämlichen 3^α-Ecken $a\,b\,b'\,b''$ u. s. f.

Werden die Ecken des $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$ durch Zahlen $< 2 \,.\, 3^\alpha$ bezeichnet, so dass also a die Nummern 0 und 3, b die 1 und 2, b' die $2n-2$ und 5, b'' $2n-3$ und 6 u. s. w. hat, so wird jede gerade Zahl $\nu < 2 \,.\, 3^\alpha$ eine Ecke markiren, welche auch $2 \,.\, 3^\alpha + 3 - \nu$ heisst.

Weil 2 primitive Wurzel von 3^α ist, so ergiebt sich wie oben, dass $3^{\alpha-1}$ der kleinste Werth von x ist, der

$$2^x \pm 1 \equiv 0 \;(\mathrm{mod.}\; 3^\alpha)$$

genügt, nämlich es wird

$$2^{3^{\alpha-1}} \equiv -1 \;(\mathrm{mod.}\; 3^\alpha).$$

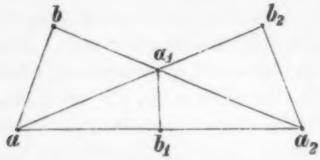
Heisst a_1 die Ecke, welche der $3^{\alpha-1}$te Tangentialpunkt von a ist, b_1 ihr Tangentialpunkt, so hat man nach c):

$$[a_1, b_1] \equiv [a, b].$$

während alle vorangehenden Systeme von Punkt und Tangentialpunkt von einander und von $[a, b]$ verschieden sind.

Demzufolge müssen sich entweder die Geraden $a\,a_1$, $b\,b_1$, oder aber $a\,b_1$, $a_1\,b$ auf C^3 schneiden und es wird dieser Schnittpunkt eine Ecke von $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$ sein (Nr. 6). Die erstgenannten Geraden können sich nicht auf C^3 schneiden, denn dann müsste ihr Schnittpunkt ein Wendepunkt sein, und ein solcher kommt unter den Ecken von $\mathfrak{P}_{2.3^\alpha}$ nicht vor (e). Mithin treffen $a\,b_1$, $a_1\,b$ in einer Ecke etwa a_2 zusammen.

Nimmt man jetzt b, b_1 als Fundamentalpunkte an und wählt a zum Nullpunkte, so fällt 1 in a; 2 in a_2; 3 in a_1; 4 ebenfalls in a_1; 5 in a_2; 6 in $a = 0$.; d. h. die Punkte $a\ a_1\ a_2$ repräsentiren die 6 Ecken eines Steiner'schen Sechsseits. Mithin ist $a\ a_1\ a_2$ ein Inflexionstripel und es liegen die Tangentialpunkte von $a\ a_1\ a_2$ auf den Seiten des Dreiecks $a\ a_1\ a_2$. Wenn daher b_2 die noch auf $a\,a_1$ liegende Ecke von $\mathfrak{P}_{2\,3^\alpha}$ heisst, so muss b_2 Tangentialpunkt von a_2 sein.



Wir sehen weiter, dass

$$[a_2,\ b_2] \equiv [a_1,\ b_1] \equiv [a,\ b].$$

Nach c) können unter den Systemen, in welchen jede Ecke mit ihrem Tangentialpunkt gepaart auftritt, nur 2 vorkommen, welche identisch mit $[a, b]$ sind; das eine enthält den $3^{\alpha-1}$ten und $(3^{\alpha-1}+1)$ten Tangentialpunkt von a, das zweite den $2\ .\ 3^{\alpha-1}$ten und $(2\ .\ 3^{\alpha-1}+1)$tenTangentialpunkt von a. Der mit a_2 bezeichnete Punkt muss hiernach der $2\,.\,3^{\alpha-1}$te Tangentialpunkt von a sein.

Die Verknüpfung der 4 Systeme besteht darin, dass $a a_1 a_2$, $b b_1 b_2$ Inflexionstripel, und dass alle 6 Punkte Ecken eines Steiner'schen 6-Ecks, für welches die Fundamentalpunkte $a\,a_1$, sind, und a_2 Nullpunkt.

Geht man von der Gruppe $a\,a_1\,a_2$ aus, nimmt von diesen die Tangentialpunkte, von dieser wieder u. s. f., so bildet man so lange immer neue Tripel, als nicht einer der aus a abgeleiteten Tangentialpunkte in die ursprüngliche Gruppe $a\,a_1\,a_2$ fällt, von da ab aber, wo dies zum erstenmale geschieht, kehren die erhaltenen Tripel in derselben Ordnung wieder. In der Reihe der consecutiven Tangentialpunkte von a stellt sich zuerst a_1 der $3^{\alpha-1}$te ein, folglich entstehen $3^{\alpha-1}$ verschiedene Tripel, auf welche sämmtliche 3^α Ecken von P_{3^α} vertheilt sind.

Es ist nicht ohne Interesse, die Zahlen $< 2\ .\ 3^\alpha$ zu bestimmen, welche den Ecken $a_1\ b_1\ a_2\ b_2$ zukommen.

Die Formel, welche bis auf ein Vielfaches von $2\ .\ 3^\alpha$ die paare Nummer von a_1 giebt, ist nach Früherem:

$$-2\,\frac{(-2)^{3^{\alpha-1}}-1}{3} = 2\,\frac{2^{3^{\alpha-1}}+1}{3}.$$

Ferner ist

$$2^{3^{\alpha-1}} + 1 = q\ .\ 3^\alpha,$$

wo q eine ganze Zahl, und wie leicht zu zeigen von der Form $3k + 1$ ist.

Somit ist

$$2^{3^{\alpha-1}} + 1 = k\,.\,3^{\alpha} + 3^{\alpha-1}$$

und folglich:

$$2\,\frac{2^{3^{\alpha-1}}+1}{3} \equiv 2\,.\,3^{\alpha-1}\;(\mathrm{mod.}\,2.3^{\alpha}).$$

Die paare Nummer von a_1 ist hiernach $2.3^{\alpha-1} = a_1$ u. $4.3^{\alpha-1}+1 = b_1$. a_2 erhält als Schnittpunkt der Geraden $(a, 4.3^{\alpha-1}+1)$ mit C^3 die Nummer

$$4\,.\,3^{\alpha-1} = 2\,a_1 = a_2.$$

Als paare Nummern von b_1, b_2 findet man sofort

$$b_1 = a_1 + 2,\quad b_2 = 2\,a_1 + 2.$$

i) Die Polygone P_{3^α}, welche dieselben Ecken wie das zugehörige $\mathfrak{P}_{2n}$ haben, besitzen in Folge hiervon alle Eigenschaften der in Nr. 2c und Nr. 6 behandelten Polygone, z. B. die, dass auf der Verbindungslinie zweier Ecken noch eine dritte liegt. Umgekehrt, wenn ein P_m vorliegt der Art, dass auf die Geraden, welche eine Ecke a mit allen andern verbinden, stets eine neue Ecke fällt, so muss m eine Potenz von 3 sein, und P_{3^α} gehört nothwendig in die Kategorie der speciellen P_{3^α}. Denn was für die durch a nach den Ecken gehenden Geraden gilt, muss auch für die vom Tangentialpunkte von a nach diesen Ecken gehenden Geraden stattfinden. Dann aber sind a, b Fundamentalpunkte eines Steiner'schen Polygons von $2m$ Seiten, dessen Ecken die doppelt gezählten Ecken von P_m werden; und a ist mit dem Tangentialpunkte b' von b Fundamentalpunkt eines Kernpolygons $\mathfrak{P}_{2m}$, dessen m Ecken mit denen von P_m coincidiren, also $m = 3^\alpha$*).

Prag, im December 1883

*) In Ergänzung der auf pag. 1 gegebenen Bemerkung sei hier noch auf eine neuere Mittheilung von Hrn. Schoute verwiesen, in welcher derselbe die Resultate des Hrn. Küpper von seinem Standpunkte aus erläutert (Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 95, pag. 317 ff.).

[Mai 1884]. D. Red.

Ueber Multiplication bedingt convergenter Reihen.

Von

A. Voss in Dresden.

Im XXI. Bande dieser Annalen hat Herr Pringsheim eine Reihe von Untersuchungen über die Anwendungen der Cauchy'schen Multiplicationsregel auf bedingt convergente Reihen angestellt. Insbesondere wird p. 340 u. ff. ausführlicher der Fall erörtert, wo die eine Reihe Σu_i in der Form:

$$\frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \sum_0^\infty (u_i + u_{i+1})$$

unbedingt convergirt, indem die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Anwendung der Cauchy'schen Regel ermittelt, und zugleich hinreichende Criterien von genügend allgemeinem Charakter für das Erfülltsein dieser Bedingungen aufgestellt werden.

Es ist aber leicht, zu zeigen, dass auch der allgemeinere Fall, wo die Reihe:

$$A = \sum_0^\infty a_i$$

in der Form

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + \cdots$$

unbedingt convergirt, welcher den Ausgangspunkt bei Hrn. Pringsheim bildet, eine ähnliche Behandlung gestattet.

Die beiden Reihen

$$A = \sum_0^\infty a_i,$$

$$B = \sum_0^\infty b_i$$

seien bedingt convergent, so dass, wenn man mit G eine endliche (positive) Zahl, mit δ eine beliebig kleine bezeichnet, die Bedingungen

$$\left|\sum_0^m a_i\right| < G, \quad \left|\sum_{m+1}^n a_i\right| < \delta,$$
$$\left|\sum_0^m b_i\right| < G, \quad \left|\sum_{m+1}^n b_i\right| < \delta$$

für ein genügend grosses m und alle grösseren erfüllt sind; ferner möge die Reihe

$$\sum_0^\infty | a_{2i} + a_{2i+1} |$$

convergiren. Nach der Cauchy'schen Regel werde nun die neue Reihe:

$$C = \sum_0^\infty u_i$$

gebildet, wo

$$u_m = \sum_0^m a_h b_{m-h}.$$

Bezeichnet man mit C_{2n}, A_n, B_n die Summen der Terme der entsprechenden Reihen bis zu den betreffenden Indices, so ist

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad C_{2n} - A_n B_n = \{ & a_0(b_{2n} + b_{2n-1} + \cdots + b_{n+1}) \\
& a_1(b_{2n-1} \qquad\quad + \cdots + b_{n+1}) \\
& \cdots \\
& \cdots \\
& a_{n-1}(b_{n+1})\} \\
+ \{ & b_0(a_{2n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n+1}) \\
& b_1(a_{2n-1} \qquad\quad + \cdots + a_{n+1}) \\
& \cdots \\
& \cdots \\
& b_{n-1}(a_{n+1})\}.
\end{aligned}
$$

Den ersten Theil des Ausdruckes rechts in (1) schreibe man in der Form:

$$
\begin{aligned}
& (a_0 + a_1)(b_{2n-1} + \cdots + b_{n+1}) + a_0 b_{2n} \\
+ & (a_2 + a_3)(b_{2n-3} + \cdots + b_{n+1}) + a_2 b_{2n-2} \\
+ & (a_4 + a_5)(b_{2n-5} + \cdots + b_{n+1}) + a_4 b_{2n-4} \\
+ & \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

Der Betrag der ersten Colonne ist selbst dann noch beliebig klein, wenn alle eingeklammerten Terme durch ihre Beträge ersetzt werden, da bei hinreichend grossem n die Beträge

$$|b_{2n-k} + \cdots + b_{n+1}|, \qquad k \lesseqgtr n - 1$$

es sind. Den zweiten Theil von (1) schreibe man in der Gestalt:

$$
\begin{aligned}
&(b_0 + b_1 \ + \cdots + b_{n-1})\,(a_{2n} + \cdots + a_{n+1})\\
&- a_{2n} \ \ (b_1 + \cdots + b_{n-1})\\
&- a_{2n-1}(b_2 + \cdots + b_{n-1})\\
&\quad \cdots\\
&\quad \cdots\\
&- a_{n+2}(b_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Auch hier ist der erste Theil von beliebig kleinem Betrage, und der zweite kann in der Form:

$$
\begin{aligned}
&- a_{2n} \qquad (b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + a_{2n} b_0\\
&- (a_{2n-2} + a_{2n-1})\,(b_2 + \cdots + b_{n-1}) + a_{2n-2} b_2\\
&- (a_{2n-4} + a_{2n-3})\,(b_4 + \cdots + b_{n-1}) + a_{2n-4} b_4\\
&\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\\
&\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots
\end{aligned}
$$

geschrieben werden. Da nun alle Summen $|b_k + \cdots + b_{n-1}|$ endlich sind, so ist wiederum der Betrag der ersten Colonne beliebig klein.

Die *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung für:

$$\lim |C_{2n} - A_n B_n| = 0$$

ist daher:

$$0 = \lim |a_0 b_{2n} + a_2 b_{2n-2} + \cdots + a_{2n-2} b_2 + a_{2n} b_0|$$

oder, wenn man den hierdurch eingeführten Ausdruck mit v_{2n} bezeichnet:

$$\lim |v_{2n}| = 0. \tag{2}$$

Wird ferner:

$$w_{2n} = a_1 b_{2n-1} + a_3 b_{2n-3} + \cdots + a_{2n-1} b_1$$

gesetzt, so folgt aus der *nothwendigen* Bedingung

$$\lim |u_{2n}| = 0$$

wegen

$$w_{2n} = u_{2n} - v_{2n}, \quad |w_{2n}| \leqq |u_{2n}| + |v_{2n}|$$

$$\lim |w_{2n}| = 0 \tag{3}$$

und umgekehrt wird auch $|u_{2n}|$ mit $|v_{2n}|$ und $|w_{2n}|$ beliebig klein.

Endlich aber ist

$$
\begin{aligned}
u_{2n+1} = (a_0 + a_1)\,(b_{2n+1} + b_{2n}) &- v_{2n} - w_{2n+2}\\
+ (a_2 + a_3)\,(b_{2n-1} &+ b_{2n-2})\\
+ \cdots
\end{aligned}
$$

Demnach ist auch die Bedingung $\lim |u_{2n+1}| = 0$ erfüllt, sobald die Bedingungen (2) und (3) gelten, da die erste Colonne hier wieder beliebig klein ist. Und so hat man den Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Anwendbarkeit der Cauchy'schen Regel sind die Bedingungen (2) *und* (3).

Dieselben lassen sich, so lange keine weiteren Voraussetzungen eingeführt werden, weder auf einander zurückführen noch durch andere weniger allgemeine ersetzen; sie sagen aus, *dass in den beiden nach der Cauchy'schen Regel formal gebildeten Producten der Reihen:*

$$\sum a_{2n} \sum b_{2n} \quad \text{und} \quad \sum a_{2n+1} \sum b_{2n+1}$$

die Terme mit wachsendem Index gegen Null convergiren müssen. Ich erwähne noch einige specielle Folgerungen.

1) Wird vorausgesetzt, dass auch die Reihe

$$\sum_0^\infty | b_{2n} + b_{2n+1} |$$

convergirt, so setze man

$$\begin{aligned} w_{2n} = a_1(b_{2n-1} + b_{2n-2}) &- (a_1 + a_0) b_{2n-2} + v_{2n-2} \\ + a_3(b_{2n-3} + b_{2n-4}) &- (a_2 + a_3) b_{2n-4} \\ + \cdots \qquad\qquad &- \cdots \end{aligned}$$

und aus dieser Zerlegung sieht man, dass nunmehr $|w_{2n}|$ und $|v_{2n-2}|$ gleichzeitig beliebig klein werden. *Daher ist die nur von den a und b mit geradem Index abhängende Bedingung* (2) *nothwendig und hinreichend.*

Obwohl nun $|u_{2n}|$ mit $|v_{2n}|$ allein schon gegen Null convergirt, so kann man doch nicht umgekehrt das Criterium in der Form

$$\lim |u_{2n}| = 0 \tag{4}$$

aussprechen. Denn es ist:

$$\begin{aligned} u_{2n} = v_{2n} + v_{2n-2} &+ a_1(b_{2n-1} + b_{2n-2}) - b_{2n-2}(a_1 + a_0) \\ &+ a_3(b_{2n-3} + b_{2n-4}) - b_{2n-4}(a_2 + a_3) \\ &+ \cdots \qquad\qquad - \cdots, \end{aligned}$$

so dass durch die Bedingung (4) hier nur ausgedrückt wird, dass

$$\lim | v_{2n} + v_{2n+2} | = 0.$$

Da man insbesondere $a_i = b_i$ setzen kann, so folgt noch:

Damit die Reihe A mit sich selbst nach der Cauchy'schen Regel multiplicirbar sei, muss

$$\lim |a_0 a_{2n} + a_2 a_{2n-2} + \cdots + a_{2n} a_0| = 0$$

sein. Als einfaches Beispiel diene die Reihe:

$$1 - \frac{1}{1+c_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+c_2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+c_3} + \cdots$$

welche in der vorausgesetzten Form convergirt, sobald die Beträge der c unter einer endlichen Grenze liegen und keiner der Nenner ver-

schwindet. Die soeben angegebene Bedingung ist hier zufolge bekannter Eigenschaften der harmonischen Reihe erfüllt.*)

2) Wird dagegen vorausgesetzt, dass die Reihe B in der Form:

$$|b_0| + \sum |b_{2n+1} + b_{2n}|$$

unbedingt convergirt, so hat man:

$$\begin{aligned} u_{2n} = a_0(b_{2n} &+ b_{2n-1}) - b_{2n-1}(a_0 + a_1) + 2w_{2n} \\ + a_2(b_{2n-2} &+ b_{2n-3}) - b_{2n-3}(a_2 + a_3) \\ + \cdots & \qquad - \cdots \end{aligned}$$

In diesem Falle ist also die hinreichende und nothwendige Bedingung durch (4) *gegeben.*

3) Man hat allgemein

$$\begin{aligned} v_{2n} + w_{2n} = u_{2n} = a_0(b_{2n} &- b_{2n-1}) + (a_0 + a_1)b_{2n-1} \\ + a_2(b_{2n-2} &- b_{2n-3}) + (a_2 + a_3)b_{2n-3} \\ + \cdots & \qquad + \cdots \end{aligned}$$

mithin wird u_{2n} stets beliebig klein, wenn die Reihe

$$\sum |b_{2k} - b_{2k-1}|$$

convergirt. Auch hier erhält man als einzige Bedingung (2) oder (3). Diese Bemerkung, die insbesondere gültig ist, wenn $b_{2k-1} = b_{2k}$ ist, führt zu folgender Behauptung.

*Damit die convergente Reihe B sich in der Gestalt:***)

$$\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} + \frac{b_3}{2} + \cdots$$

nach der Cauchy'schen Regel mit A multipliciren lasse, muss

$$\lim |b_0 a_{2n} + b_1 a_{2n-2} + b_2 a_{2n-4} + \cdots| = 0$$

sein.

4) Indem ich rücksichtlich der Ableitung von hinreichenden Bedingungen der Convergenz auf die Pringsheim'sche Arbeit verweise, will ich im Anschluss an die vorige Nr. nur den etwas allgemeineren Fall, wo die Reihe B so convergirt, dass die Reihe der b mit geradem Index (also auch die der b mit ungeradem) convergirt, anführen.

Zerlegt man nämlich:

$$\begin{aligned} v_{2n} &= a_0 b_{2n} + a_2 b_{2n-2} + a_4 b_{2n-4} + \cdots \\ &+ b_0 a_{2n} + b_2 a_{2n-2} + b_4 b_{2n-4} + \cdots \end{aligned}$$

in der hiermit angedeuteten Weise in zwei Theile

$$v_{2n} = v'_{2n} + v''_{2n}$$

---

*) Vgl. die Bemerkung von Hrn. Pringsheim über $(\log 2)^2$, a. a. O., S. 358.

**) Der Symmetrie wegen ist $\frac{1}{2} b_0$ an Stelle von b_0 gesetzt.

so dass im ersten die Indices der $a \leqq n$ sind, so folgt:

$$\begin{aligned} v'_{2n} &= a_0(b_{2n} + b_{2n-2} + b_{2n-4} + \cdots) \\ &+ (a_2 - a_0)(b_{2n-2} + b_{2n-4} + \cdots) \\ &+ (a_4 - a_2)(b_{2n-4} \qquad + \cdots). \end{aligned}$$

Dieser Theil wird beliebig klein, wenn

$$\sum |a_{2n} - a_{2n+2}| \tag{5}$$

convergirt. Dasselbe gilt dann auch für v''_{2n}.

Nach demselben Verfahren findet man als ausreichende Bedingung für $\lim |w_{2n}| = 0$ die der Convergenz der Reihe:

$$|a_1 - a_3| + |a_3 - a_5| + \cdots$$

Nun ist aber:

$$a_{2k-1} - a_{2k+1} = (a_{2k-1} + a_{2k-2}) - (a_{2k} + a_{2k+1}) + (a_{2k} - a_{2k-2}),$$

also

$$|a_{2k-1} - a_{2k+1}| \leqq |a_{2k-1} + a_{2k-2}| + |a_{2k} + a_{2k+1}| + |a_{2k} - a_{2k-2}|,$$

womit gezeigt ist, dass unter den genannten Bedingungen die unter (5) ausgesprochene Bedingung ein hinreichendes Criterium der Convergenz liefert.

Dresden, 8. December 1883.

Ueber parallel geordnete Orthogonalsysteme.

Von

A. Voss in Dresden.

Bekanntlich hat das System der n Gleichungen:

(1) $$\sum a_{ik} x_k = \lambda x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

in denen die a_{ik} reell und gleich den a_{ki} vorausgesetzt werden, die Eigenschaft, dass die zugehörige Gleichung n. Grades

(2) $$|a_{ik} - \lambda| = 0$$

n reelle Wurzeln besitzt, und dass die n Fortschreitungsrichtungen, welche durch die der Wurzel λ_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ entsprechenden Verhältnisse der $x_{1l}\, x_{2l} \ldots x_{nl}$ bestimmt sind, auf einander senkrecht stehen, so dass:

(3) $$\sum x_{il}\, x_{im} = 0, \qquad l \gtrless m.$$

Es werde nun umgekehrt angenommen, dass die Bedingungen der Rechtwinkligkeit für die n aus (1) mit Hülfe von (2) bestimmten Richtungen erfüllt, aber die a_{ik} nur reell sind. Diese Richtungen können dann nicht imaginär sein, weil aus

$$x_{k\alpha} = \xi_k + i\eta_k, \quad x_{k\beta} = \xi_k - i\eta_k$$
$$\sum (\xi_k^2 + \eta_k^2) = 0$$

folgt, und zugleich kann die Determinante D der n^2 Grössen x_{il} nicht verschwinden, da ihr Quadrat gleich dem Producte der n Grössen $\sum_i (x_{il})^2$ ist. Nunmehr folgt aber auch, dass

$$a_{ik} = a_{ki}$$

sein wird. Denn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen der Rechtwinkligkeit sind von der Form:

$$\sum_{ik} (a_{ik} - a_{ki})(x_{il}\, x_{km} - x_{kl}\, x_{im}) = 0$$

und hieraus folgt das zu erweisende, falls gezeigt ist, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ reihige Determinante der $(x_{il}\,x_{km} - x_{kl}\,x_{im})$ nicht verschwindet. Dies erkennt man aber sofort durch Multiplication dieser aus den Unterdeterminanten zweiten Grades von D gebildeten Determinante mit der Determinante aus den adjungirten Unterdeterminanten $n - 2^{\text{ten}}$ Grades von D; das Product beider ist gleich $D^{\frac{n(n-1)}{2}}$, verschwindet also nicht.

Es seien nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n reelle von einander unabhängige Functionen der Variabelen $x_1\,x_2 \ldots x_n$, welche eine Abbildung des Raumes mit den rechtwinkligen Coordinaten x_i auf den der X_i vermitteln. Jeder Fortschreitungsrichtung dx im ersten entspricht eine bestimmte dX im zweiten. Das System der n Gleichungen

$$dX_i = \lambda\,dx_i$$

drückt den Parallelismus entsprechender Richtungen aus. Man erhält also die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{array}{l} X_{11}\,dx_1 + X_{12}\,dx_2 + \cdots + X_{1n}dx_n = \lambda\,dx_1, \\ X_{21}\,dx_1 + X_{22}\,dx_2 + \cdots + X_{2n}dx_n = \lambda\,dx_2, \\ \vdots \\ X_{n1}dx_1 + X_{n2}dx_2 + \cdots + X_{nn}\,dx_n = \lambda\,dx_n, \end{array}$$

in denen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = X_{ik}$$

gesetzt ist, und somit im allgemeinen n von jedem Punkt ausgehende Richtungen, denen bei der Abbildung parallele Richtungen entsprechen. Wie man sieht, werden aber die Verhältnisse der dx_i nicht geändert, wenn man X_{ii} ersetzt durch X_{ii} + Const., d. h. wenn man jede der Functionen X_i ersetzt durch $X_i + \frac{C}{2}\,x_i$.

Sollen die n Fortschreitungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, so ist nach dem obigen erforderlich, dass

$$X_{ik} = X_{ki},$$

d. h. die X_i müssen partielle Differentialquotienten einer Function φ sein.

Jene Richtungen bestimmen dann die Tangenten eines Curvensystems, welches durch ein System simultaner Differentialgleichungen definirt ist, und bei welchem durch jeden Punkt des Raumes der x n auf einander senkrechte Individuen hindurchgehen. Ein solches System werde als *Orthogonalsystem* bezeichnet.

Jedem Orthogonalsysteme dieser Art entsprechen vermöge der Gleichungen

$$X_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c\,x_i$$

∞^1 andere Orthogonalsysteme, bei denen die Tangentenrichtungen in entsprechenden Punkten denen des ersten parallel sind. Solche Systeme mögen *mit dem ersten parallel geordnete Orthogonalsysteme heissen.* Alsdann gilt auch die Umkehrung:

Für je zwei parallel geordnete Orthogonalsysteme in den Räumen X und x existirt eine Function φ, vermöge der in entsprechenden Punkten

$$X_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

wird, mithin auch noch ∞^1 andere.

Denn durch den Parallelismus der Tangentenrichtungen wird überhaupt eine Beziehung beider Räume festgesetzt, welche sich zunächst durch Gleichungen von der Form $X_i = \Psi_i(x_1 \dots x_n)$ ausdrückt und aus dem obigen Satze folgt dann, dass die Ψ_i partielle Differentialquotienten einer Function φ sind.

Man hat damit zugleich einen geometrisch anschaulichen Beweis des bekannten Satzes:

Sind die X_i partielle Differentialquotienten einer Function φ von $x_1 \dots x_n$, so sind auch die x_i partielle Differentialquotienten der reciproken Function Φ.

Die Curven eines Orthogonalsystems bilden im allgemeinen kein System orthogonaler Flächen. Bilden sie ein solches aber im Raume der x, so gilt dasselbe für den der X. Hieraus geht hervor:

Ist die Function φ so beschaffen, dass zu derselben ein System von Orthogonalflächen im Raume der x gehört, so geben die Gleichungen

$$X_i = c x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

*die Abbildung dieses Systems auf ein einfach unendliches System parallel geordneter Orthogonalflächen.**)

Und lassen umgekehrt zwei Systeme orthogonaler Flächen sich so auf einander beziehen, dass in correspondirenden Punkten correspondirende Flächenelemente parallel sind, so hat jedes derselben den Charakter zu einer gewissen Function zu gehören.

Besonders einfach gestalten sich diese Verhältnisse in der Ebene. Setzt man:

$$X_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = r, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = s,$$

$$X_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = t,$$

*) Dass überhaupt die Substitution

$$X_i = c x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

wieder ein System von Orthogonalflächen erzeugt, beweist auf ganz anderem Wege Herr Weingarten, Journal von Borchardt XC, S. 28, welcher zuerst die für φ erforderliche Bedingung aufgestellt hat.

so geben die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad & dX_1 = r\,dx_1 + s\,dx_2 = \lambda\,dx_1,\\
& dX_2 = s\,dx_1 + t\,dx_2 = \lambda\,dx_2
\end{aligned}
$$

für die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & \lambda^2 - \lambda\Delta\varphi + D = 0,\\
& \Delta\varphi = r + t, \quad D = rt - s^2
\end{aligned}
$$

und die Differentialgleichung des Orthogonalsystems wird

$$
(7)\qquad \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \frac{dx_2}{dx_1}\,\frac{(r-t)}{s} - 1 = 0.
$$

Dies ist aber die allgemeine Form der Differentialgleichung eines ebenen Orthogonalsystems. Und setzt man $\frac{r-t}{s}$ gleich einer gegebenen Function von x_1 und x_2 und bestimmt aus dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung die Function φ, so ergiebt sich:

Jedem ebenen Orthogonalsysteme können im allgemeinen auf unendlich viele Arten parallel geordnete zugeordnet werden.

Wählt man z. B. als Orthogonalsystem ein concentrisches Kreis- und Strahlbüschel, so wird die Differentialgleichung

$$
\frac{r-t}{s} = \frac{x^2 - y^2}{xy}.
$$

Nach bekannten Methoden integrirt, liefert sie

$$
\varphi = f(r) + r\,F\left(\frac{y}{x}\right)
$$

(wobei f und F willkürliche Functionen, r aber $\sqrt{x^2+y^2}$ bedeutet) und damit sämmtliche zu dem ursprünglichen parallel geordnete Systeme.

Ich werde jetzt zeigen, dass die Lösung der Gleichung (7) unter der Voraussetzung, dass zwischen $\Delta\varphi$ und D eine von den x unabhängige Relation besteht, auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Werden nämlich die Gleichungen der Curven des gesuchten Orthogonalsystemes durch

$$
\varrho_1 = \text{const.}, \quad \varrho_2 = \text{const.}
$$

den Wurzeln λ_1, λ_2 entsprechend bezeichnet, so hat man die Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & \frac{\partial X_1}{\partial\varrho_1} = \lambda_1\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_1}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial\varrho_2} = \lambda_2\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_2},\\
& \frac{\partial X_2}{\partial\varrho_1} = \lambda_1\frac{\partial x_2}{\partial\varrho_1}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial\varrho_2} = \lambda_2\frac{\partial x_2}{\partial\varrho_2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\lambda_1 - \frac{\Delta\varphi}{2} = -\left(\lambda_2 - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sqrt{H} = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\varphi)^2 - 4D}.
$$

Die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varrho_2}\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_1}+\lambda_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}=\frac{\partial\lambda_2}{\partial\varrho_1}\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_2}+\lambda_2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2},$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varrho_1}\frac{\partial x_2}{\partial\varrho_1}+\lambda_1\frac{\partial^2 x_2}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}=\frac{\partial\lambda_2}{\partial\varrho_1}\frac{\partial x_2}{\partial\varrho_2}+\lambda_2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}$$

multiplicire man mit

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_1},\quad \frac{\partial x_2}{\partial\varrho_1};\qquad \frac{\partial x_1}{\partial\varrho_2},\quad \frac{\partial x_2}{\partial\varrho_2}$$

und addire. Setzt man noch

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial\varrho_1}\right)^2=h_1,\quad \frac{1}{h_1}=\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial\varrho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial\varrho_2}\right)^2=h_2,\quad \frac{1}{h_2}=\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_2}\right)^2,$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_2}(h_1\sqrt{H})=-\frac{h_1}{2}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varrho_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_1}(h_2\sqrt{H})=+\frac{h_2}{2}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varrho_1}$$

oder

$$(9)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\log(h_1\sqrt{H})&=-\frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varrho_2},\\ \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\log(h_2\sqrt{H})&=+\frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varrho_1}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(10)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}\log(h_1h_2H)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{H}}}{\partial\varrho_2}-\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{H}}}{\partial\varrho_1}\right),$$

mithin, falls $\Delta\varphi$ und H von einander unabhängig sind,

$$\int\frac{\partial^2}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}\log(h_1h_2H)=\frac{1}{2}\int d\Delta\varphi\, d\frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Besteht dagegen zwischen $\Delta\varphi$ und H eine von den x unabhängige Relation, so ist $\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta\varphi}{\sqrt{H}}$ das Differential einer Function Ω und man erhält aus (9)

$$h_1\sqrt{H}=e^{-\Omega}\psi_1,$$

$$h_2\sqrt{H}=e^{+\Omega}\psi_2,$$

wo ψ_i Function von ϱ_i allein ist.

Bei geeigneter Wahl der Functionen ϱ_i aber kann man setzen

$$(12)\qquad h_1=\frac{e^{-\Omega}}{\sqrt{H}},\qquad h_2=\frac{e^{+\Omega}}{\sqrt{H}}$$

so dass

$$dx_1^2 + dx_2^2 = \frac{1}{\sqrt{H}} (e^{-\Omega} d\varrho_1^2 + e^{+\Omega} d\varrho_2^2)$$

wird. Nunmehr erhält man, falls die den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 entsprechenden Werthe der Differentialquotienten $\frac{dx_2}{dx_1}$ durch ξ_1 und ξ_2 bezeichnet werden:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} = \frac{\xi_1}{\sqrt{h_1}\sqrt{1+\xi_1^2}}, \quad \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} = \frac{\xi_2}{\sqrt{h_2}\sqrt{1+\xi_2^2}},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2} = \frac{-1}{\sqrt{h_1}\sqrt{1+\xi_1^2}}, \quad \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2} = \frac{-1}{\sqrt{h_2}\sqrt{1+\xi_2^2}}$$

also:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \varrho_1 &= \int \sqrt{H}\, e^{-\frac{\Omega}{2}} \frac{\xi_1 dx_1 - dx_2}{\sqrt{1+\xi_1^2}}, \\ \varrho_2 &= \int \sqrt{H}\, e^{+\frac{\Omega}{2}} \frac{\xi_2 dx_1 - dx_2}{\sqrt{1+\xi_2^2}}. \end{aligned}$$

Damit sind die Gleichungen der Curven des Orthogonalsystems gegeben.

Ich erwähne noch den Fall $\Delta\varphi = \text{const.}$, $\Omega = 0$. Die Gleichung

$$dx_1^2 + dx_2^2 = \frac{1}{\sqrt{H}} (d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2)$$

zeigt, dass

$$\varrho_1 + i\varrho_2 = f(x_1 + ix_2) = f(z)$$

sein wird. Man erhält die Function $f(z)$, wenn man in $\varrho_1 + i\varrho_2$ unter dem Integralzeichen die complexe Variabele $z = x_1 + ix_2$ einführt. Einfacher ergeben sich indessen in diesem Falle die Curven $\varrho_i = \text{const.}$ folgendermassen. Aus der Gleichung

$$\Delta\varphi = 2c$$

erhält man, falls man mit ζ die zu z conjugirte complexe Variabele bezeichnet:

$$X_2 + iX_1 = ic\zeta + F(z) = i(X_1 - X_2 i),$$

wobei $F(z)$ eine Function der complexen Variabelen z sein wird. Bezeichnet man mit $\mathrm{F}(\zeta)$ die conjugirte Function, so ist

$$\begin{aligned} dX_2 + idX_1 &= \quad ic\,d\zeta + F'(z)dz, \\ dX_2 - idX_1 &= -ic\,dz + \mathrm{F}'(\zeta)d\zeta. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung

$$dX_1 : dX_2 = dx_1 : dx_2$$

ergiebt sich nun:

$$-\frac{d\zeta}{dz} = \frac{ic\,d\zeta + F'(z)\,dz}{-ic\,dz + \mathrm{F}'(\zeta)\,d\zeta}$$

oder

$$F'(\zeta)\,(d\zeta)^2 = - F'(z)\,(dz)^2,$$

$$\pm i\sqrt{F'(z)}\,dz = \sqrt{F'(\zeta)}\,d\zeta.$$

Setzt man

$$\int\sqrt{F'(z)}\,dz = P + Qi, \quad \int\sqrt{F'(\zeta)}\,d\zeta = P - Qi,$$

so ergeben sich die Gleichungen der gesuchten Curvenschaaren

$$\varrho_i = \text{const.}$$

aus der Relation:

$$\pm i(P + Qi) = (P - Qi) + \text{const.}$$

also:

$$\varrho_1 = P + Q = \text{const.},$$

$$\varrho_2 = P - Q = \text{const.}$$

In dem noch specielleren Falle $c = 0$ wird

$$Z = X_1 - X_2 i = - iF(z) = G(z)$$

und man hat den folgenden Satz:

Sind zwei ebene Bereiche Z, z conform aber ungleichstimmig ähnlich auf einander durch $Z = G(z)$ abgebildet, so kann man sie mit Hülfe der Integralfunction

$$\mathrm{Z} = \int\sqrt{G'(z)}\,dz$$

stets conform so auf das Bereich Z abbilden, dass den Parallelen zu den Coordinatenaxen des letzteren zwei parallel geordnete Orthogonalsysteme in Z und z entsprechen.

Dresden, im December 1883.

Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte.

Von

Karl Rohn in Leipzig.

(Mit 2 lithograph. Tafeln).

Einleitung.

Die Flächen dritter Ordnung haben bereits eine vielfache Behandlung erfahren und sind unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet worden, sei es, dass man von der geometrischen Erzeugungsweise ausging, sei es, dass man ihre Gleichung in eine Normalform — eine Summe von fünf Cuben gleich Null — brachte, oder sei es, dass man die Specialisirungen betrachtete, welchen man die allgemeine Flächengleichung unterwerfen kann. In dem letzteren Sinne ist als erste umfassende Arbeit die von Schläfli*) in den *Philosophical Transactions* zu nennen, worin er alle bei einer Fläche dritter Ordnung überhaupt möglichen Singularitäten bestimmt, und die verschiedenen Flächen, welche so entstehen, aufzählt. In demselben Sinne sind auch schon bei Flächen 4. Ordnung einige Untersuchungen angestellt worden, jedoch beschränken sich dieselben auf Flächen mit Doppelcurven und auf Flächen mit *zehn* oder *mehr* Knotenpunkten; aber auch hier sind die Untersuchungen noch ganz mangelhaft, so dass man nicht einmal die Gleichungen der verschiedenen Flächen mit 13, 12, 11 oder 10 gewöhnlichen Knotenpunkten kennt. Nur die Gleichungen und verschiedene Eigenschaften der Flächen 4. Ord. mit 16, 15 oder 14 gewöhnlichen Knotenpunkten sind bekannt. Man findet solche Untersuchungen bei Kummer**) und Cayley,***) sowie was die Flächen mit 16 Knotenpunkten betrifft bei mir.†)

In dieser Abhandlung soll nun dasselbe Ziel für die Flächen 4. Ord. mit dreifachem Punkte erstrebt werden, welches sich Schläfli bei

---

*) Schläfli, Phil. Trans. of the R. Soc. of London, 1863, v. CLIII, p. 193.

**) Kummer, Ueber die algebraischen Strahlensysteme, Berl. Abhandl. 1866, p. 1; ferner: Flächen 4. Ord., welche von einer Schaar von Flächen 2. Gr. eingehüllt werden, Berl. Monatsber. 1872, p. 474.

***) Cayley, First, second and third memoir on quartics, Proc. of the Lond. Math. Soc. III 19. 198, 234.

†) Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche, Math. Annal. Bd. XVIII, p. 99. Andere Citate finden sich weiterhin im Texte.

den Flächen 3. Ord. a. a. O. gesteckt hat. Es handelt sich also einestheils um die Specialisirungen des dreifachen Punktes, andertheils um die Singularitäten, welche noch ausserdem auftreten können. Zugleich mit der Erledigung dieser Fragen werden auch die *gestaltlichen* Verhältnisse*) der auftretenden Flächen ins Auge gefasst; besonders wird immer auf die Projection der singulären Punkte und ihrer Umgebung aus einem beliebigen Raumpunkte Rücksicht genommen. Ausserdem sind noch einige Untersuchungen über hierher gehörige Flächen eingestreut, welche ein besonderes Interesse bieten; ich erwähne z. B. die Specialfälle des *Symmetroids.* Es mag hier nebenbei darauf aufmerksam gemacht werden, dass ein Theil der nachfolgenden Betrachtungen sich direct auf Flächen n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte übertragen lassen. Insbesondere kann man die ganzen Resultate, welche Schläfli für die speciellen Flächen 3. Ord. (Flächen, welche irgend welche Singularitäten aufweisen) gegeben hat, äusserst einfach mit der hier angewendeten Methode gewinnen, wenn man von der Fläche 3. Ord. mit *einem* Knotenpunkte ausgeht.

Die Abhandlung beginnt mit einigen allgemeinen Betrachtungen über unsere Flächen. Dann werden die Singularitäten der Fläche, welche ausserhalb des dreifachen Punktes auftreten können, untersucht unter der Voraussetzung, dass der dreifache Punkt ein allgemeiner ist. Hieran schliesst sich eine Beleuchtung der Realitäts- und der gestaltlichen Verhältnisse dieser Flächen an. Weiterhin werden die Flächen behandelt, deren dreifacher Punkt ein specieller ist, worauf die Untersuchung zu Flächen übergeht, deren dreifacher Punkt von einer *singulären* Geraden durchsetzt wird, um mit den Flächen mit einer dreifachen Geraden zu schliessen. Ueberall sind die entsprechenden gestaltlichen Untersuchungen beigefügt. Das letzte Capitel endlich beschäftigt sich mit den Realitätsverhältnissen und den Specialisirungen der Steiner'schen Fläche.

Einiges über die Curven auf der Fläche, deren Ordnung die Zahl 5 nicht übersteigt.

1) Man hat ganz allgemein für Flächen n. Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkt die Bezeichnung Monoide eingeführt, und so werden wir auch unsere Flächen kurz als *Monoide* 4. *Ord.* bezeichnen. Ihre Gleichung lässt sich in der Form schreiben:

$$f = (xyz)_3 + \sigma(xyz)_4 = u_3 + \sigma u_4 = 0,$$

wo $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ zwei Kegel von der dritten resp. vierten Ord-

*) Vergl. meine Note in den Berichten der königl. Sächs. Gesell. der Wissenschaften vom 28. Januar 1884, welche über die gestaltlichen Verhältnisse einer Fläche in der Umgebung eines $\varkappa$-fachen Punktes handelt.

nung mit dem gemeinsamen Scheitel $x = y = z = 0$ bezeichnen; die Zahl der Constanten in dieser Gleichung ist 24. Der Kegel $u_3 = 0$ stellt den Tangentialkegel im dreifachen Punkt der Fläche dar; der Kegel $u_4 = 0$ schneidet den letzteren in 12 *Geraden, welche der Fläche ganz angehören*, wir nennen sie die 12 *Hauptgeraden* unserer Fläche. Von diesen 12 Geraden können 9 beliebig angenommen werden, die 3 übrigen liegen alsdann auf dem durch die ersteren bestimmten Kegel 3. Ord. Zwei von diesen 3 Geraden kann man noch beliebig auf dem Kegel 3. Ord. wählen, während die letzte Gerade dadurch eindeutig bestimmt ist, da nach einem bekannten Satze von den 12 Schnittpunkten einer Curve 3. Ord. mit einer Curve 4. Ord. *einer* durch die andern eilf mitbestimmt ist. Die Wahl der 12 Hauptgeraden unserer Fläche absorbirt demnach von den 24 Constanten 20. Nimmt man nun noch 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte an, durch welche unser Monoid hindurchgehen soll, so ist dasselbe vollkommen bestimmt; denn man kann sofort die Schnittcurven in den Ebenen durch je drei der vier Punkte angeben.

2) Die 12 Hauptgeraden des Monoids bezeichnen wir mit $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$; sie bestimmen zu je zwei 66 Ebenen, deren jede die Fläche noch in einem Kegelschnitte schneidet, sie seien $K_{1,2}, K_{1,3}, \ldots, K_{11,12}$. Diese Kegelschnitte schneiden sich alle in dem dreifachen Punkte der Fläche; ferner schneiden sich je zwei derselben, die keinen Index gemein haben noch in einem weiteren Punkte.

3) Legt man durch 5 Hauptgeraden einen Kegel 2. Grades, so schneidet derselbe noch eine Curve 3. Ord. C_3 aus, welche einfach durch den dreifachen Punkt verläuft. Es giebt $\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 792$ solcher C_3, welche man durch 5 Indices zu bezeichnen hat. Nimmt man irgend zwei C_3 mit völlig verschiedenen Indices, so schneiden sie sich in 5 Punkten; man kann desshalb durch sie eine Fläche 2. Grades legen, welche noch denjenigen $K_{h,i}$ aus dem Monoid ausschneidet, der mit ihnen keinen Index gemein hat.

4) Je 4 Hauptgeraden bestimmen ein Büschel von Kegeln 2. Ord., welche aus dem Monoide ein System von *Curven* 4. *Ord. mit Doppelpunkt* ausschneiden. Die Doppelpunkte derselben liegen in dem dreifachen Punkte des Monoids, und es schneiden sich diese Curven ausserdem nirgends mehr, so dass sie das ganze Monoid einfach und lückenlos überdecken. Solcher Curvensysteme giebt es 495; sie sind durch 4 Indices zu bezeichnen. Ebenso findet man 495 Systeme von *Curven* 4. *Ord. ohne Doppelpunkt*, wenn man durch 8 Hauptgeraden ein Büschel von Kegeln 3. Ord. legt; sie sind charakterisirt durch 8 Indices. Alle Curven irgend eines der letzteren Systeme berühren sich im dreifachen Punkt, sonst aber treffen sie sich nirgends. Zu jedem

System von Curven 4. Ord. *mit* Doppelpunkt gesellt sich ein System von Curven 4. Ord. *ohne* Doppelpunkt, und zwar gehören immer zwei solche Systeme zusammen, welche alle 12 Indices erschöpfen.

Jede Curve des einen Systems liegt mit jeder Curve des zugehörigen Systems auf einer Fläche 2. Grades, sie schneiden sich ausser im dreifachen Punkt noch in 6 beweglichen Punkten; durch jeden Punkt unserer Fläche geht so eine einzige Curve aus jedem System. Die beiden Erzeugenden einer solchen Fläche 2. Grades durch den dreifachen Punkt liegen auf dem zugehörigen Kegel 3. Ord.

5) Nimmt man 6 von den Hauptgeraden der Fläche zu einfachen und eine siebente zur Doppelkante eines Kegels 3. Ord., so schneidet derselbe eine *Curve* 4. *Ord. zweiter Species* aus, deren es 5544 giebt. Durch diese Curve kann man *eine* Fläche 2. Gr. legen, welche natürlich die Doppelkante enthält und noch eine der obigen Curven 3. Ord. ausschneidet; beide Curven treffen sich im dreifachen Punkte und noch in 6 weiteren Punkten. Man erhält ferner eine Curve 5. Ord., wenn man 5 Hauptgeraden als einfache und 3 weitere als Doppelkanten eines Kegels 4. Ord. wählt, und deren giebt es 27 720; eine solche Curve hat die drei Doppelkanten zu dreifachen Secanten. Endlich findet man doppelt unendlich viele Systeme von Curven 5. Ord., wenn man durch die oben gefundenen Raumcurven 3. Ordnung Flächen 2. Grades legt; diese Curven haben einen Doppelpunkt.

6) Ein Monoid 4. Ord. kann auch gerade Linien besitzen, welche den dreifachen Punkt nicht enthalten; dann muss die Ebene durch diesen Punkt und die Gerade noch drei Hauptgeraden ausschneiden. Das Monoid besitzt also so viele weitere Geraden, als es Ebenen giebt, welche drei von den Hauptgeraden enthalten. Die Frage nach der Maximalzahl dieser Geraden ist also äquivalent mit der Frage: Wie oft können die 12 Hauptgeraden, d. h. die 12 Schnittgeraden eines Kegels 3. Ord. und eines Kegels 4. Ord. zu drei in einer Ebene liegen? An Stelle der Kegel kann man auch zwei Curven 3. und 4. Ordnung nehmen und untersuchen, wie oft die 12 Schnittpunkte zu drei auf einer Geraden liegen können. Zu einer Curve 3. Ord. gehört aber ein ganz bestimmtes elliptisches Integral u, welches eindeutig auf der Curve ausgebreitet werden kann.*) Bezeichnen wir die Perioden dieses Integrals mit ω und $i\omega'$ und die Parameter der 12 Schnittpunkte mit $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, so besteht die Relation $\sum_1^{12} a_i \equiv 0 \pmod{\omega + i\omega'}$.

Sollen nun drei Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, so muss die

*) Harnack. Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven 3. Gr., Math. Annal. Bd. IX, p. 1.

Summe ihrer Parameter congruent Null sein mod. Perioden. Wählen wir also die 12 Punkte:

$$a_1 = 0,\quad a_2 = \frac{\omega}{2},\quad a_3 = \frac{i\omega'}{2},\quad a_4 = \frac{\omega + i\omega'}{2},$$

$$a_5 = \frac{\omega}{3},\quad a_6 = -\frac{\omega}{6},\quad a_7 = \frac{\omega}{3} + \frac{i\omega'}{2},\quad a_8 = -\frac{\omega}{6} + \frac{i\omega'}{2},$$

$$a_9 = -\frac{\omega}{3},\quad a_{10} = \frac{\omega}{6},\quad a_{11} = -\frac{\omega}{3} + \frac{i\omega'}{2},\quad a_{12} = \frac{\omega}{6} + \frac{i\omega'}{2},$$

so liegen 19 Mal drei auf einer Geraden, und das ist ersichtlich das Maximum. Wir haben so das Resultat gewonnen: *Schneidet die Curve 4. Ord.* $u_4 = (xyz)_4 = 0$ *die Curve 3. Ord.* $u_3 = (xyz)_3 = 0$ *in ihren drei reellen Wendepunkten sowie in den Berührungspunkten der Tangenten aus diesen Wendepunkten, so besitzt das Monoid* $u_3 + \sigma u_4 = 0$ *noch 19 reelle Geraden, welche nicht durch den dreifachen Punkt gehen.*

7. Die Gruppirung dieser Geraden, die wir durch drei Zahlen bezeichnen müssen, ist die folgende. Durch die Gerade 1, 5, 9 gehen drei sechstactische*) Ebenen; *eine* dieser drei Ebenen enthält die Geraden 2, 3, 4; 6, 7, 8; 10, 11, 12, durch welche keine weitere sechstactische Ebene geht. Die beiden *andern* Ebenen durch die Gerade 1, 5, 9 schneiden die Geradentripel 2, 7, 12; 3, 8, 10; 4, 6, 11 resp. 2, 8, 11; 3, 6, 12; 4, 7, 10 aus, und durch jede Gerade eines Tripels geht noch je eine weitere sechstactische Ebene hindurch. Jede der drei sechstactischen Ebenen des ersten Tripels schneidet jede Ebene des zweiten Tripels in einer Geraden, welche ebenfalls auf der Fläche liegt; es sind dies die 9 Geraden: 1, 6, 10; 1, 7, 11; 1, 8, 12; 5, 2, 10; 5, 3, 11; 5, 4, 12; 9, 2, 6; 9, 3, 7; 9, 4, 10. *Es giebt also im Ganzen 9 sechstactische Ebenen. Ausserdem giebt es 9 fünftactische Ebenen, welche aus der Fläche je einen Kegelschnitt und zwei Geraden ausschneiden.* Durch jede der zuletzt erwähnten 9 Geraden geht *eine* solche Ebene und durch jede Gerade des Tripels: 2, 3, 4; 6, 7, 8; 10, 11, 12 gehen *drei.* Bekanntlich schneiden sich bei der Curve 3. Ord. die drei Geraden 2, 3, 4; 6, 7, 8; 10, 11, 12 in einem und demselben Punkte, folglich muss dieses auch mit den bezüglichen Geraden auf der Fläche geschehen; und es schneiden sich also *die 9 fünftactischen Ebenen in demselben Punkte der Fläche.* Die Gleichung dieser Fläche kann, wie man leicht zeigt, auf die Form gebracht werden:

$$(x+y+z)^3 + \varrho xyz + \sigma(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) = 0.$$

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass die Zahlen der zu Anfang angegebenen Curven sich ändern, wenn das Monoid Geraden

---

*) Ebenen, welche eine Fläche sechs Mal berühren; bei der Fläche 4. Ord. sind das Ebenen, welche 4 Geraden ausschneiden.

oder Kegelschnitte oder Raumcurven 3. Ord. besitzt, welche nicht durch den dreifachen Punkt gehen; jedoch unterlasse ich es hier diese Aenderungen, die sehr einfacher Natur sind, anzugeben.

Die Singularitäten des Monoids, welche ausserhalb des dreifachen Punktes liegen.

8. Die Betrachtungen, welche in diesem Capitel angestellt werden, werde ich in einer solchen Form geben, dass sie sich zum grössten Theil direct auf Monoide n. Ordnung übertragen lassen. Zuvörderst ist es klar, dass die Verbindungslinie eines Knotenpunktes der Fläche mit dem dreifachen Punkte auf der Fläche selbst liegen, d. h. eine der 12 Hauptgeraden sein muss. Aber weiter ergiebt sich sofort, dass auf einer solchen Geraden *nur dann* ein Knotenpunkt liegen kann, aber auch liegen muss, wenn eine der übrigen 11 Geraden mit ihr zusammenfällt. Zur bequemen analytischen Behandlung machen wir den dreifachen Punkt zum Eckpunkt $x = y = 0$ und eine der 12 Hauptgeraden zur Kante $x=0$, $y=0$ des Coordinatentetraeders.

Die Gleichung der Fläche erhält dann die Gestalt:

$$f = wu_3 + u_4 = w(xyz)_3 + (xyz)_4 = 0$$

wobei $(xyz)_3 = 0$ und $(xyz)_4 = 0$ für den Werth $x = y = 0$.

Sollen nun *zwei* der 12 Hauptgeraden mit der Kante $x=0$, $y=0$ zusammenfallen, so müssen sich die beiden Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ daselbst berühren, was durch die Gleichung:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} : \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u_4}{\partial x} : \frac{\partial u_4}{\partial y},$$

gebildet mit den Werthen

$$x = 0, \; y = 0, \; z = z,$$

ausgedrückt wird. Die Coordinaten eines Knotenpunktes müssen aber den vier Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = w\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = w\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_4}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = w\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = u_3 = 0.$$

Ein Punkt $x = 0$, $y = 0$, $w = \varrho z$ befriedigt zunächst nur die beiden letzten Gleichungen; da jedoch für $x = 0$, $y = 0$ die beiden ersten Gleichungen identisch werden und sich abgesehen von dem Factor z^2, auf eine lineare Gleichung zwischen w und z reduciren, so wird ϱ dadurch eindeutig bestimmt. Man erkennt also aus diesen Gleichungen, dass das Monoid einen Knotenpunkt besitzt, sobald sich die Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ berühren; man erkennt aus denselben aber auch das

Umgekehrte, dass sich die Kegel berühren, wenn das Monoid einen Knotenpunkt besitzt.

9. Es soll nun bewiesen werden, dass *das Monoid einen biplanaren Knotenpunkt $B_\varkappa$ von der Ordnung $\varkappa$**) *besitzt, wenn die Kegel* $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ *eine Berührung von der Ordnung* $(\varkappa - 1)$ *eingehen*, d. h. wenn sie $\varkappa$ consecutive Kanten gemein haben. Wir benutzen zu diesem Beweise wieder die obige Gleichungsform, und müssen zeigen, dass von den 36 Tangentialebenen durch eine beliebige Gerade l an unsere Fläche $\varkappa$ mit der Ebene durch l und $B_\varkappa$ zusammenfallen. Nehmen wir also als Gerade l die Gerade $y = 0$, $w = 0$, so ist zu zeigen, dass $\varkappa$ von den 36 Schnittpunkten:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

in den Knotenpunkt $B_\varkappa$ hineinfallen.

Die Curve:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = w \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = u_3 = 0,$$

lässt sich durch die beiden Potenzreihen darstellen:

$$x = ay + by^2 + cy^3 + \cdots, \quad w = \varrho + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \cdots,$$

indem wir bei diesen Entwicklungen dem z den constanten Werth 1 beilegen. Die erste dieser beiden Reihen ergiebt sich unmittelbar aus $u_3 = 0$, die letzte folgt dann aus: $w = -\frac{\partial u_4}{\partial y} : \frac{\partial u_3}{\partial y}$, wenn man hierin für x jene Potenzreihe substituirt und $z = 1$ annimmt; das constante Glied erhält dann den schon oben bestimmten Werth ϱ. Setzen wir nun in die linke Seite der Gleichung des Monoids für x und w ihre Potenzreihen ein, so verschwindet u_3 identisch und es bleibt nur u_4, gebildet mit $x = ay + by^2 + \cdots$, übrig, so dass man erhält: $u_4 = Ay + By^2 + \cdots + Ky^\varkappa + Ly^{\varkappa+1} + \cdots$. Wenn aber der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Kante $x = 0$, $y = 0$ von der Ordnung k berührt, so müssen in dem Ausdruck für u_4 die $k - 1$ ersten Glieder wegfallen, so dass $u_4 = Ky^\varkappa + Ly^{\varkappa+1} + \cdots$ wird. Somit ist gezeigt, dass durch Einführung der Potenzreihen von x und w in f dieses übergeht in: $f = Ky^\varkappa + Lu^{\varkappa+1} + \cdots$, wodurch der verlangte Beweis geführt ist.

10. Es erübrigt uns nur noch das singuläre Ebenenpaar des Knotenpunktes anzugeben. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Kegel längs der Kante $x = 0$, $y = 0$ mit der Ebene $x = 0$ zusammenfällt. Dann

---

*) Es ist dieses ein Knotenpunkt, der die Classe der Fläche um $\varkappa$ Einheiten erniedrigt. Vergl. wegen des Folgenden meine Arbeit über biplanare Knotenpunkte, Math. Ann. Bd. XXII, p. 124.

kommen zu den Bedingungsgleichungen $(0\,0\,z)_3 = 0$ und $(0\,0\,z)_4 = 0$ noch die neuen $\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) = 0$ und $\left(\frac{\partial u_4}{\partial y}\right) = 0$, wo die Klammern ausdrücken sollen, dass auch hierin $x = 0$, $y = 0$ zu setzen ist. Die Gleichung des Tangentialskegels im Knotenpunkte: $x = 0$, $y = 0$, $w = \varrho z$ wird alsdann:

$$x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + 2xz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right) + 2xw\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0;$$

er berührt die Ebene $x = 0$ längs der Kante $x = 0$, $y = 0$. Ein Osculiren der beiden Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ längs der Kante $x = 0$, $y = 0$ drückt sich durch die Gleichung aus:

$$\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_4}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0.$$

Es ist aber $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \varrho\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}\right)$ und $\varrho = -\left(\frac{\partial u_4}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)$; es verschwindet also vermöge der neuen Bedingungsgleichung der Coefficient von y^2 und der Tangentialkegel zerfällt in das Ebenenpaar:

$$x = 0, \quad x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) + 2z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right) + 2w\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Ebene $x = 0$ berührt das Monoid längs der Geraden $x = 0$, $y = 0$ und schneidet aus demselben noch einen Kegelschnitt aus, der durch den dreifachen und den Knotenpunkt hindurchgeht; die andere singuläre Ebene schneidet eine Curve 4. Ord. mit dreifachem Punkte aus. Geht der biplanare Knotenpunkt in einen B_4 über, so berührt der Kegelschnitt in der Ebene $x = 0$, und ebenso ein Ast der Curve mit dreifachem Punkt, die singuläre Gerade. Diese Verhältnisse bleiben im Allgemeinen auch noch für einen B_5, B_6, . . ., B_{12} bestehen.

11. Im Anschluss an das Vorhergehende ist noch zweierlei zu erwähnen. Erstens erkennt man, dass die beiden singulären Ebenen nicht zusammenfallen können, wenn nicht das Monoid eine Doppelgerade durch den dreifachen Punkt erhalten soll, ein Fall der erst in einem späteren Capitel seine Erledigung findet. *Das Monoid kann also keinen uniplanaren Knotenpunkt besitzen, der nicht auf einer Doppelgeraden liegt.* Zweitens ist einer Specialisirung der biplanaren Knotenpunkte zu gedenken, welche entsteht, wenn sich die Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ längs einer Wendekante osculiren. Die singuläre Ebene $x = 0$ schneidet dann die dreifach gezählte Gerade $x = 0$, $y = 0$ und eine weitere Gerade aus, welche den Knotenpunkt nicht passirt. Geht der B_3 in einen B_4 über, indem sich die Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ hyperosculiren, so schneidet die Ebene $x = 0$ in der dreifachen Geraden $x = 0$, $y = 0$ und einer Geraden, welche den Knotenpunkt passirt. Geht man endlich zu einem B_5 über, so schneidet die Ebene $x = 0$

das Monoid wiederum in der dreifachen Geraden und ausserdem in der singulären Geraden, d. h. der Schnittlinie der beiden singulären Ebenen. Dieselbe bildet auch einen Theil der Schnittcurve in der andern singulären Ebene, welche noch aus einer Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt besteht.

12. Es dürfte nicht überflüssig sein noch einen einfachen geometrischen Beweis für den Satz zu erbringen, dass das Monoid einen $B_\varkappa$ besitzt, sobald von den 12 Hauptgeraden desselben $\varkappa$ zusammenrücken. Rücken zunächst zwei von den 12 Hauptgeraden zusammen, so besitzt das Monoid nur noch 11 von einander getrennt liegende Geraden und längs *einer* dieser Geraden eine *constante Tangentialebene*. Legt man durch diese Gerade eine beliebige Ebene, so schneidet diese noch eine Curve 3. Ord. aus, welche einen Knotenpunkt im dreifachen Punkt der Fläche besitzt und folglich jene Gerade noch *einmal* schneidet. Dieser Schnittpunkt muss ersichtlich ein Knotenpunkt unserer Fläche sein, da es in ihm zwei Tangentialebenen giebt, nämlich die constante Tangentialebene längs der Geraden und die soeben gezogene Ebene. Nehmen wir für den Augenblick ein Monoid mit 12 getrennt liegenden Hauptgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$ an, so giebt es durch jede Gerade G, welche den dreifachen Punkt enthält, noch 12 Tangentialebenen an das Monoid, nämlich die Ebenen durch die Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$. Lassen wir nun $\varkappa$ Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ einander immer näher rücken, bis sie schliesslich zusammenfallen und alsdann $\varkappa$ consecutive Kanten des Berührungskegels im dreifachen Punkte bilden, so fallen auch $\varkappa$ von jenen 12 Tangentialebenen zusammen in eine einzige Ebene durch G und den hierbei entstehenden Knotenpunkt. Derselbe absorbirt demgemäss $\varkappa$ Tangentialebenen durch G und ist somit ein biplanarer Knotenpunkt $B_\varkappa$, der die Classe des Monoids um $\varkappa$ Einheiten erniedrigt.

13. Nachdem wir nun gezeigt haben, von welcher Art die Singularitäten sind, die ein Monoid mit einem allgemeinen dreifachen Punkt noch besitzen kann, ist es leicht anzugeben in welcher Combination diese Singularitäten auftreten können. Da die 12 Schnittgeraden eines Kegels 3. Ord. mit einem Kegel 4. Ord. von gleichem Scheitel, oder, was dasselbe ist, die 12 Schnittpunkte einer Curve 3. Ord. mit einer Curve 4. Ord. in beliebiger Weise zusammenrücken können, wenn man nur die beiden Kegel resp. Curven geeignet wählt, so erhält man sofort folgendes Resultat. *Theilt man die Zahl* 12 *ganz beliebig in Summanden, so giebt es dieser Eintheilung gemäss immer Monoide* 4. *Ord., welche jedem Summanden* 2 *entsprechend einen gewöhnlichen Knotenpunkt und jedem Summanden* 3, 4, 5, ... *entsprechend einen biplanaren Knotenpunkt* B_3, B_4, B_5, ... *besitzen.* So ergiebt z. B. die Zerlegung $12 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1$ Monoide, welche noch einen

gewöhnlichen und zwei biplanare Knotenpunkte B_3 und B_5 besitzen. Hiermit beschliessen wir dieses Capitel und wollen zunächst einige hierher gehörige Monoide wirklich aufstellen.

Das Monoid mit 6 gewöhnlichen Knotenpunkten. Zwei Arten desselben.

14. Berührt eine Curve 4. Ord. $u_4=0$ eine Curve 3. Ord. $u_3=0$ in sechs Punkten, und bezeichnen wir die Werthe des auf der Curve 3. Ord. ausgebreiteten elliptischen Integrals in diesen 6 Stellen mit $a_1, a_2, \ldots, a_6$ so besteht zwischen den Parametern dieser 6 Punkte die Relation

$$2\sum_1^6{}^i a_i \equiv 0 \; (\text{mod. } \omega \text{ u. } i\omega').$$

In diesen Punkten berühren die dreifach unendlich vielen Curven $u_4 + lu_3 = 0$, wo l ein in x, y, z linearer Ausdruck ist. Aus jener Relation folgt aber weiter:

$$\sum_1^6{}^i a_i \equiv \frac{P}{2} \; (\text{mod. } \omega \text{ u. } i\omega'),$$

wenn man mit $\frac{P}{2}$ einen der vier Werthe $\frac{\omega}{2}$, $\frac{i\omega'}{2}$, $\frac{\omega + i\omega'}{2}$, 0 bezeichnet. Tritt der letzte Fall ein, d. h. ist

$$\sum_1^6{}^i a_i \equiv 0 \; (\text{mod. } \omega \text{ u. } i\omega'),$$

so liegen die 6 Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_6$ auf einem Kegelschnitt; derselbe gehört, doppelt gezählt, mit zu den dreifach unendlich vielen, sechs Mal berührenden Curven 4. Ord. Dieses Resultat auf das Monoid übertragen lässt sich so aussprechen. Unter den dreifach unendlich vielen Ebenen des Raumes giebt es im letztgenannten Falle eine einzige, welche das Monoid längs eines Kegelschnitts berührt; auf diesem Kegelschnitt liegen die 6 Knotenpunkte des Monoids.

Wir haben also zwei wesentlich verschiedene Arten von Monoiden mit 6 *Knoten zu unterscheiden, nämlich eine, deren Knotenpunkte beliebig im Raume gelegen sind, und eine andere, deren Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen.* Die Mannichfaltigkeiten beider Arten sind gleich gross.

Erste Art; Monoide mit 6 beliebig gelegenen Knotenpunkten.

15. Diese Flächen sind offenbar völlig bestimmt, wenn der dreifache Punkt und die 6 Knotenpunkte vorgegebene Punkte sein sollen; denn ersterer liefert 10 und die letzteren je 4 Bedingungsgleichungen,

wodurch sich die 24 Constanten der Flächengleichung geradezu bestimmen. Es wäre nun allerdings möglich, dass die so definirte Fläche keine wirkliche Fläche 4. Ord. wäre, sondern in Flächen niederer Ordnung zerfiele, wie das z. B. in der That bei Flächen 4. Ord. mit 8 vorgegebenen Knotenpunkten (wenn diese keine specielle Lage besitzen) der Fall ist. Man überzeugt sich jedoch im vorliegenden Falle leicht, dass es im Allgemeinen keine zerfallene Fläche giebt, welche die vorgeschriebenen Singularitäten besitzt, und dass in Folge dessen eine wirkliche Fläche 4. Ord. existirt, welche 6 beliebig gewählte Punkte als Doppelpunkte und einen weiteren beliebigen Punkt als dreifachen Punkt aufweist.

16. Um die Gleichung einer solchen Fläche wirklich aufzustellen, bezeichnen wir den dreifachen Punkt mit $*$ und die Doppelpunkte der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sei ferner $K = 0$ der Kegel durch 1, 2, 3, 4, 5 mit dem Scheitel $*$; $F = 0$ irgend eine Fläche 2. Grades durch die 7 Punkte $*$, 1, 2, 3, 4, 5, 6; $E = 0$ die Ebene durch die drei Punkte $*$, 4, 5; sei endlich $\nabla = 0$ die Fläche 3. Ord. mit den 4 Knotenpunkten $*$, 1, 2, 3, welche durch die drei Punkte 4, 5, 6 einfach hindurchgeht. Dann ist:

$$K \cdot F - \varrho E \cdot \nabla = 0$$

eine Fläche 4. Ord. mit einem dreifachen Punkt in $*$, welche in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 Knoten besitzt und durch den Punkt 6 einfach hindurchgeht. Diese Gleichung besitzt noch 3 willkürliche Constanten, von denen die eine die Constante ϱ ist, während die beiden andern noch in F enthalten sind; sie stellt somit die allgemeinste Fläche dar, welche die angeführten Eigenschaften besitzt. Soll nun der Punkt 6 ebenfalls ein Knotenpunkt dieser Fläche werden, so müssen die Ableitungen der obigen Gleichung, genommen nach x, y, z und w, verschwinden, wenn man darin die Coordinaten des Punktes 6 einsetzt. Da aber F und ∇ alsdann verschwinden, so reduciren sich diese Ableitungen auf:

$$K \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial x} = 0, \quad K \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial z} = 0,$$

$$K \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial y} = 0, \quad K \cdot \frac{\partial F}{\partial w} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial w} = 0,$$

und zwar gebildet mit den Coordinaten des Punktes 6. Hierfür können wir schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \nabla}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial \nabla}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial \nabla}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial w} : \frac{\partial \nabla}{\partial w} = \varrho \cdot \frac{E}{K},$$

wo sich diese Ausdrücke immer auf den Punkt 6 beziehen. Diese Gleichungen sagen aber aus, dass $F = 0$ im Punkte 6 dieselbe Tangentialebene besitzen soll, wie die Fläche $\nabla = 0$, dadurch ist aber

F gerade bestimmt; zugleich ergiebt sich durch die letzte Gleichung eine Bestimmung von ϱ. Wir erhalten somit die Gleichung der gesuchten Fläche, sie hängt nur noch von den Coordinaten ihrer singulären Punkte ab.

17. Nehmen wir nun als singuläre Punkte die 7 Punkte:

$$* = (0, 0, 0, 1), \quad 1 = (1, 0, 0, 0), \quad 2 = (0, 1, 0, 0), \quad 3 = (0, 0, 1, 0),$$

$$4 = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right), \; 5 = \left(\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}\right), \; 6 = (1, 1, 1, 1),$$

so finden wir:

$$K = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}; \qquad E = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \beta'\gamma' & \gamma'\alpha' & \alpha'\beta' \end{vmatrix};$$

$$\nabla = \begin{vmatrix} yzw & zwx & wxy & xyz \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}.$$

Die Tangentialebene der Fläche $\nabla = 0$ im Punkte $6 = (1, 1, 1, 1)$ wird ersichtlich:

$$-\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Fläche 2. Grades $F = 0$ ist aber dadurch bestimmt, dass sie durch die 7 singulären Punkte geht und im Punkte $6 = (1, 1, 1, 1)$ die voranstehende Tangentialebene besitzt. Es ergiebt sich demgemäss als Werth von F die sechsgliedrige Determinante:

$$F = \begin{vmatrix} xy & zw & xz & yw & xw & yz \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma\delta & \alpha\beta & \beta\delta & \alpha\gamma & \beta\gamma & \alpha\delta \\ \gamma'\delta' & \alpha'\beta' & \beta'\delta' & \alpha'\gamma' & \beta'\gamma' & \alpha'\delta' \\ \gamma+\delta & \alpha+\beta & \beta+\delta & \alpha+\gamma & \beta+\gamma & \alpha+\delta \\ \gamma'+\delta' & \alpha'+\beta' & \gamma'+\delta' & \alpha'+\gamma' & \beta'+\gamma' & \alpha'+\delta' \end{vmatrix}.$$

In der That geht die Fläche $F = 0$ durch alle singulären Punkte hindurch, und es bleibt nur noch zu beweisen, dass sie im Punkte 6 die vorgeschriebene Tangentialebene besitzt, oder dass:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial w} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{Vmatrix}$$

ist, wenn man in diesen Ableitungen $x = y = z = w = 1$ setzt. Nun findet man durch eine einfache Rechnung, dass die Ableitungen von F im Punkte $(1, 1, 1, 1)$ identisch werden der Reihe nach mit den dreigliedrigen Determinanten dieser Matrix, abgesehen von einem constanten Factor $\varkappa$, wo:

$$\varkappa = \begin{vmatrix} (\alpha - \delta)(\beta - \gamma), & (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \\ (\alpha' - \delta')(\beta' - \gamma'), & (\alpha' - \gamma')(\beta' - \delta') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' & \beta\beta' & \gamma\gamma' & \delta\delta' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}.$$

Hiermit ist der geforderte Beweis erbracht, und es erübrigt in der Gleichung des Monoids nur noch die Bestimmung von ϱ. Nach den obigen Untersuchungen ist aber:

$$\varrho = K \cdot \frac{\partial F}{\partial x} : E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial x},$$

wenn man hierin $x = y = z = w = 1$ setzt; also kommt für ϱ der Werth:

$$\varrho = \varkappa \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \beta'\gamma' & \gamma'\alpha' & \alpha'\beta' \end{vmatrix}}.$$

Verstehen wir also unter K, F, E, ∇ und ϱ die soeben aufgestellten Ausdrücke, so stellt die Gleichung:

$$K \cdot F - \varrho E \cdot \nabla = 0$$

eine Fläche 4. Ord. mit dem dreifachen Punkt $(0, 0, 0, 1)$ und den 6 Doppelpunkten $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right)$, $\left(\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}\right)$ dar.

18. Diese Fläche hat einige interessante Eigenschaften. Sie enthält offenbar 6 Raumcurven 3. Ord., die durch den dreifachen Punkt und je 5 Knotenpunkte verlaufen; ferner besitzt sie nach Früherem 6 Geraden durch den dreifachen Punkt und je einen Knotenpunkt und längs dieser Geraden constante Tangentialebenen. Jede solche Ebene schneidet noch einen Kegelschnitt aus, der von *einer* jener Raumcurven 3. Ord. in drei Punkten getroffen wird, und zwar von derjenigen Curve, welche den in der Ebene gelegenen Knotenpunkt nicht enthält. Durch die Raumcurve 3. Ord. und den sie drei Mal schneidenden Kegelschnitt kann man aber eine Fläche 2. Grades legen, die das Monoid noch in einer weiteren Curve 3. Ord. schneidet. Diese Curve ist jedoch mit der ersteren Raumcurve 3. Ord. identisch, da sie durch

den dreifachen Punkt und dieselben 5 Knotenpunkte hindurchgehen muss. Es berührt also die Fläche 2. Grades unsere Fläche 4. Ord. längs einer Raumcurve 3. Ord. und schneidet noch einen Kegelschnitt aus. Nun treffen die Geraden der *einen* Erzeugung die Raumcurve 3. Ord. zwei Mal und den Kegelschnitt ein Mal, d. h. sie berühren das Monoid zwei Mal und schneiden es ausserdem noch in einem Punkte. Das ist aber unmöglich, und es folgt daraus, dass die genannte Fläche 2. Grades ein Kegel sein muss. Wir gewinnen also den Satz: *Ein Monoid mit* 6 *beliebig gelegenen Knoten enthält* 6 *Raumcurven* 3. *Ord., die Tangentialebenen in den Punkten einer solchen Curve schneiden sich alle in einem festen Punkte der Curve, umhüllen also einen Kegel* 2. *Ordnung.* Diese Eigenschaft findet sich schon beim Monoid mit nur 5 gewöhnlichen Knotenpunkten, jedoch hier nur *ein* Mal.

19) *Das Monoid mit* 6 *Knotenpunkten besitzt noch die weitere bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die Tangentenkegel* 6. *Ord. aus den Knotenpunkten zerfallen in zwei Kegel* 4. *Ord. mit je einer Doppelkante durch den dreifachen Punkt des Monoids.* Bekanntlich geht die erste Polarfläche, gebildet für einen beliebigen Punkt, durch jeden Doppelpunkt der zu Grunde gelegten Fläche einfach hindurch und besitzt in jedem dreifachen Punkt einen Doppelpunkt. Jeder Tangentenkegel 12. Ord. an unser Monoid besitzt demnach 6 Doppelkanten durch die Doppelpunkte und eine sechsfache Kante durch den dreifachen Punkt desselben. Der Tangentenkegel 6 Ord. aus einem Knotenpunkt besitzt in Folge dessen nur noch *fünf Doppelkanten* und *eine vierfache Kante.* Die zuletzt genannte Reduction tritt ein, weil ein solcher Tangentenkegel das gegebene Monoid längs einer der sechs Geraden durch den dreifachen Punkt berührt. Legt man durch die 5 Doppelkanten und eine beliebige weitere Kante des Tangentenkegels 6. Ord. einen Kegel 3. Ord., welcher die vierfache Kante zur Doppelkante hat, so hat derselbe mit jenem Kegel 6. Ord. $4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 = 19$ Kanten gemein, d. h. der Kegel 3. Ord. bildet einen Theil des Kegels 6. Ord., womit der obige Satz bewiesen ist.

20) Es giebt aber noch eine andere Fläche 4. Ord., welche ebenfalls die Eigenschaft besitzt, dass ihre Tangentenkegel aus den Knotenpunkten in zwei Kegel 3. Ord. zerfallen, nämlich *das Symmetroid**). Es soll nun gezeigt werden, dass *das Monoid* 4. *Ord. mit* 6 *beliebig gelegenen Knotenpunkten nichts Anderes ist, als ein specieller Fall des Symmetroids.* Zu diesem Zwecke werde ich kurz Einiges über das Symmetroid, wie es sich bei Cayley an den citirten Stellen findet, vorausschicken.

*) Cayley, A Memoir on Quartic Surfaces, Proc. of the Lond. Math. Soc. III, p. 19—69; Second Memoir on Quartic Surfaces, ebendaselbst p. 200.

Sind vier Flächen 2. Grades gegeben:

$$\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_\varkappa a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0, \quad \sum b_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0,$$
$$\sum c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0, \quad \sum d_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0,$$

so bestimmen dieselben ein Flächengebüsch:

$$\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_\varkappa (\alpha a_{i\varkappa} + \beta b_{i\varkappa} + \gamma c_{i\varkappa} + \delta d_{i\varkappa}) x_i x_\varkappa = 0,$$

in welchem α, β, γ, δ beliebige Parameter bedeuten. In diesem Flächengebüsch giebt es doppelt unendlich viele Kegel; der Ort ihrer Scheitel wird von der *Jacobi'schen oder Kernfläche* 4. *Grades* der 4 Flächen 2. Grades gebildet. Die Bedingungsgleichung für die Kegel des Gebüsches ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} + \cdots, & \alpha a_{21} + \beta b_{21} + \cdots, & \alpha a_{31} + \beta b_{31} + \cdots, & \alpha a_{41} + \beta b_{41} + \cdots, \\ \alpha a_{12} + \beta b_{12} + \cdots, & \alpha a_{22} + \beta b_{22} + \cdots, & \alpha a_{32} + \beta b_{32} + \cdots, & \alpha a_{42} + \beta b_{42} + \cdots, \\ \alpha a_{13} + \beta b_{13} + \cdots, & \alpha a_{23} + \beta b_{23} + \cdots, & \alpha a_{33} + \beta b_{33} + \cdots, & \alpha a_{43} + \beta b_{43} + \cdots, \\ \alpha a_{14} + \beta b_{14} + \cdots, & \alpha a_{24} + \beta b_{24} + \cdots, & \alpha a_{34} + \beta b_{34} + \cdots, & \alpha a_{44} + \beta b_{44} + \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Fasst man hierin α, β, γ, δ als Coordinaten eines Raumpunktes auf, so stellt diese symmetrische Determinante eine Fläche 4. Ord. mit 10 Knotenpunkten*) dar, welche eindeutig auf die Kernfläche bezogen ist, und welche Cayley als Symmetroid bezeichnet. Ein solches Symmetroid hat die Eigenschaft, dass die Tangentenkegel 6. Ord. aus den Knotenpunkten in zwei Kegel 3. Ord.**) zerfallen.

21) Aus dem Symmetroid lassen sich aber eine Reihe anderer Flächen ableiten, und wir werden in dieser Abhandlung noch verschiedene dieser Flächen anzuführen Gelegenheit haben. Zunächst erkennt man, dass das Symmetroid in eine Fläche mit dreifachem Punkt und 6 Knotenpunkten übergeht, sobald man eine der zu Grund gelegten Flächen 2. Grades, etwa die erste, durch eine doppelt zählende Ebene ersetzt, d. h. sobald man in der Determinante Δ die $a_{i\varkappa}$ durch $a_i a_\varkappa$ ersetzt. Die so entstehende Fläche:

---

*) Cayley, a. a. O. p. 23.

**) Cayley, a. a. O. p. 200.

$$\begin{vmatrix}
\alpha a_1^2 + \beta b_{11} + \cdots, & \alpha a_2\, a_1 + \beta b_{21} + \cdots, & \alpha a_3\, a_1 + \beta b_{31} + \cdots, & \alpha a_4\, a_1 + \beta b_{41} + \cdots, \\
\alpha a_1\, a_2 + \beta b_{12} + \cdots, & \alpha a_2^2 + \beta b_{22} + \cdots, & \alpha a_3\, a_2 + \beta b_{32} + \cdots, & \alpha a_4\, a_2 + \beta b_{42} + \cdots, \\
\alpha a_1\, a_3 + \beta b_{13} + \cdots, & \alpha a_2\, a_3 + \beta b_{23} + \cdots, & \alpha a_3^2 + \beta b_{33} + \cdots, & \alpha a_4\, a_3 + \beta b_{43} + \cdots, \\
\alpha a_1\, a_4 + \beta b_{14} + \cdots, & \alpha a_2\, a_4 + \beta b_{24} + \cdots, & \alpha a_3\, a_4 + \beta b_{34} + \cdots, & \alpha a_4^2 + \beta b_{44} + \cdots,
\end{vmatrix} = 0$$

besitzt in der That den dreifachen Punkt: $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 0 : 0 : 0$, da für dieses Werthsystem nicht nur die Determinante selbst, sondern auch alle ihre zweigliedrigen Unterdeterminanten verschwinden. Einen gewöhnlichen Knotenpunkt besitzt die Fläche in denjenigen Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche alle dreigliedrigen Unterdeterminanten verschwinden, d. h. für welche:

$$\sum \sum (\alpha a_i a_\varkappa + \beta b_{i\varkappa} + \gamma c_{i\varkappa} + \delta d_{i\varkappa})\, x_i x_\varkappa = 0$$

ein Ebenenpaar darstellt. Dann muss aber

$$\sum \sum (\beta b_{i\varkappa} + \gamma c_{i\varkappa} + \delta d_{i\varkappa})\, x_i x_\varkappa = 0$$

einen Kegel darstellen, dessen Scheitel in der Ebene $\Sigma a_i x_i = 0$ liegt. Solcher Kegel giebt es sechs, da die Scheitel aller Kegel, welche durch 8 feste Punkte gehen, auf einer Raumcurve 6. Ord. liegen.

Es ist noch zu zeigen, dass die obige Determinante auch das allgemeinste Monoid mit 6 Knotenpunkten darstellt. Dasselbe besitzt bei vorgegebenem dreifachen Punkte noch $34 - 10 - 6 = 18$ Constanten. In jener Determinante treten zwar noch 34 Constanten auf, sie lassen sich jedoch ebenfalls auf 18 reduciren, wenn wir die Determinante mit einer viergliedrigen Determinante von constanten Elementen multipliciren, wodurch wir 16 Constanten beseitigen können. Die Zahl der Constanten des Monoids stimmt also mit der Zahl der unabhängigen Constanten jener Determinante überein.

22) Bevor ich mich zu der zweiten Art von Monoiden mit 6 Knotenpunkten wende, will ich noch kurz einige specielle Fälle der vorliegenden Fläche erwähnen. Es können die Verbindungslinien des dreifachen Punktes mit den 6 Knotenpunkten auf einem Kegel 2. Grades liegen, dann zerfällt das Monoid in diesen Kegel und eine beliebige Fläche 2. Ord. durch die 7 singulären Punkte.

23) Eine andere Specialisirung tritt ein, wenn 4 von den 6 Knotenpunkten in einer Ebene liegen. Diese Ebene schneidet alsdann das Monoid in zwei Kegelschnitten; die Tangentialebenen in den Punkten dieser Kegelschnitte schneiden sich in je einem Punkt; diese beiden

Punkte liegen auf den Verbindungslinien des dreifachen Punktes mit dem fünften resp. sechsten Knotenpunkt.

24) Liegen von den 6 Knoten drei in einer Geraden, so liegt diese Gerade auf dem Monoid und besitzt eine constante Tangentialebene. Durch den dreifachen Punkt und je zwei der drei Knotenpunkte, die nicht auf der Geraden liegen, geht ein Kegelschnitt des Monoids; die Tangentialebenen in den Punkten desselben gehen durch einen festen Punkt auf der Geraden. Der Tangentialkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt auf der Geraden besteht hier aus zwei Kegeln 3. Ord. mit je einer Doppelkante durch den dreifachen Punkt, welche sich längs jener Geraden berühren. Bei vorgegebenen Singularitäten giebt es noch einfach unendlich viele solcher Flächen.

25) Liegen von den 6 Knotenpunkten 5 in einer Ebene, so müssen sie die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes und zweier Geraden bilden. Diese beiden Geraden besitzen constante Tangentialebenen; die Tangentialebenen in den Punkten des Kegelschnitts umhüllen wie vorher einen Kegel 2. Ord. Der Tangentenkegel 6. Ord. aus demjenigen Knotenpunkte, durch welchen beide Geraden gehen, zerfällt in zwei Kegel 3. Ord. mit je einer Doppelkante durch den dreifachen Punkt, welche sich längs der beiden Geraden berühren. Die Berührungscurve eines solchen Kegels 3. Ord. ist eine ebene Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt. Für die Tangentenkegel aus den übrigen Knotenpunkten gilt Aehnliches wie im vorhergehenden Falle. Bei vorgegebenen Singularitäten giebt es noch doppelt unendlich viele solcher Flächen.

26) Liegen endlich alle 6 Knotenpunkte in einer Ebene, so dass sie die Schnittpunkte von 4 geraden Linien bilden, so sind alle 6 Knotenpunkte von gleicher Beschaffenheit. Die vier Geraden haben wiederum constante Tangentialebenen. Durch jeden Knotenpunkt als Scheitel gehen zwei Tangentenkegel 3. Ord., deren jeder in einer ebenen Curve 3. Ord. berührt; dieselben besitzen je einen Doppelpunkt im dreifachen Punkt der Fläche und gehen noch durch denjenigen Knotenpunkt hindurch, der mit dem Scheitel des zugehörigen Kegels nicht auf einer Geraden der Fläche liegt. Es giebt bei vorgegebenen Singularitäten noch vierfach unendlich viele solcher Flächen, so dass man die constanten Tangentialebenen in jenen vier Geraden noch beliebig fixiren kann. Die Gleichung einer solchen Fläche ist:

$$xyz(x+y+z)+w[\alpha yz(y+z)+\beta zx(z+x)+\gamma xy(x+y)+\delta xyz]=0.$$

Zweite Art. Monoide mit 6 Knotenpunkten auf einem Kegelschnitt.

27) Sie werden durch die Gleichung:

$$K^2-\varrho E\cdot F=0$$

dargestellt, wobei $K=0$ einen Kegel 2. Ord., $F=0$ einen Kegel 3. Ord. von gleichem Scheitel und $E=0$ die Ebene der Knotenpunkte bedeutet. Der Tangentenkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt zerfällt hier in eine Ebene und einen Kegel 5. Ord., der die 5 übrigen Knotenpunkte enthält und eine vierfache Kante durch den dreifachen Punkt des Monoids schickt. Sind die singulären Punkte vorgegeben, so existiren ersichtlich noch vierfach unendlich viele solche Flächen.

Es giebt im Ganzen 21-fach unendlich viele Monoide mit 6 Knotenpunkten. Sie bestehen aus zwei ganz verschiedenen Arten, nämlich aus solchen Monoiden, welche als specieller Fall des Symmetroids anzusehen sind, und aus solchen, deren 6 Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Beide Arten enthalten je 21-fach unendlich viele Monoide; der Uebergang von Monoiden der *einen* Art zu solchen der *andern* Art kann nur durch einen doppelt zu zählenden Kegel 2. Ord. geschehen.

Als Specialfall ist das Monoid zu erwähnen, dessen Berührungskegelschnitt mit den 6 Knotenpunkten in ein Geradenpaar mit je drei Knoten zerfällt. Eine solche Fläche kann noch 6 gerade Linien besitzen, durch jeden Knotenpunkt eine, wie das überhaupt bei allen Monoiden mit 6 Knoten eintreten kann.

Einige Monoide mit biplanaren Knotenpunkten.

28) Wir haben bereits im ersten Capitel erwähnt, dass die 12 Hauptgeraden des Monoids als Schnittgeraden zweier Kegel $u_3=0$, $u_4=0$ gewisse Bedingungen erfüllen müssen; besonders ist die zwölfte Gerade durch die elf übrigen mitbestimmt, und zwar durch eine lineare Gleichung. Genau dasselbe findet statt, wenn die Kegel sich berühren, osculiren, u. s. w., so dass von den Hauptgeraden 2, 3, u. s. w. gelegentlich zusammenrücken; nur muss alsdann die gegenseitige Lage der consecutiven Geraden bekannt sein; mit anderen Worten: man muss nicht nur die Lage der Geraden, sondern auch die Werthe der ersten, zweiten, u. s. w. gemeinsamen Differentialquotienten von u_3 und u_4 für diese Gerade kennen. Mit Hilfe der elliptischen Functionen kann man die diesbezüglichen Fragen auch noch lösen, wenn es überhaupt keine einfache Schnittgerade von $u_3=0$ und $u_4=0$ mehr giebt, d. h. wenn sich die Kegel, wo sie sich treffen, mindestens berühren. Allerdings ist die Gleichung zwischen den Coordinaten dieser Geraden nicht mehr so beschaffen, dass sie eine eindeutige Bestimmung *einer* Geraden durch die übrigen vermittelt, vielmehr wird diese Bestimmung vieldeutig. Aus dem Gesagten erhellt, dass es eine ziemlich verwickelte Aufgabe sein wird, die allgemeine Gleichung eines Monoids mit vorgegebenen singulären Punkten (gewöhnliche Knotenpunkte, Punkte B_3, B_4, ...) aufzustellen. Wir werden desshalb hier nicht

auf diese allgemeine Frage eingehen, sondern nur einige ganz specielle hierher gehörige Flächen anführen.

29) Das Monoid $wu_3 + g^4 = 0$, wo g einen linearen Ausdruck in x, y, z bezeichnet, besitzt drei biplanare Knotenpunkte B_4 in gerader Linie und längs dieser Geraden die constante Tangentialebene $w = 0$, welche die Fläche hyperosculirt längs der ganzen Geraden. Ist $g = 0$ speciell die Ebene, welche die 3 reellen Wendekanten des Kegels $u_3 = 0$ enthält, so giebt es durch jeden Knotenpunkt noch eine reelle Gerade und diese 3 Geraden liegen in einer Ebene. Der Tangentenkegel aus einem der Knotenpunkte zerfällt hier in die beiden singulären Ebenen und einen Kegel 4. Ord. mit dreifacher Kante.

Ein Monoid mit zwei biplanaren Knotenpunkten B_6 erhält man z. B. aus $wu_3 + g_1^2 g_2^2 = 0$, wenn man für $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ zwei Wendetangentialebenen des Kegels $u_3 = 0$ einsetzt.

30) Monoide mit einem biplanaren Knotenpunkte B_{12} giebt es drei verschiedene Arten. Die Gleichung $wu_3 + \varrho u_4 = 0$ stellt eine solche Fläche dar, wenn die beiden Kegel $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ zwölf *consecutive* Kanten gemein haben. Es liegen aber auf einem Kegel 3. Ord. $u_3 = 0$ noch 12 reelle Kanten, in denen ein Kegel 4. Ord. eine derartige Berührung eingehen kann, so dass der Kegel 3. Ord. noch ganz beliebig gewählt werden kann. Ebenso stellt $wu_3 + \varrho u_2^2 = 0$ ein Monoid mit einem B_{12} dar, wenn $u_2 = 0$ einen Kegel 2. Ord. bedeutet, der mit $u_3 = 0$ sechs *consecutive* Kanten gemeinsam hat; es giebt auf $u_3 = 0$ noch 7 reelle Kanten, in denen eine solche Berührung stattfinden kann. Endlich ist auch $wu_3 + g^4 = 0$ ein Monoid mit einem B_{12}, wenn $g = 0$ eine der drei reellen Wendetangentialebenen bedeutet. Das *erstgenannte* Monoid mit einem B_{12} erhält man als einen Specialfall des Monoids *erster* Art mit 6 conischen Knoten, indem man diese Knotenpunkte continuirlich verschiebt, bis sie einander unendlich nahe gerückt sind; diese Fläche besitzt demnach die daselbst angegebenen Eigenschaften, sie ist also insbesondere ein specielles Symmetroid. Das Monoid $wu_3 + \varrho u_2^2 = 0$ mit einem B_{12} ist ein specieller Fall des Monoids mit 6 conischen Knoten auf einem Kegelschnitte.

Die Gestalten der Monoide mit einem allgemeinen dreifachen Punkte.

31) In den beiden nächsten Capiteln soll eine vollständige Scheidung aller Monoide 4. Ord. mit einem allgemeinen dreifachen Punkt, soweit dieselben gestaltlich verschieden sind, durchgeführt werden, und wir wollen deshalb in diesem Capitel das zu einer solchen Scheidung nothwendige Material zu gewinnen suchen. Vorher ist es jedoch erforderlich, eine Definition für *gestaltlich gleiche Flächen* zu geben.

Diese Definition kann noch in verschiedener Weise aufgestellt werden. In der Functionentheorie betrachtet man zwei Flächen als gestaltlich gleich, wenn sie durch stetige Deformationen in einander übergeführt werden können, ganz einerlei ob die Uebergangsflächen sich durch algebraische Gleichungen darstellen lassen oder nicht. Eine solche Definition könnte man auch hier beibehalten, jedoch scheint dieselbe bei der Frage nach den Gestalten der durch eine algebraische Gleichung dargestellten Flächen nicht zweckmässig zu sein. Wir werden aus diesem Grunde die folgende Festsetzung*) treffen. *Zwei Flächen sind gestaltlich gleich, wenn sie durch stetige Aenderung der Constanten ihrer Gleichungen in einander übergeführt werden können, sodass während der ganzen Ueberführung niemals eine Singularität der Fläche verschwindet oder eine neue entsteht; wir wollen diese Aenderung kurz als stetige algebraische Aenderung bezeichnen.*

32) Betrachten wir nun die vierfach unendlich vielen Monoide, welche die nämlichen Hauptgeraden besitzen. Wir greifen irgend zwei aus diesen Monoiden heraus, sie schneiden sich ausser in den 12 Geraden noch in einer ebenen Curve 4. Ord. Jeder Strahl durch den dreifachen Punkt weist einem reellen Punkt der einen Fläche einen reellen Punkt der andern Fläche zu, einer ebenen Curve der einen Fläche entspricht eine ebene Curve der andern Fläche. Die beiden Monoide sind demnach perspectivisch auf einander bezogen; der gemeinsame dreifache Punkt ist das Centrum und die Ebene der gemeinsamen Curve 4. Ord. die Ebene der Perspective. Die Perspective ist völlig bestimmt, wenn ein Paar entsprechende Punkte gegeben sind; dadurch wird das der Perspective eigenthümliche Doppelverhältniss bestimmt. Ist das Doppelverhältniss gleich $+1$, so sind die beiden auf einander bezogenen Monoide identisch, ist es dagegen gleich -1, so sind die Monoide perspectivische Spiegelbilder von einander. Jede Perspective mit positivem Doppelverhältniss kann stetig in eine solche mit dem Doppelverhältniss $+1$, jede Perspective mit negativem Doppelverhältniss aber in eine solche mit dem Doppelverhältniss -1 übergeführt werden (die Grenzen 0 und ∞ darf das Doppelverhältniss nicht überschreiten, da dann die Perspective keine Bedeutung mehr hat). Bei positivem Doppelverhältniss der Perspective können also die Monoide stetig in einander übergeführt werden; bei negativem Doppelverhältniss lässt sich jedes Monoid in das perspectivische Spiegelbild des andern überführen. Die perspectivische Spiegelung lässt sich aber folgendermassen in eine gewöhnliche Spiegelung verwandeln. Man nimmt als Ebene der Perspective die unendlich ferne Ebene, dann liegen je zwei entsprechende Punkte gleich weit

*) Vergl. Klein, Math. Annalen: Flächen dritter Ordnung, Bd. VI, p. 560.

vom Centrum der Perspective ab; die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier sich entsprechender Monoide werden alle in dem gemeinsamen dreifachen Punkte halbirt. Dreht man eines dieser beiden Monoide um 180 Grad um irgend eine Axe durch den dreifachen Punkt, so wird dasselbe ein Spiegelbild des andern im gewöhnlichen Sinne; die spiegelnde Ebene geht durch den dreifachen Punkt und steht auf der Drehaxe senkrecht. Das Resultat fassen wir in den Satz zusammen: *Alle Monoide 4. Ord., welche die gleichen Hauptgeraden besitzen, zerfallen in zwei Gruppen. Die Monoide jeder Gruppe können durch stetige algebraische Aenderung in einander übergeführt werden, sie sind gestaltlich gleich; die eine Gruppe besteht aus den Spiegelbildern der andern Gruppe.*

33) Bei der gestaltlichen Discussion der Monoide kommt es also lediglich auf die Lage der 12 Hauptgeraden an, da alle Monoide mit gemeinsamen Hauptgeraden entweder direct oder nach vorgenommener Spiegelung gestaltlich gleich sind. Ist nun irgend eine Gruppirung der Hauptgeraden gegeben, wobei auch mehrere Geraden zusammenfallen können, so ändere man die Lage derselben stetig auf dem Kegel 3. Ord. so, dass sie immer durch einen Kegel 4. Ord. ausgeschnitten werden können. Wird bei dieser stetigen Lagenänderung darauf gesehen, dass Geraden, welche ursprünglich zusammenfielen, dieses auch auf ihrer ganzen Wanderung thun, und dass niemals zwei Geraden zusammenrücken, welche ursprünglich getrennt lagen, so sind die zugehörigen Monoide von *gleicher Gestalt*, abgesehen von einer etwaigen Spiegelung. Denn der stetigen Aenderung der 12 Hauptgeraden entspricht eine stetige Aenderung der Monoide; dabei bleiben die vorhandenen Singularitäten (Doppelpunkte, B_3, B_4, ...) erhalten, und es treten weder neue Singularitäten auf, noch tritt eine Erhöhung der bereits vorhandenen ein, da getrennte Geraden immer getrennt bleiben. Nach der Definition sind alsdann alle so aus einander abgeleiteten Monoide *gleich* hinsichtlich ihrer Gestalt.

34) Nach dem Vorstehenden sind wir im Stande zu erkennen, wann zwei Monoide mit gleichem Tangentialkegel im dreifachen Punkt von gleicher und wann sie von verschiedener Gestalt sind. Es erübrigt uns noch solche Monoide hinsichtlich ihrer Gestalt zu vergleichen, welche im dreifachen Punkte verschiedene Tangentialkegel besitzen. Dazu sei bemerkt, dass ein Kegel 3. Ord. nur eine einzige absolute Invariante besitzt, und dass alle Kegel von gleicher Invariante durch eine reelle lineare Transformation mit positiver Determinante in einander übergeführt werden können. Ein Kegel 3. Ord. kann nun *eintheilig* oder *zweitheilig* sein; alle *eintheiligen* Kegel können durch stetige algebraische Aenderung in einander übergeführt werden; Gleiches gilt für die *zweitheiligen* Kegel 3. Ord. Nun nehmen wir einen Kegel

3. Ord. mit 12 Geraden an, welche durch einen Kegel 4. Ord. ausgeschnitten werden und theilweise zusammenfallen können. Verwandelt man diesen Kegel durch stetige Aenderung in einen neuen Kegel 3. Ord., so können zugleich die 12 Geraden stetig in 12 Geraden des neuen Kegels von gleicher Gruppirung übergeführt werden. Und zwar kann man dies immer erreichen, ohne dass inzwischen einmal zwei getrennte Geraden zusammenfallen oder zwei sich ursprünglich deckende Geraden auseinander rücken; denn von den 12 Geraden wird nur verlangt, dass sie sich stetig ändern, im Uebrigen sind diese Aenderungen beliebig, nur die zwölfte Gerade ist durch die andern elf mitbestimmt.

Für die weiteren Betrachtungen genügt es also, Monoide 4. Ord. mit *eintheiligem* und solche mit *zweitheiligem* Tangentialkegel im dreifachen Punkt zu unterscheiden; dagegen sind weitere Unterscheidungen überflüssig. Wir wollen sie dementsprechend kurz als *eintheilige und zweitheilige Monoide* bezeichnen. Um alle von einander verschiedenen Gestalten zu erhalten, genügt es, wie wir soeben gesehen haben, für die eintheiligen sowie für die zweitheiligen Monoide einen ganz bestimmten Tangentialkegel im dreifachen Punkte anzunehmen.

35) Die Frage nach allen gestaltlich verschiedenen zweitheiligen Monoiden deckt sich mit der Frage nach allen Gruppen von 12 Hauptgeraden auf einem zweitheiligen Kegel 3. Ord., welche nicht in der oben angegebenen Weise stetig ineinander übergeführt werden können; ganz analog ist es bei den eintheiligen Monoiden. Zur bequemeren Beantwortung dieser letzteren Frage mag hier noch Folgendes stehen. Wir gehen von einem ganz bestimmten zweitheiligen Kegel 3. Ord. aus, das zugehörige elliptische Integral bezeichnen wir mit u und seine Perioden mit ω und $i\omega'$. Dann können wir auf dem paaren sowie auf dem unpaaren Kegelmantel eine positive und eine negative Bewegungsrichtung unterscheiden, je nachdem die Parameter der erzeugenden Geraden bei der Bewegung zu- oder abnimmt. Sind nun auf dem paaren Mantel λ Geraden gelegen, von denen auch mehrere zusammenfallen können, und ist die Summe ihrer Parameter congruent Null modulo Perioden, so kann man es durch eine stetige Verschiebung der Geraden, bei welcher die Parametersumme beständig congruent Null bleibt und die Reihenfolge der Geraden nicht geändert wird, erreichen, dass die λ Geraden einander beliebig nahe rücken und dass eine beliebige unter ihnen zur ersten Geraden wird, d. h. den kleinsten Parameter erhält. Zu diesem Ende bewegt man diejenige Gerade, welche zur ersten werden soll, auf dem Kegelmantel in positiver Richtung bis in die unmittelbare Nähe der zweiten, dann bewegt sich gleichzeitig eine Gerade, etwa die letzte, in negativer Richtung, also gegen die vorletzte hin, da die Summe der Parameter constant

bleiben soll. Jetzt bewegt man die erste Gerade sammt der zweiten bis in die Nähe der dritten, hierauf die drei Geraden bis in die Nähe der vierten u. s. w.; indessen bewegt sich die letzte Gerade bis in die Nähe der vorletzten, beide bis in die Nähe der drittletzten u. s. w., bis schliesslich alle λ Geraden sich an einer und derselben Stelle des paaren Kegelmantels zusammendrängen. Die Stelle, wo ein solches Zusammendrängen der λ Geraden stattfindet, muss ersichtlich eine der Kanten $m\frac{\omega}{\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$ sein, wenn m eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda$ bedeutet. Ein ganz analoges Resultat lässt sich für den unpaaren Mantel eines Kegels 3. Ord. gewinnen, ganz abgesehen davon, ob derselbe einem eintheiligen oder zweitheiligen Kegel angehört.

Monoide ohne Knotenpunkte; $u_3 = 0$ ein allgemeiner Kegel 3. Ordnung.

36. Wir haben bereits im vorigen Capitel die Monoide in *eintheilige* und *zweitheilige**) geschieden, je nachdem der Tangentialkegel im dreifachen Punkt ein- oder zweitheilig ist. Zunächst werden wir nun die zweitheiligen Monoide einer gestaltlichen Untersuchung unterwerfen, auf die eintheiligen Monoide wird sich dieselbe alsdann leicht übertragen lassen. Liegen von den 12 Hauptgeraden des Monoids 2λ auf dem paaren Mantel 2μ auf dem unpaaren Mantel und sind 2ν conjugirt imaginär, wobei auch eine oder zwei Zahlen gleich Null sein können, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass die Summe der Parameter der 2λ Geraden des paaren Mantels für sich und ebenso der 2μ Geraden des unpaaren Mantels für sich congruent Null ist. Denn man kann den allgemeinen Fall durch stetige Verschiebung der Geraden immer auf jenen Fall zurückführen, so dass bei dieser Verschiebung getrennte Geraden stets getrennt bleiben und die Summe aller 12 Parameter beständig congruent Null ist; eine derartige Operation hat aber, wie wir in Nr. 33 gesehen haben, keinen Einfluss auf die Gestalt des Monoids.

37) Hier handelt es sich um Monoide ohne Knotenpunkte, d. h. um Monoide, deren Hauptgeraden sämmtlich von einander getrennt liegen. Nach Nr. 36 und Nr. 35 kann man aber jedes Monoid in ein gestaltlich gleiches verwandeln, dessen reelle Hauptgeraden sich theilweise an einer Kante des paaren und theilweise an einer Kante des unpaaren Mantels zusammendrängen; und zwar ist es auf dem paaren Mantel eine der Kanten: $m\frac{\omega}{2\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$ und auf dem unpaaren eine der Kanten: $n\frac{\omega}{2\mu}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2\lambda;\ n = 1, 2, \ldots, 2\mu)$. Da

*) Es soll hiermit durchaus nicht gesagt sein, dass ein solches Monoid aus zwei getrennten Theilen besteht.

aber im vorliegenden Falle die 2λ Geraden des paaren Mantels alle von einander getrennt sind, so kann man dieselben, je nachdem man die eine oder die andere von ihnen zur ersten Geraden macht, an jeder der 2λ Stellen $m\frac{\omega}{2\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$ anhäufen, also etwa an der Stelle $\frac{i\omega'}{2}$. Ebenso lassen sich die Geraden des unpaaren Mantels immer an der Stelle 0 anhäufen. Daraus folgt aber unmittelbar, dass alle zweitheiligen Monoide ohne Knotenpunkte gestaltlich gleich sind, wenn sie in den Zahlen 2λ, 2μ und 2ν übereinstimmen, dass sie aber gestaltlich verschieden sind, wenn dieses nicht der Fall ist. Denn im ersteren Falle kann man zunächst die imaginären Geraden der Monoide zur Deckung bringen und dann auch die reellen Geraden.

Nur wenn alle Geraden imaginär sind, lässt sich dieses nicht mehr erreichen, vielmehr giebt es in diesem Falle noch zwei verschiedene Arten von Monoiden. Die Parameter von conjugirt imaginären Geraden sind nämlich selbst conjugirt imaginär; bezeichnen wir sie mit $a_\varkappa + ib_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, 6$, so ist $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \ (\text{mod. } \omega)$. Je nachdem nun $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \ (\text{mod. } 2\omega)$ oder $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv \omega \ (\text{mod. } 2\omega)$, erhält man gestaltlich verschiedene Monoide: denn der eine Fall kann nicht stetig in den andern übergeführt werden, da dieses eine Aenderung *einer* der Grössen $a_\varkappa$ um $\frac{\omega}{2}$ erfordert.

38) Ueber diese Monoide mit 12 imaginären Hauptgeraden soll sofort noch Einiges gesagt werden. Lässt man die 12 imaginären Geraden paarweise zusammenrücken, so erhält man ein Monoid mit 6 imaginären Knotenpunkten; und zwar liegen die Knotenpunkte im Falle $\sum 2a_\varkappa \equiv \omega \ (\text{mod. } 2\omega)$ beliebig und das Monoid ist *erster Art*, im entgegengesetzten Falle liegen sie auf einem Kegelschnitt und das Monoid ist *zweiter Art.*

Bei den Monoiden mit drei Paar conjugirt imaginären Knotenpunkten, welche auf einem Kegelschnitte liegen, berührt die Ebene des Kegelschnitts das Monoid längs desselben. Zieht man also in dieser Ebene eine Gerade, welche den Kegelschnitt nicht trifft, und legt durch diese Gerade zwei Ebenen, welche jener benachbart sind aber zu verschiedenen Seiten liegen, so wird die *eine* Ebene das Monoid in zwei in einander liegenden Ovalen (Gürtelcurve), die *andere* aber dasselbe gar nicht schneiden. Es giebt also bei dieser Art von Monoiden Ebenen, welche dasselbe überhaupt nicht treffen. Mit Hilfe der Gesetze der Continuität lässt sich dann zeigen, dass die Monoide ohne Knotenpunkte mit 12 imaginären Geraden in 2 Classen mit

folgenden Eigenschaften zerfallen. Die Monoide der einen Classe, für welche $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv \omega \,(\text{mod. } 2\omega)$ ist, werden von jeder Ebene in einer reellen Curve geschnitten, während bei den Monoiden der andern Classe, für welche $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \,(\text{mod. } 2\omega)$ ist, Ebenen existiren, welche dasselbe nicht in reellen Curven schneiden. Wir werden alsbald noch einmal darauf zurückkommen.

39) Nachdem so das nöthige Material zur gestaltlichen Discussion der *zweitheiligen* Monoide gewonnen ist, ist es ein Leichtes auch die *eintheiligen* Monoide in dieser Richtung zu behandeln. Das elliptische Integral eines eintheiligen Kegels 3. Ord. besitzt die Perioden*) ω und $\frac{\omega + \omega' i}{2}$; die reellen Integralwerthe bilden die Parameter der Erzeugenden des reellen Mantels; conjugirt imaginäre Integralwerthe gehören conjugirt imaginären Geraden zu. Die Fälle, wo die 12 Hauptgeraden des Monoids alle reell sind, oder wo sie theilweise reell und theilweise imaginär sind, erledigen sich genau wie beim zweitheiligen Monoid, nur dass hier bloss *ein* reeller Mantel des Tangentialkegels existirt. Der Fall, wo die 12 Hauptgeraden paarweise conjugirt imaginär sind, liefert bei den eintheiligen Monoiden nur noch eine einzige Flächenart, da die Bedingungen

$$\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \,(\text{mod. } 2\omega) \quad \text{und} \quad \sum_1^6 2a_\varkappa \equiv \omega \,(\text{mod. } 2\omega)$$

nicht mehr von einander verschieden sind. Denn ändert man $a_1 + ib_1$ um die Periode $\frac{\omega + i\omega'}{2}$ und $a_1 - ib_1$ und die Periode $\frac{\omega - i\omega'}{2}$, was man ja immer darf, so sind die so gebildeten neuen Werthe wieder conjugirt imaginär, aber ihre Summe hat sich nur um ω geändert, so dass jene Bedingungsgleichungen in einander übergehen.

40) Wir haben in Nr. 32 gesehen, dass alle Monoide, welche die 12 Hauptgeraden gemeinsam haben, in zwei Gruppen zerfallen; die Monoide jeder Gruppe sind unter sich gestaltlich gleich, die eine Gruppe besteht aus den Spiegelbildern der andern Gruppe. Es soll nun bewiesen werden, dass die Monoide ohne Knotenpunkte mit ihren Spiegelbildern von gleicher Gestalt sind. Geht man nämlich von einem beliebigen Monoid ohne Knotenpunkte aus, so kann man dasselbe stetig so ändern, dass der Tangentialkegel im dreifachen Punkt durch passende Spiegelung in sich selbst übergeht. Ferner kann man es durch weitere stetige Aenderung im früheren Sinne

*) Harnack, Math. Annalen Bd. IX, p. 18.

offenbar dahin bringen, dass die 12 Hauptgeraden symmetrisch zur spiegelnden Ebene liegen, und endlich kann man es erreichen, dass das Monoid selbst symmetrisch zu dieser Ebene liegt. Wenn aber ein Monoid in sich selbst gespiegelt werden kann, so ist jedes daraus durch Continuität abgeleitete Monoid mit seinem Spiegelbild von gleicher Gestalt und somit unsere Behauptung erwiesen. Daraus folgt denn weiter, *dass alle Monoide ohne Knotenpunkte, welche in ihren Hauptgeraden übereinstimmen, von gleicher Gestalt sind;* und allgemeiner, *dass alle Monoide ohne Knotenpunkte, welche in der Zahl ihrer reellen Geraden und deren Vertheilung auf den paaren und unpaaren Mantel des Kegels 3. Ord. übereinstimmen, von gleicher Gestalt sind.*

41) Man erhält gemäss diesen Auseinandersetzungen 36 verschiedene Monoide mit allgemeinem dreifachen Punkt und ohne Knotenpunkte; davon sind 29 *zweitheilig* und 7 *eintheilig*. Die sieben eintheiligen Monoide sind dadurch charakterisirt, dass von den 12 Hauptgeraden resp. 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0 Geraden reell sind. Bei den zweitheiligen Monoiden kommt es noch darauf an, wie viele von den reellen Geraden auf dem paaren und wie viele auf dem unpaaren Mantel des Kegels 3. Ord. liegen. Je nachdem 12, 10, 8, 6, 4 oder 2 Geraden reell sind und jenachdem sie sich auf den paaren und den unpaaren Kegelmantel vertheilen, erhält man 27 verschieden gestaltete Monoide. Dazu kommen noch zwei verschiedene zweitheilige Monoide ohne reelle Geraden, und hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft.

42) *Versuchen wir es jetzt, uns ein klares Bild von den einzelnen hier aufgezählten Monoiden zu entwerfen.* Wir beginnen mit den beiden *zweitheiligen* Monoiden ohne reelle Geraden, ein einfacher Process wird uns dann aus diesen Flächen alle übrigen abzuleiten gestatten.

Die Osculationsebenen des Tangentialkegels im dreifachen Punkt bilden ein Dreiflach oder eine körperliche Ecke, die durch eine reelle lineare Transformation mit positiver Determinante in eine gleichwinklige Ecke verwandelt werden kann. Die Gerade, in der sich die Winkel halbirenden Ebenen dieser Ecke schneiden, wollen wir dann als die Axe der Ecke bezeichnen, sie kann zugleich als die Axe des Kegels 3. Ord. aufgefasst werden; jede Ebene senkrecht zur Axe schneidet den Kegel in einer Curve 3. Ord. von der in Figur 1 verzeichneten Gestalt. Denken wir uns die Axe vertical gestellt und legen wir durch dieselbe verschiedene Ebenen. Jede solche Ebene schneidet ein zu dem Tangentialkegel 3. Ord. gehöriges Monoid in einer Curve 4. Ord. mit dreifachem Punkte, deren drei Tangenten in diesem Punkte jenem Kegel angehören. Die Curven 4. Ord. können aber hier zwei wesentlich verschiedene Gestalten besitzen, sowie sie in Figur 2 und 3 angegeben sind. Es wird nicht überflüssig sein zu bemerken, dass die einzelnen Curventheile auch durch's Unendliche

gehen können, wie in den Figuren 5α und 6α; jedoch ist das unendlich Ferne, da es durch Projection in's Endliche gerückt werden kann, hierbei nicht von Belang. Das Charakteristische der beiden Curven besteht ersichtlich darin, dass die Curve 3 von jeder Geraden in reellen Punkten getroffen wird, während dieses bei den Curven 2 und 5α oder 6α nicht der Fall ist. Die Curve 3 verläuft desshalb stets durch's Unendliche, die Curve 2 oder 5α oder 6α kann dagegen stets in's Endliche gebracht werden; wir bezeichnen in Folge dessen *jene Curven 4. Ord. kurz als unendliche und diese als endliche Curven.*

Lassen wir nun eine Ebene um die verticale Axe sich drehen, so wird die Schnittcurve in dieser Ebene sich stetig ändern, indem die Tangenten a, b und c auf dem Tangentialkegel fortrücken. Die Tangenten a und b liegen auf dem *paaren*, die Tangente c auf dem *unpaaren* Kegelmantel, so dass nach einer Drehung der Ebene um 180 Grad die Tangente a in b und b in a, die Tangente c aber in sich übergeht.

43) Wir haben es hier mit Monoiden ohne reelle Geraden zu thun, ist also die Schnittcurve einer Ebene durch die Axe eine *endliche* Curve 4. Ord., so bleibt sie bei der Drehung der Ebene um die Axe stets eine endliche Curve. Denn die endliche und unendliche Curve 4. Ord. mit dreifachem Punkt können nur dadurch in einander übergehen, dass sie in eine Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt und eine Gerade durch diesen degeneriren. Ebenso wird die Schnittcurve in jeder Ebene durch die Axe eine *unendliche* sein, wenn sie es in irgend *einer* solchen Ebene ist. Auf diese Weise ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Monoide ohne reelle Geraden; das eine wird von jeder Ebene durch die verticale Axe in einer *endlichen*, das andere in einer *unendlichen* Curve 4. Ord. geschnitten. Zur Unterscheidung sprechen wir von *einem endlichen und einem unendlichen**) *Monoid ohne reelle Geraden;* es deckt sich diese Unterscheidung offenbar mit derjenigen in Nr. 38.

Bedenkt man, dass das *endliche* Monoid von jeder Ebene durch die Axe in einer Curve, wie sie Figur 2 zeigt, geschnitten wird, so erkennt man, dass dasselbe aus zwei getrennten Flächentheilen besteht, welche nur in dem dreifachen Punkt aneinander stossen. *Der eine Theil hat eine tropfenförmige Gestalt, der andere eine trichterförmige;* beide Theile können natürlich noch Ausbuchtungen besitzen.

*) In der Topologie der Flächen spricht man von unpaaren und paaren Flächen; die letzteren theilt man weiter in Flächen ein, auf denen sich unpaare Curven ziehen lassen, und in solche, bei denen dies nicht der Fall ist, was ich hier durch *endlich* und *unendlich* bezeichnet habe. Vergl. Klein, Math. Annal. Bd. VI, p. 577 f.

Aus Figur 3 erkennt man, dass auch das *unendliche* Monoid aus zwei Theilen besteht, nämlich aus *einem endlichen tropfenförmigen und aus einem unendlichen Flächentheil*, dessen ungefähre Form man durch Rotation der Curve in Figur 3 um die Axe erhält.

Aus dem *endlichen zweitheiligen* Monoid erhält man das *eintheilige* Monoid ohne reelle Geraden, wenn man den tropfenförmigen Theil sich völlig zusammenziehen und dann die trichterförmige Vertiefung nach dem dreifachen Punkt der Fläche etwas von diesem zurückweichen lässt; jede Ebene durch die Axe schneidet eine Curve aus, wie sie Figur 4 zeigt. Durch eine analoge Operation kann man dieses eintheilige Monoid auch aus dem *unendlichen zweitheiligen* Monoid erhalten. *Das eintheilige Monoid ohne reelle Geraden ist demnach stets endlich und besteht aus einem einzigen Flächentheil.*

44) Wir verlassen jetzt die Monoide ohne reelle Geraden und wenden uns den *Monoiden mit reellen Geraden* zu und zwar zunächst den *zweitheiligen* Flächen dieser Art. Wiederum lassen wir eine Ebene sich um die schon oben definirte Axe drehen und untersuchen die Schnittcurve dieser Ebene mit der Fläche. So oft die Ebene bei ihrer Drehung eine Gerade des Monoids passirt, zerfällt die Schnittcurve 4. Ord. in diese Gerade und eine Curve 3. Ord., welche als Uebergangsstadium der *endlichen* Curve in die *unendliche* — und umgekehrt — aufzufassen ist. Die Gerade, welche sich von der Schnittcurve abtrennt, fällt mit einer der drei Tangenten a, b oder c zusammen, und der diese Tangente berührende Ast der Curve 4. Ord. kehrt beim Durchgang durch die Uebergangscurve seine Krümmungsrichtung um. Man kann desshalb eine Ebene durch die Axe immer so legen, dass die beiden Aeste, welche die Tangente a resp. b berühren, der Axe ihre concave Seite zukehren. Geht man von einer solchen Ebene aus, so hat die Schnittcurve die in Figur 2 resp. 3 verzeichnete Gestalt. Wir wollen nun die Aenderungen untersuchen, die diese Curve erfährt, wenn man die Ebene der Curve um die verticale Axe dreht, so dass sie die Geraden des Monoids der Reihe nach passirt. Die Geraden des Monoids können nun auf dem paaren oder auf dem unpaaren Mantel des Tangentialkegels liegen, und wir müssen dementsprechend zwei verschiedene Fälle unterscheiden.

45) Angenommen es liegen *zwei* Geraden auf dem *paaren* Mantel; wir gehen alsdann von der Figur 2 aus oder der Bequemlichkeit halber von der Figur 5α, in welcher die Schleife bereits durch's Unendliche gezogen ist. Das Monoid, dem diese Curve angehört, mag aus irgend einem Material, etwa Gyps, hergestellt sein; desshalb ist der Schnitt, soweit er durch den Gyps geht, schraffirt, um so die Vorstellung zu erleichtern. Dreht man die Ebene um die verticale Axe, so geht die Schnittcurve 5α continuirlich in 5β, und dann in 5γ über, um bei

weiterer Drehung abermals die Phase 5β und dann 5α zu durchlaufen. Hiermit ist der Cyklus aller Phasen, welche sich bei einer continuirlichen Drehung um 180 Grad ergeben, geschlossen. Das Ergebniss lässt sich kurz zusammenfassen. Der trichterförmige Theil B und der tropfenartige Theil A, welche bei dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden existiren, hängen hier an der Stelle C zusammen, während sie vorher getrennt waren. *Aus dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden erhält man das Monoid mit zwei reellen Hauptgeraden auf dem paaren Kegelmantel, wenn man den trichterförmigen und den tropfenförmigen Flächentheil an einer Stelle durchs Unendliche hindurch zusammenwachsen lässt.* Zu ganz derselben Fläche muss man gelangen und gelangt man, wenn man bei dem *unendlichen* Monoid ohne reelle Geraden die beiden Flächentheile an einer Stelle zusammenwachsen lässt. Denn alle Monoide mit nur zwei reellen Geraden auf dem paaren Kegelmantel sind gestaltlich gleich.

46. Angenommen, es liegen *zwei* Geraden auf dem *unpaaren* Mantel, und gehen wir auch hier von der Figur 2 aus, die wir bequemer in der Gestalt 6α voraussetzen. Eine Drehung der Ebene um die verticale Axe liefert hier der Reihe nach die Phasen 6α, 6β, 6γ, 6β, 6α, womit hier der Cyklus geschlossen ist. Es hängt hier der trichterförmige Theil B — der allerdings hier kaum mehr seinen Namen verdient — mit sich selbst zusammen. Mit anderen Worten: *Aus dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden entsteht das Monoid mit zwei reellen Hauptgeraden auf dem unpaaren Kegelmantel, wenn man den trichterförmigen Theil durchs Unendliche hindurch mit sich selbst an einer Stelle C zusammenwachsen lässt.* Dieselbe Fläche würde man auch erhalten, wenn man von dem *unendlichen* Monoid ohne reelle Geraden ausginge und den unendlichen Flächentheil an einer Stelle mit sich selbst zusammenwachsen liesse.

47. Angenommen endlich es liegen $2\varkappa$ Geraden auf dem *paaren* und 2λ Geraden auf dem *unpaaren* Mantel des Kegels 3. Ord., so erhält man die Gestalt eines zugehörigen Monoids auf folgende Weise: *Man gehe von dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden aus, lasse den tropfenförmigen Theil an $\varkappa$ Stellen mit dem ringförmigen Theil und diesen letzteren an λ Stellen mit sich selbst durchs Unendliche zusammenwachsen, so erhält man ein Bild von der Gestalt unserer Fläche.* Dass das Gesagte seine Richtigkeit hat, überlegt sich der Leser leicht selbst, ich unterlasse es hier diese so einfachen Betrachtungen auszuführen.

Das Gesagte bezog sich immer auf zweitheilige Monoide und kann mit ganz geringen Modificationen auf eintheilige Monoide übertragen werden; es ist überflüssig hier darauf einzugehen.

Monoide mit Knotenpunkten; $u_3 = 0$ ist ein allgemeiner Kegel 3. Ordnung.

48. Im weiteren Verlauf dieser Abhandlung wird sich zeigen, *dass man alle Monoide mit beliebigen Singularitäten*, sei es, dass dieselben vom dreifachen Punkt getrennt auftreten, sei es, dass dieser sich selbst complicirt, *aus den Monoiden ohne Knotenpunkte durch gewisse einfache Operationen ableiten kann.* Um diese Operationen leicht ausführen zu können, ist es nöthig näher auf die *Topologie der Monoide ohne Knotenpunkte* einzugehen; dieselbe wird zugleich dazu dienen, die Gestalt dieser Monoide noch deutlicher hervortreten zu lassen. Ich knüpfe meine Betrachtungen an die Topologie der Ringflächen an, wie sie in der Lehre vom Zusammenhang der Flächen benutzt werden. Eine solche Ringfläche mit mehreren Oeffnungen stellt Figur 7 dar, sie besitzt die vier äusseren Oeffnungen A, B, C, D. Auf derselben ziehen wir die Curven 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, welche ein geschlossenes System bilden und die Eigenschaft haben, dass jede Curve ihre beiden Nachbarcurven in nur *einem* Punkte schneidet; ein derartiges Curvensystem wollen wir als eine *Kette von Curven* bezeichnen. Jeder dieser Curven entspricht eine Oeffnung der Ringfläche, und zwar entsprechen den Curven 1, 3, 5, 7 die vier äusseren Oeffnungen und den Curven 2, 4, 6, 8 vier innere Oeffnungen der Ringfläche; ein solches zusammenhängendes System von Oeffnungen bezeichnen wir analog als eine *Kette von Oeffnungen.* Zieht man eine der Curven und somit eine der Oeffnungen zusammen, so entsteht ein Knotenpunkt.

Betrachten wir jetzt irgend eines unserer Monoide, um ein bestimmtes Bild vor Augen zu haben etwa das Monoid mit 8 Hauptgeraden auf dem paaren Mantel und 4 Hauptgeraden auf dem unpaaren Mantel des Tangentialkegels 3. Ord., so finden wir da ganz analoge Verhältnisse. Eine beliebige Ebene schneidet den Tangentialkegel in einer Curve 3. Ord., vergl. Figur 8, und die 12 Hauptgeraden des Monoids in den 12 Punkten $A, B, C, \ldots, M$. Zieht man in dieser Ebene die Curven 1, 2, 3,..., 12, welche sich in den Punkten $A, B, C, \ldots$ berühren, und macht man dieselben zu Leitcurven von 12 Kegeln, deren gemeinschaftlicher Scheitel im dreifachen Punkt des Monoids liegt, so schneiden diese Kegel das Monoid in zwölf Curven von folgenden Eigenschaften: Jede Curve ist für sich geschlossen und passirt den dreifachen Punkt des Monoids nicht; zwei benachbarte Curven schneiden sich nur in einem einzigen Punkt, derselbe liegt auf einer Hauptgeraden und bestimmt sich durch die gemeinsame Tangente der bezüglichen Leitcurven. Wir erhalten also hier *Ketten* aneinanderhängender Curven ganz ebenso wie oben bei der Ringfläche; so bilden die Curven 1, 2, ..., 8 eine Kette und ebenso die Curven

9, 10, 11, 12. Jeder Curve entspricht eine Durchbrechung oder Oeffnung des Monoids, wir erhalten also auch *zwei Ketten von Oeffnungen*. Durch Zusammenziehen solcher Oeffnungen entstehen aus den Monoiden ohne Knotenpunkte die Monoide mit Knotenpunkten.

49. In einem früheren Capitel hatten wir gefunden, dass ein Monoid einen Knotenpunkt bekommt, sobald zwei von seinen 12 Hauptgeraden zusammenrücken. Dasselbe folgern wir aus den Betrachtungen der vorigen Nummer, da durch das Zusammenrücken zweier Geraden eine der dort construirten geschlossenen Curven sich zusammenzieht und so ein Knotenpunkt entsteht ganz analog dem Vorgang bei der Ringfläche. Wir haben an der citirten Stelle weiter gesehen, dass durch Zusammenrücken von 3, 4, 5, ..., 12 Geraden ein biplanarer Knotenpunkt von der Ordnung 3, 4, 5, ..., 12 entsteht. Wie ein solcher Knotenpunkt sich gestaltlich wirklich entwickelt, können wir jetzt leicht verfolgen. In voriger Nummer haben wir eine Reihe von Curven auf dem Monoid construirt, die aneinander hängen und von denen jede zwei auf einanderfolgende Hauptgeraden der Fläche ein Mal schneidet. Rücken also $\varkappa$ Geraden zusammen, so ziehen sich $(\varkappa - 1)$ Curven der Kette zusammen und es ziehen sich demgemäss $(\varkappa - 1)$ kettenartig aneinanderhängende Oeffnungen des Monoids zusammen; auf diese Weise entsteht der biplanare Knotenpunkt $\varkappa$. Die gleiche Entstehungsweise hat bei allen biplanaren Knotenpunkten von der Ordnung $\varkappa$ auf einer ganz beliebigen Fläche*) statt, wie man ohne Weiteres daraus schliessen kann, dass die Projection der Umgebung eines biplanaren Knotenpunktes durch eine Curve mit Spitze oder Selbstberührungspunkt von der Ordnung $\varkappa$ dargestellt wird. Da uns nun die Gestalten der Monoide ohne Knotenpunkte alle bekannt sind, so können wir unmittelbar die Gestalten aller Monoide mit Knotenpunkten erschliessen, indem wir nur die geeigneten Oeffnungen zusammenziehen; eine Beschreibung dieser Gestalten kann desshalb unterbleiben.

50. Dagegen bleibt auch hier noch die Frage zu erledigen, welche Monoide sind gestaltlich gleich, d. h. welche Monoide können *algebraisch stetig* in einander übergeführt werden. Sicherlich erfordern zwei gestaltlich gleiche Monoide die Uebereinstimmung sowohl der Anzahl der Hauptgeraden auf dem paaren als auch der der Hauptgeraden auf dem unpaaren Mantel des Kegels 3. Ord. Wir bezeichnen erstere Zahl wie früher mit 2λ letztere mit 2μ, wo $2\lambda + 2\mu \leq 12$ ist, und zerlegen diese Zahlen in beliebiger Weise in Summanden. Jedem Summanden $\varkappa$ entspricht ein Knotenpunkt von der Ordnung $\varkappa$;

*) Dieser Gedanke ist nicht neu, er findet sich bereits bei Rodenberg in der Beschreibung seiner Modelle von Flächen 3. Ordn. vor. (Verlag von L. Brill, Darmstadt).

die Reihenfolge der Summanden soll dabei genau nach der Reihenfolge der bezüglichen Geraden auf dem paaren resp. unpaaren Kegelmantel geordnet werden. Bei zwei gestaltlich gleichen Monoiden müssen dann offenbar auch die Summanden sowie ihre Reihenfolge übereinstimmen, da dieselbe durch stetige Aenderung des Monoids nicht geändert werden kann.

Sind die soeben genannten Bedingungen nothwendig, so sind sie doch nicht hinreichend und es bleibt uns noch zu untersuchen, inwiefern zwei Monoide, welche in den genannten Stücken übereinstimmen, sich gestaltlich unterscheiden können. Gehen wir von zwei bestimmten Zahlen 2λ und 2μ aus, und nehmen wir auch ihre Summanden und deren cyklische Reihenfolge als gegeben an; machen wir endlich in jedem Cyklus einen bestimmten Summanden zum ersten. Dann kann man jedes hierzu gehörige Monoid nach den Auseinandersetzungen der Nr. 36 und Nr. 35 durch stetige algebraische Aenderung in ein neues verwandeln, dessen Hauptgeraden, soweit sie auf dem paaren Mantel liegen, alle in der Nähe der Kante $m\frac{\omega}{2\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$, und soweit sie auf dem unpaaren Mantel liegen, alle in der Nähe der Kante $n\frac{\omega}{2\mu}$ sich befinden, während die dem ersten Summanden entsprechende Gerade den kleinsten Parameter erhält. Dabei bedeutet m eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2\lambda-1$ und n eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2\mu-1$.

Stimmen für zwei Monoide auch noch die Zahlen m und n überein, so sind sie sicher gestaltlich gleich, stimmen sie nicht überein und können sie auch nicht in Uebereinstimmung gebracht werden, so sind sie gestaltlich verschieden.

51. Aus einem Monoide mit den Zahlen m und n kann, wie man leicht erkennt, durch stetige Aenderung ein Monoid mit den Zahlen $m\pm p$ und $n\mp p$ abgeleitet werden, worin p irgend eine ganze Zahl bedeutet. Ferner kann aus einem Monoid mit reellen und imaginären Hauptgeraden mit den Zahlen m und n ein Monoid mit den Zahlen $m\pm 2p$ und $n\pm 2q$ abgeleitet werden, wobei p und q beliebige ganze Zahlen sind. Daraus folgt:

Monoide mit Knotenpunkten, welche in den Zahlen 2λ und 2μ, deren Summanden und der Reihenfolge dieser Summanden übereinstimmen, lassen sich auf zwei Gestalten reduciren, falls nicht alle Hauptgeraden reell sind. Es sind nämlich alle Monoide gestaltlich gleich, für welche m und n gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind, ebenso alle Monoide, für welche dieses nicht der Fall ist.

Besitzt das Monoid nur reelle Geraden, so sind noch folgende Fälle zu unterscheiden. Ist: $2\lambda=12$, $2\mu=0$, so giebt es noch vier verschiedene Monoide, nämlich: $m=1, 5, 9$, resp. $2, 6, 10$, resp. $3, 7,$

11, resp. 4, 8, 12; in gleicher Weise erledigt sich der Fall $2\lambda = 0$, $2\mu = 12$. Ist $2\lambda = 10$, $2\mu = 2$, so giebt es nur zwei verschiedene Monoide, nämlich: $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ und $n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2$ resp. $m = 1, 2, \ldots, 10$ und $n = 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1$. Gleiches gilt für $2\lambda = 2$, $2\mu = 10$. Ist $2\lambda = 8$, $2\mu = 4$, so giebt es wiederum vier verschiedene Monoide, nämlich: $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und $n = 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2$ resp. $n = 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1$, resp. $n = 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4$, resp. $n = 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3$; ebenso für $2\lambda = 4$, $2\mu = 8$. Ist endlich $2\lambda = 6$, $2\mu = 6$, so giebt es nur zwei verschiedene Monoide, nämlich m und n beide gerade oder beide ungerade, resp. m gerade, n ungerade oder umgekehrt.

Der Beweis ergiebt sich sofort, sobald man bedenkt, dass ein Kegel 3. Ord. dreifach symmetrisch gemacht werden kann. Es könnte nun eine vollständige Aufzählung aller Monoide mit Knotenpunkten erfolgen; jedoch ist die Zahl derselben zu gross und es wird durch eine solche Aufzählung nichts weiter erreicht.

Monoide, für welche $u_3 = 0$ singuläre Kanten besitzt; $u_4 = 0$ enthält die singulären Kanten nicht.

52. Es sollen in diesem Capitel einige Specialisirungen des dreifachen Punktes, die Classenerniedrigung eines solchen dreifachen Punktes, sowie das gestaltliche Aussehen derselben betrachtet werden. Und zwar werden die folgenden Fälle hier ihre Erledigung finden: Der Tangentialkegel im dreifachen Punkte besitzt *eine*, *zwei*, *drei Doppelkanten*, oder *eine dreifache Kante*, oder er besitzt *eine Rückkehrkante* oder *eine Selbstberührungskante.* Dabei wird angenommen, dass der Kegel $u_4 = 0$ durch keine der singulären Kanten hindurchgeht; die übrigen Fälle werden im nächsten Capitel näher betrachtet werden.

Wir erörtern hier zunächst die Frage nach der Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt in den aufgezählten Fällen. Besitzt der Kegel eine Doppelkante, so schreiben wir ihn in der Form:

$$u_3 = xyz + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0.$$

Bilden wir nun die erste Polarfläche eines Punktes P und ebenso eines Punktes Q in Bezug auf das Monoid, und schneidet die Schnittcurve beider Polarflächen dasselbe in $\varkappa$ Punkten, welche mit dem dreifachen Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zusammenfallen, so ist die genannte Classenerniedrigung gleich $\varkappa$. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir die beiden Polarflächen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = w\,\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = w\,\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0$$

wählen, welche sich in einer Curve mit vierfachem Punkte schneiden. Die Tangenten der vier Aeste in diesem Punkte sind $\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0$, von denen drei eine ganz allgemeine Lage zum Kegel $u_3 = 0$ haben, und nur die vierte fällt mit der Richtung der Doppelkante zusammen. Jeder der ersten drei Aeste schneidet unsere Fläche in 3, der vierte aber in 4 zusammenfallenden Punkten; das erstere ist selbstverständlich und das letztere erkennt man, wenn man die Potenzreihen des vierten Astes: $x = az^2 + bz^3 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \beta z^3 + \cdots$ aufstellt und in $f(x, y, z)$ substituirt, wo dann z^4 als niedrigste Potenz von z erscheint. Die Reduction der Classe beträgt demnach:

$$3 + 3 + 3 + 4 = 13.$$

Ganz analog gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Kegel $u_2 = 0$, zwei oder drei getrennte Doppelkanten besitzt. Dann werden von den vier Aesten $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zwei resp. drei mit den Doppelkanten zusammenfallen und die Classenerniedrigung 14 resp. 15 sein.

53. Eine besondere Behandlung erfordern die übrigen Fälle. Besitzt der Tangentialkegel eine Rückkehrkante, so hat er die Gleichung:

$$u_3 = zx^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

zugleich wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2zx + 3Ax^2 + 6Bxy + 3Cy^2 + \frac{\partial u_4}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \qquad 3Bx^2 + 6Cxy + 3Dy^2 + \frac{\partial u_4}{\partial y}.$$

Von den vier Aesten der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ haben zwei eine allgemeine Lage gegen den Kegel $u_3 = 0$, während die beiden übrigen die Rückkehrkante tangiren. Die Reihenentwicklungen der letzteren beiden werden $x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots$, $y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta z^2 \pm \cdots$, dieselben sind also mit einander verzweigt. Diese Reihen in $f(xyz)$ eingesetzt ergeben als niedrigste Potenz von z die vierte, so dass die gesammte Classenerniedrigung sich auf $3 + 3 + 4 + 4 = 14$ beläuft.

54. Zerfällt der Kegel 3. Ord. in eine Ebene und einen sie berührenden Kegel 2. Ord., so wird seine Gleichung:

$$u_3 = x(x^2 + Ay^2 + 2Bxy + 2Cxz)$$

also:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4Cxz + 3x^2 + 4Bxy + Ay^2 + \frac{\partial u_4}{\partial x},$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Axy + 2Bx^2 + \frac{\partial u_4}{\partial y}.$$

Daraus folgt, dass drei Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die Berührungskante $x = 0$, $y = 0$ tangiren; ihre Reihenentwicklungen werden $x = \varepsilon b z^{\frac{5}{3}} + c z^2 + \cdots$, $y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \beta z^{\frac{5}{3}} + \cdots$, sie sind also mit einander verzweigt. Diese Entwicklungen in $f(x, y, z)$ eingesetzt liefern z^4 als niedrigste Potenz, so dass die Gesammterniedrigung der Classe des Monoids $3 + 4 + 4 + 4 = 15$ beträgt.

55. Zerfällt der Tangentialkegel in drei sich in einer Geraden schneidende Ebenen, so wird seine Gleichung:

$$u_3 = xy(x + \varrho y)$$

und also:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \varrho y^2 + \frac{\partial u_4}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2\varrho xy + \frac{\partial u_4}{\partial y}.$$

Alle vier Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ berühren die Gerade $x = 0$, $y = 0$, und ihre Entwicklungen sind von der Form:

$$x = \pm a_1 z^{\frac{3}{2}} + b_1 z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha_1 z^{\frac{3}{2}} + \beta_1 z^2 + \cdots,$$

resp.

$$x = \pm a_2 z^{\frac{3}{2}} + b_2 z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha_2 z^{\frac{3}{2}} + \beta_2 z^2 + \cdots,$$

d. h. sie sind zwei Mal zu zwei miteinander verzweigt. Diese Reihen in die Gleichung des Monoids eingesetzt ergeben z^4 als niedrigste Potenz, und folglich wird die Classenreduction gleich 16.

56. Worin bestehen nun die gestaltlichen Aenderungen der Monoide, welche durch die aufgezählten Specialisirungen des Tangentialkegels im dreifachen Punkt hervorgerufen werden? Beachten wir zuerst die Einwirkungen einer Doppelkante des Tangentialkegels und zwar einer *isolirten Doppelkante*. Diese Flächen bilden den Uebergang von den zweitheiligen zu den eintheiligen Monoiden; man erhält sie aus den zweitheiligen Monoiden, mit einem tropfenförmigen Flächentheil, indem man diesen immer kleiner werden und schliesslich völlig verschwinden lässt, ein Vorgang den man sich leicht vorstellt.

Auch bei den Monoiden, deren Tangentialkegel 3. Ord. eine *Doppelkante mit reellen Tangentialebenen* besitzt, ist der Vorgang ein äusserst einfacher. Als Ausgangsfläche wählen wir das zweitheilige endliche Monoid, welches natürlich keine reellen Geraden besitzen kann. Dasselbe besteht aus einem tropfenförmigen und einem trichterförmigen Flächentheil, siehe Nr. 43; jeder Querschnitt durch die dort construirte Axe*) hat die Gestalt der Figur 2. Erhält der Tangentialkegel eine

*) Man kann an Stelle der construirten Axe jede Gerade im Innern des paaren Kegelmantels nehmen, das Gesagte behält auch dann seine Gültigkeit.

reelle Doppelkante, so giebt es einen einzigen Querschnitt von der Form 9, während alle übrigen die Form 2 beibehalten. Der Effect, den das Auftreten einer Doppelkante beim Tangentialkegel 3. Ord. an der Gestalt des Monoides hervorbringt, ist also eine vollständige Einschnürung des trichterförmigen Theiles an der der Doppelkante entsprechenden Stelle, indem sich daselbst *eine* Schleife des bez. Querschnitts zusammenzieht. Dadurch wird zugleich ein Aneinanderdrängen des tropfenförmigen und des trichterförmigen Flächentheiles an jener Stelle bedingt, wie dieses die Figur 9 erkennen lässt. Aus dem endlichen zweitheiligen Monoid kann man ganz ebenso Monoide ableiten, deren Tangentialkegel 3. Ord. *zwei* oder *drei Doppelkanten besitzt*, indem man den trichterförmigen Theil an zwei resp. drei Stellen in der angegebenen Weise zusammenschnürt. Lässt man zwei solche Einschränkungen zusammenrücken, so erhält man das endliche Monoid, dessen Tangentialkegel 3. Ord. eine *Selbstberührungskante* aufweist.

Die Uebergänge, welche wir bei den endlichen zweitheiligen Monoid geschildert haben, lassen sich mit Leichtigkeit auf ein beliebiges zweitheiliges Monoid übertragen. Auch hier sind solche Einschnürungen vorzunehmen, indem man jedes Mal eine Schleife des bez. Querschnitts zusammenzieht. Sind zwei oder drei Einschnürungen zu machen, so können sie auf demselben Theil oder auf verschiedenen Theilen des paaren Kegelmantels liegen, je nachdem man von einer Einschnürung zur andern eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Geraden des Monoids zu passiren hat.

Das Monoid, dessen Tangentialkegel eine *Rückkehrkante* besitzt, leitet man am bequemsten aus dem Monoid ab, dessen Tangentialkegel eine isolirte Doppelkante besitzt. Man braucht dann nur in irgend einem Querschnitt durch die Doppelkante die eine Schleife zusammenzuziehen, eine Operation, die mit der vorher geschilderten Einschnürung völlig übereinstimmt.

57. Zuletzt bleiben uns noch die Monoide zu beschreiben, deren Tangentialkegel aus *drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen* besteht. Wir gehen auch hier von dem endlichen zweitheiligen Monoid aus, und leiten daraus ein Monoid ab, dessen Tangentialkegel 3. Ord. *drei* Doppelkanten besitzt, indem wir drei Einschnürungen machen. Lassen wir dann den tropfenförmigen Theil sich immer mehr zusammenziehen bis er schliesslich verschwindet, so erhalten wir die gesuchte Gestalt. Jeder ebene Schnitt durch die dreifache Gerade des Tangentialkegels 3. Ord. hat die Gestalt von Figur 10a, der Punkt O ist ein dreifacher Punkt der Curve; nur die drei singulären Ebenen schneiden in einem isolirten (vierfachen) Punkt, durch welchen vier imaginäre Geraden verlaufen. Die Fläche besteht demnach aus drei getrennten Theilen, welche sich auf die sechs von den singulären Ebenen erzeugten

Winkelräume so vertheilen, dass abwechselnd ein Raum von einem Flächentheil besetzt und einer leer ist. Sind von den 3 singulären Ebenen zwei conjugirt imaginär, so giebt es um die dreifache Gerade nur noch zwei Winkelräume, von denen der eine leer, der andere aber von dem einzigen noch vorhandenen Flächentheil occupirt ist.

Gehen wir nicht von dem endlichen zweitheiligen Monoid, sondern von einem zweitheiligen Monoid mit reellen Geraden aus und führen an diesem die angegebenen Operationen aus, so erhalten wir ein Monoid mit reellen Hauptgeraden, dessen Tangentialkegel 3. Ord. eine dreifache Kante besitzt. Man kann diese Flächen auch aus den soeben erhaltenen Monoiden ohne reelle Geraden aber mit dreifacher Kante des Tangentialkegels ableiten, indem man die Flächentheile durchs Unendliche zusammenwachsen lässt. Halbiren wir nämlich zwei benachbarte Winkelräume und nehmen wir an, dass der neu gebildete räumliche Winkel eine singuläre Ebene mit vier reellen Hauptgeraden des Monoids einschliesst; lassen wir alsdann eine Ebene diesen Winkelraum durchlaufen, so hat die Schnittcurve in der Ausgangsebene die Form 10a, geht dann allmählig in 10b über und weiter in 10c, um dann durch die an a gespiegelten Bilder von 10b und 10a zurückzukehren. Mit andern Worten, die beiden Flächentheile, welche an die nämliche singuläre Ebene angrenzen, sind jetzt zwei Mal durchs Unendliche hindurch mit einander verwachsen, während sie vorher, so lange die Hauptgeraden imaginär waren, getrennt waren. Hiermit ist aber unsere Behauptung erwiesen, und es ist eine Kleinigkeit in jedem vorliegenden Falle die nöthigen Aenderungen anzubringen.

58. *Wir wollen in diesem Capitel noch kurz einige Flächen behandeln, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkte in drei Ebenen zerfällt, und welche ausserdem noch* 6 *Knotenpunkte aufweisen.* Nun zerfallen aber alle Monoide mit 6 Knotenpunkten in zwei Arten, nämlich in Monoide, deren Knotenpunkte in einer Ebene liegen, und in Monoide, welche als Specialfall des Symmetroids erscheinen, siehe Nr. 14ff. Wir müssen also auch hier beide Fälle unterscheiden und betrachten zuerst das Monoid, dessen 6 Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen und dessen Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus drei sich nicht in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht. Seine Gleichung ist:
$$wxyz + (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy)^2 = 0.$$
Der Tangentenkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt zerfällt in zwei Ebenen, nämlich die Ebene des Kegelschnitts und eine der drei singulären Ebenen, und in einen Kegel 4. Ord. mit dreifacher Kante. Der eine Mantel dieses Kegels berührt die bezügliche singuläre Ebene, die beiden andern Mäntel sind mit einander verzweigt und die Tangentialebene in ihrer Rückkehrkante enthält die Schnittgerade der beiden noch übrigen singulären Ebenen.

Um das Monoid zu erhalten, dessen 6 Knotenpunkte nicht in einer Ebene liegen, dessen Tangentialkegel im dreifachen Punkt aber ebenfalls von drei sich nicht in einer Geraden schneidenden Ebenen gebildet wird, benutzt man seine Eigenschaft Symmetroid zu sein, vergl. Nr. 21. An der citirten Stelle ist das Symmetroid mit 10 Knotenpunkten eindeutig auf die Kernfläche 4. Ordnung eines Gebüsches von Flächen 2. Grades bezogen. Ferner findet sich dort auseinandergesetzt, dass das Symmetroid einen dreifachen Punkt erhält und dass die Kernfläche in eine Fläche 3. Ord. übergeht, wenn eine der vier Grundflächen des Gebüsches durch eine doppelt gezählte Ebene ersetzt wird. Die Berührungspunkte aller Flächen des Gebüsches, welche diese Ebene berühren, bilden eine der Kernfläche angehörige Curve 3. Ord., und dieser Curve entspricht bei der eindeutigen Beziehung zwischen der Kernfläche und dem Symmetroid der dreifache Punkt dieser Fläche. Soll also der Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus 3 Ebenen bestehen, so muss jene Curve 3. Ord. in 3 Geraden zerfallen; dann kann man aber zu Grundflächen des Gebüsches drei Flächen 2. Grades wählen, welche je zwei dieser drei Geraden enthalten. Wir nehmen desshalb als Grundflächen 2. Grades die vier Flächen:

$$\begin{aligned} w^2 = 0, \qquad & xy + b_1 xw + b_2 yw + b_3 zw = 0, \\ & yz + c_1 xw + c_2 yw + c_3 zw = 0, \\ & zx + d_1 xw + d_2 yw + d_3 zw = 0, \end{aligned}$$

so dass die gesuchte Fläche durch die Determinante dargestellt wird:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \delta & \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1 \\ \beta & 0 & \gamma & \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2 \\ \delta & \gamma & 0 & \beta b_3 + \gamma c_3 + \delta d_3 \\ \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1, & \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2, & \beta b_3 + \gamma c_3 + \delta d_3, & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Der dreifache Punkt dieser Fläche ist ersichtlich $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ und die drei singulären Ebenen in diesem Punkte sind: $\beta \cdot \gamma \cdot \delta = 0$. Die Knotenpunkte in der Ebene $\beta = 0$ liegen auf den beiden Geraden:

$$\gamma^2 c_1 + \gamma\delta(d_1 - c_2) - \delta^2 d_2 = 0,$$

und ganz analog in den beiden andern singulären Ebenen.

Die früher bei dem gewöhnlichen Monoid mit 6 Knotenpunkten gefundenen Eigenschaften erleiden hier einige Abänderungen. Der Tangentenkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt zerfällt nämlich hier in drei Theile; den ersten Theil bildet die singuläre Ebene, in welcher der Knotenpunkt liegt; den zweiten Theil bildet ein Kegel 2. Ord. durch den dreifachen Punkt und die vier nicht in jener singulären Ebene gelegenen Knotenpunkte, derselbe berührt die singuläre Ebene längs der Geraden durch den dreifachen Punkt; den letzten Theil

macht ein Kegel 3. Ord. mit Rückkehrkante aus, der durch die 5 noch übrigen Knotenpunkte einfach hindurchgeht, und dessen Rückkehrkante den dreifachen Punkt passirt. Der Kegel 2. Ord. berührt die Fläche ersichtlich längs einer Geraden und längs einer Raumcurve 3. Ord., welche 5 Knotenpunkte und den dreifachen Punkt passirt.

Die Monoide mit 6 Knotenpunkten, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, haben alle die Eigenschaft, dass ihre Knotenpunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Ihre Gleichung lässt sich desshalb schreiben:

$$wx(x-\alpha y)(x-\beta y)+\varrho(x^2+y^2+z^2)^2=0.$$

Monoide, für welche $u_3=0$ singuläre Kanten besitzt; $u_4=0$ geht durch diese Kanten hindurch.

59. Unterwirft man den Kegel $u_3=0$ des Monoids $\varrho u_3+u_4=0$ denselben Specialisirungen, wie im vorhergehenden Capitel, lässt man jedoch die daselbst stipulirte Bedingung fallen, indem man den Kegel $u_4=0$ durch die singulären Kanten des Tangentialkegels hindurchlegt, so erhält man eine Reihe neuer Singularitäten, und ihre Untersuchung ist es, welche uns in diesem Capitel beschäftigen soll.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, in welchem der Kegel $u_3=0$ eine Doppelkante hat; dann kann der Kegel $u_4=0$ entweder einfach durch die Doppelkante hindurchgehen, oder längs derselben einen der beiden Mäntel von $u_3=0$ berühren, und zwar kann die Berührung von der ersten, zweiten, ..., zehnten Ordnung sein. Wir nehmen als Gleichung des Kegels 3. Ordnung:

$$u_3=xyz+Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3=0$$

und als Gleichung des Kegels 4. Ordnung:

$$u_4=z^3(Gx+Hy)+z^2(Ix^2+2Kxy+Ly^2)+z(Mx^3+\cdots)+(Qx^4+\cdots)=0.$$

Es sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yz+3Ax^2+6Bxy+3Cy^2+Gz^3+2Ixz^2+2Kyz^2+\cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xz+3Bx^2+6Cxy+3Dy^2+Hz^3+2Kxz^2+2Lyz^2+\cdots;$$

hieraus ergeben sich vier verschiedene Reihenentwicklungen für die vier Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Drei von den Aesten dieser Curve sind dargestellt durch die Reihen:

$$x=a_iz+b_iz^2+\cdots,\quad y=\alpha_iz+\beta_iz^2+\cdots,\quad i=1,2,3;$$

sie schneiden ersichtlich das Monoid $f(xyz)=u_3+u_4=0$ in *je drei* zusammenfallenden Punkten $x=y=z=0$. Der vierte Curvenast erhält die Reihen:

$$x = bz^2 + cz^3 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo $b = -H$, $\beta = -G$ ist.

Diese Reihen in $f(xyz)$ eingesetzt liefern als niedrigste Potenz z^5 und als Coefficienten dieser Potenz: $-GH$; der durch sie dargestellte Curvenast schneidet demnach das Monoid in fünf consecutiven Punkten $x = y = z = 0$. Die Gesammtreduction der Classenzahl durch den dreifachen Punkt beträgt $3 \cdot 3 + 5 = 14$.

Soll der Kegel $u_4 = 0$ den einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante berühren, so muss G oder H verschwinden. Sei etwa $H = 0$, so werden die Entwicklungen des vierten Curvenastes:

$$x = cz^3 + dz^4 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo $\beta = -G$ und $c = 2LG - 3DG^2$. Die niedrigste Potenz in $f(xyz)$ nach Einsetzung dieser Reihen für x und y wird nun z^6 und der Coefficient dieser Potenz wird: $G^2(L - GD)$; die Erniedrigung der Classe wird also $3 \cdot 3 + 6 = 15$.

Geht der Kegel $u_4 = 0$ mit dem einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante eine Berührung zweiter Ordnung ein, so wird $L - GD = 0$. Die Reihen des vierten Astes werden wieder:

$$x = cz^3 + dz^4 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo $\beta = -G$ und $c = -LG$; die niedrigste Potenz in f wird dann z^7, und die Classenreduction wird $3 \cdot 3 + 7 = 16$.

Es lässt sich nun allgemein beweisen: *Hat der Kegel $u_3 = 0$ eine Doppelkante, und geht der Kegel $u_4 = 0$ mit dem einen Mantel jenes Kegels längs derselben eine Berührung $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung ein, so reducirt der dreifache Punkt des Monoids $\varrho u_3 + u_4 = 0$ seine Classe um $3 \cdot 3 + \varkappa + 5 = 14 + \varkappa$ Einheiten;* dabei kann $\varkappa$ die Werthe $1, 2, .., 10$ annehmen. Um diese Behauptung zu beweisen, gehen wir von dem Monoid aus, bei welchem der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelkante von $u_3 = 0$ einfach passirt. Diese Doppelkante gehört dem Monoid einfach als Gerade an, und längs der Geraden besitzt dasselbe eine constante Tangentialebene. Eine beliebige Ebene durch diese Gerade schneidet das Monoid in der Geraden und in einer Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt, deren einer Ast die Gerade berührt. Die zwei Ebenen durch die Gerade, welche den Kegel $u_3 = 0$ berühren, schneiden ausser der Geraden noch eine Curve 3. Ord. mit Spitze aus, deren Tangente mit der Geraden zusammenfällt. Die Ebene, welche den Kegel $u_4 = 0$ berührt, berührt das Monoid längs der Geraden und schneidet noch einen Kegelschnitt aus, der die Gerade in zwei getrennten Punkten schneidet. Legt man durch den dreifachen Punkt des Monoids eine beliebige Gerade g, so giebt es durch diese Gerade noch 10 Tangentialebenen an die Fläche, deren Berührungspunkte nicht in den dreifachen Punkt fallen; es sind dieses die Ebenen durch die 10 Hauptgeraden

der Fläche, welche nicht mit der Doppelkante von $u_3 = 0$ zusammenfallen. Lässt man also $\varkappa$ von diesen 10 Geraden des Monoids in die Doppelkante hineinrücken, so giebt es nur noch $(10 - \varkappa)$ Tangentialebenen durch die Gerade g, mithin hat die Classe um weitere $\varkappa$ Einheiten abgenommen. Diese Reduction wird aber durch den dreifachen Punkt bewirkt, da die Ebene durch g und die Doppelkante aus dem Monoid eine Curve ausschneidet, welche ausserhalb des dreifachen Punktes keinen Doppelpunkt mehr besitzt; hiermit ist aber die obige Behauptung erwiesen.

Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn der Tangentialkegel 3. Ord. zwei oder drei Doppelkanten aufweist, nur kann die Berührung dieses Kegels mit einem Kegel 4. Ord. längs seiner singulären Kanten nicht mehr von so hoher Ordnung wie vorher sein.

60. Wir gehen jetzt weiter zu den Monoiden über, bei welchen der Kegel $u_3 = 0$ ein *Rückkehrkante* besitzt und der Kegel $u_4 = 0$ dieselbe in beliebiger Richtung durchsetzt. Die Gleichung des Tangentialkegels ist dann:

$$u_3 = zx^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0,$$

die des Kegels 4. Ord. ist wieder:

$$u_4 = z^3(Gx+Hy) + z^2(Ix^2+2Kxy+Ly^2) + z(Mx^3+\cdots) + (Qx^4+\cdots) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz + 3Ax^2 + 6Bxy + 3Cy^2 + Gz^3 + 2Ixz^2 + 2Kyz^2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \qquad 3Bx^2 + 6Cxy + 3Dy^2 + Hz^3 + 2Kxz^2 + 2Lyz^2 + \cdots.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder aus vier Aesten, von denen zwei durch die Reihen $x = a_i z + b_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$ dargestellt werden, das Monoid also in drei consecutiven Punkten $x = y = z = 0$ schneiden. Die beiden übrigen Aeste sind mit einander verzweigt und ihre Reihen sind:

$$x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta z^2 \pm \cdots,$$

wobei

$$b = \frac{HC - GD}{2D}, \quad \alpha^2 = -\frac{H}{3D}.$$

In $f(xyz)$ eingesetzt liefern sie als niedrigste Potenz $z^{\frac{9}{2}}$ mit dem Coefficienten: $\frac{2\alpha}{3} H$; die Classenerniedrigung wird also $3 + 3 + 9 = 15$.

Berührt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Rückkehrkante, so wird $H = 0$. Während die beiden zuerst genannten Aeste

ungeändert bleiben, erhalten die beiden letzteren die neuen Entwicklungen:

$$x = bz^2 + c_i z^3 + \cdots,\quad y = \beta_i z^2 + \gamma_i z^3 + \cdots,\qquad i = 1,2,$$

wo $b = -\frac{G}{2}$ und $3D\beta^2 + \beta(2L - 3CG) - KG + \frac{3}{4}BG^2 = 0$. Die niedrigste Potenz in f nach Substitution der Werthe von x und y wird jetzt z^5 und ihr Coefficient $-\frac{G^3}{4}$, so dass sich die Verminderung der Classe auf $3 + 3 + 5 + 5 = 16$ beläuft.

61. Bei den Monoiden, deren Tangentialkegel 3. Ord. eine Selbstberührungskante besitzt, kann man ganz analoge Betrachtungen anstellen. Durchsetzt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs dieser Kante in beliebiger Richtung, so kann man setzen:

$$u_3 = x(x^2 + Ay^2 + 2Bxy + 2Cxz),$$

während $u_4 = 0$ seine frühere Gleichungsform beibehält. Alsdann wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4Cxz + 3x^2 + 4Bxy + Ay^2 + Gz^3 + 2Ixz^2 + 2Kyz^2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx^2 + 2Axy + Hz^3 + 2Kxz^2 + 2Lyz^2 + \cdots.$$

Ein Ast der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird

$$x = az + bz^2 + \cdots,\quad y = \alpha z + \beta z^2 + \cdots;$$

die drei übrigen Aeste sind mit einander verzweigt; ihre Reihen werden

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots,\quad y = \varepsilon\alpha z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2\beta z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

wobei ε eine dritte Einheitswurzel und $\alpha^3 = \frac{2CH}{A^2}$, $b = -\frac{A\alpha^2}{4C}$. Durch Einsetzung der Werthe von x und y in f ergiebt sich als niedrigstes Glied: $\frac{3}{4}\alpha H z^{4\frac{1}{3}}$, so dass die Gesammtreduction der Classe $3 + 13 = 16$ wird.

Tangirt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, wird also $H = 0$, so ändern sich die drei letzten Reihenentwicklungen und an ihre Stelle treten die folgenden:

$$x = bz^2 + cz^3 + \cdots,\quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo

$$b = -\frac{G}{4C}\ \text{und}\ \beta = -\frac{bK + b^2B}{L + bA};$$

und

$$x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots,\quad y = \pm\alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta z^2 + \cdots,$$

wo

$$b = -\frac{L}{A}\ \text{und}\ \alpha^2 = -\frac{GA - 4CL}{A^2}.$$

Der durch die ersten beiden Reihen dargestellte Curvenast schneidet das Monoid ersichtlich in 5 consecutiven Punkten $x=y=z=0$; die beiden letzten Reihenpaare stellen zwei verzweigte Aeste dar, welche mit dem Monoid 10 consecutive Punkte $x=y=z=0$ gemein haben. Die Classenreduction wird demnach in diesem Falle 18.

Geht der Kegel $u_4=0$ mit dem zerfallenen Kegel $u_3=0$ längs der Selbstberührungskante eine Berührung von höherer als der ersten Ordnung ein, etwa eine Berührung von der Ordnung $\varkappa$, (wo $\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), so ist die Classenreduction $(17+\varkappa)$. Der Beweis kann ganz ebenso geführt werden wie vorher beim Tangentialkegel mit Doppelkante, wenn der Kegel $u_4=0$ eine höhere Berührung mit demselben eingeht.

62. Es handelt sich nun noch um Monoide, deren Tangentialkegel aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, dessen Gleichung also die Form hat: $u_3 = xy(x+\varrho y) = 0$. Durchsetzt der Kegel $u_4=0$ die dreifache Kante von $u_3=0$ in beliebiger Richtung, so können wir seine frühere Gleichungsform benutzen, und es wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \varrho y^2 + Gz^3 + 2Iz^2x + 2Kz^2y + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2\varrho xy + Hz^3 + 2Kz^2x + 2Lz^2y + \cdots.$$

Die vier Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ erhalten die Reihen:

$$x = \pm a_1 z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots,\quad y = \pm \alpha_1 z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots,\qquad i = 1, 2$$

und

$$x = \pm a_3 z^{\frac{3}{2}} + b_k z^2 + \cdots,\quad y = \pm \alpha_3 z^{\frac{3}{2}} + \beta_k z^2 + \cdots,\qquad k + 3, 4;$$

wobei $2a\alpha + \varrho\alpha^2 + G = 0$ und $a^2 + 2\varrho a\alpha + H = 0$. In $f(xyz)$ eingesetzt liefern sie als niedrigste Potenz $(a^2\alpha + \varrho a\alpha^2 + Ga + H\alpha)z^{\frac{9}{2}}$, so dass die Classenerniedrigung 18 beträgt.

Berührt $u_4=0$ eine der drei singulären Ebenen etwa $x=0$, d. h. wird $H=0$, so bekommen wir die neuen Entwicklungen:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots,\quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta_i z^2 + \cdots,\quad i = 1, 2,$$

wo
$$\alpha^2 = \frac{G}{3\varrho} \quad\text{und}\quad a = -2\varrho\alpha,$$

$$x = \quad bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots,\quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta_k z^2 + \cdots,\quad k = 3, 4,$$

wo
$$\alpha^2 = -\frac{G}{\varrho} \quad\text{und}\quad b = -\frac{L}{\varrho} \quad\text{ist.}$$

Daraus erschliessen wir als Gesammtreduction der Classe die Zahl $9+10=19$.

Auch hier lässt sich, wie in den vorhergehenden Fällen zeigen, dass sich die Classe um 20 resp. 21 erniedrigt, wenn die Berührung des Kegels $u_4=0$ mit der singulären Ebene $x=0$ von der zweiten resp. dritten Ordnung ist.

63. Wir wollen es nun versuchen die geometrische Gestalt der in diesem Capitel aufgestellten Monoide mit dreifachem Punkte aus den Monoiden des vorigen Capitels abzuleiten, und werden finden, dass auch die neuen Gestalten aus der früheren durch Zusammenziehen geeigneter Oeffnungen der Fläche abgeleitet werden können.

Den Anfang machen wir mit den Monoiden, deren Tangentialkegel 3. Ord. eine *reelle Doppelkante* besitzt. Geht der Kegel $u_4=0$ nicht durch diese Doppelkante hindurch, so hat das zugehörige Monoid die in Nr. 56 angegebene Gestalt. Um die Gestalt dieser Fläche genauer zu verfolgen, denken wir uns dieselbe aus dem dreifachen Punkt auf eine Ebene projicirt, genau so wie in Nr. 48. Dem dreifachen Punkt entspricht dabei die Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt, vergl. Fig. 11a und 11b, den 12 Geraden die Punkte $A, B, C, D, \ldots$; den punktirten Curven entsprechen geschlossene Curven des Monoids, die kettenförmig an einander hängen und folglich eben so viele Oeffnungen des Monoids bedingen. Geht $u_4=0$ einfach durch die Doppelkante hindurch, so erhält man noch zwei verschiedenartige dreifache Punkte, je nachdem man in 11a die Oeffnung 1 oder in 11b die Oeffnung 1 zusammenzieht. Soll der Kegel $u_4=0$ einen Mantel des Tangentialkegels 3. Ord. längs der Doppelkante berühren, so kann dieses ebenfalls noch auf zwei verschiedene Arten erreicht werden, je nachdem man die Oeffnung 2 in 11a oder in 11b zusammenzieht; es giebt also wiederum zwei hinsichtlich der Gestalt ihres dreifachen Punktes verschiedene Monoide. Ganz gleiche Resultate findet man, wenn man die Oeffnung 3, etc. in 11a resp. in 11b zusammenzieht.

Besitzt der Kegel $u_3=0$ mehrere Doppelkanten, so kann man an jeder die vorher geschilderten Operationen ausführen, und erhält dadurch die verschiedenen Monoide, deren Tangentialkegel 3. Ord. in einen Kegel 2. Ord. und eine Ebene oder in drei Ebenen zerfällt. Wie viele aneinanderhängende Oeffnungen des Monoids man in jede Doppelkante zusammenziehen kann, ergiebt sich daraus, dass auf dem Kegel 2. Ord. resp. der Ebene, welche Theile des Kegels $u_3=0$ bilden, nur 8 resp. 4 Hauptgeraden des Monoids liegen können.

Besitzt der Tangentialkegel $u_3=0$ eine *isolirte Doppelkante*, so geht man am bequemsten von dem gewöhnlichen endlichen Monoide aus. Lässt man den trichterförmigen Flächentheil an einer Stelle mit dem tropfenförmigen Theile zusammenstossen, so erhält man ein

Monoid mit einem Knotenpunkte. Lässt man ferner den tropfenförmigen Theil sich völlig zusammenziehen, so rückt der Knotenpunkt in den dreifachen Punkt herein und es entsteht das gesuchte Monoid. Jeder Schnitt durch die singuläre Kante hat die Form 12a; nur die Ebene, welche das Monoid längs der singulären Kante berührt, schneidet in der Curve 12b.

64. Im vorigen Capitel sind zu Ende der Nr. 56 die Monoide beschrieben, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine *Rückkehrkante* besitzt. Dort war die Bedingung zu Grunde gelegt, dass $u_4 = 0$ die Rückkehrkante nicht passirt; aus diesen Monoiden lassen sich aber diejenigen, bei welchen $u_4 = 0$ die Rückkehrkante passirt, sofort ableiten. Wir denken uns wieder das Monoid auf eine Ebene abgebildet wie in der vorigen Nummer; dem dreifachen Punkt entspricht dann eine Curve 3. Ord. mit Spitze, Figur 13, den Hauptgeraden des Monoids entsprechen die Punkte $A, B, C, \ldots$. Durch Zusammenziehen der Curve 1, d. h. durch Zusammenziehen der dieser Curve entsprechenden Oeffnung des Monoids, entsteht ein Monoid, bei welchem $u_4 = 0$ die Rückkehrkante von $u_3 = 0$ einfach passirt. Zieht man auch noch die Curve 2, d. h. die entsprechende Oeffnung der Fläche, zusammen, so ergiebt sich das Monoid, bei welchem $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Rückkehrkante berührt.

65. Besitzt der Kegel $u_3 = 0$ eine Selbstberührungskante und geht $u_4 = 0$ nicht durch diese Kante hindurch, so haben die zugehörigen Monoide die in Nr. 56 beschriebene Gestalt. Ihre Abbildung auf eine Ebene mag wieder in der früheren Weise ausgeführt werden; dem dreifachen Punkt entspricht der Kegelschnitt und die ihn berührende Gerade in Figur 13, der unendlich fernen Curve des Monoids die Curve 4. Ord. $u_4 = 0$. Die schraffirten Theile (und ebenso die unschraffirten) bilden einen zusammenhängenden Theil des Monoids ab, so dass man von jedem Punkt zu jedem andern gelangen kann, ohne den dreifachen Punkt oder das unendlich Ferne zu passiren. Von dem schraffirten Gebiet zum unschraffirten kann man unter dieser Bedingung nicht gelangen. Der punktirten Curve 1 entspricht eine geschlossene Curve des Monoids; durch Zusammenziehen derselben, d. h. durch Zusammenziehen der entsprechenden Oeffnung des Monoids entsteht eine neue Fläche, für welche $u_4 = 0$ die Selbstberührungskante von $u_3 = 0$ einfach passirt. Die Abbildung dieser Fläche zeigt uns Figur 14a; die Gestalt des dreifachen Punktes bei allen diesen Monoiden ist nicht wesentlich verschieden.

Aus diesen Monoiden kann man durch weiteres Zusammenziehen zweier Oeffnungen zu den Monoiden gelangen, für welche $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Selbstberührungskante berührt. Diese Monoide bilden hinsichtlich der Gestalt ihres dreifachen Punktes noch drei

verschiedene Classen; man erhält sie, indem man in den Monoiden mit den Abbildungen 14a, 14b, 14c die Oeffnungen 1 und 2 zusammenzieht, wodurch Monoide entstehen, deren Abbildung uns die Figuren 14α, 14β, 14γ liefern. Wie man hieraus die Monoide ableitet, für welche $u_4 = 0$ den einen Mantel des Kegels $u_3 = 0$ längs der Selbstberührungskante osculirt, hyperosculirt, etc., ist ohne Weiteres klar und braucht hier nicht auseinander gesetzt zu werden.

66. Auch die Monoide, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine dreifache Kante besitzt, lassen sich aus den in Nr. 57 beschriebenen Monoiden äusserst einfach ableiten. Dort ist vorausgesetzt, dass $u_4 = 0$ die dreifache Kante von $u_3 = 0$ nicht passirt; die Abbildung dieser Monoide zeigt uns Figur 15a. Den Curven 1 und 2 entsprechen zwei Curven des Monoids, durch deren Zusammenziehen zwei Oeffnungen des Monoids verschwinden; auf diese Weise entsteht ein neues Monoid, dessen Abbildung durch Figur 15b repräsentirt wird. Wie man von diesem Monoide zu den Monoiden gelangt, bei welchen $u_4 = 0$ eine der singulären Ebene längs der dreifachen Kante berührt, osculirt oder hyperosculirt, ist wiederum ohne Weiteres klar.

67. Fassen wir die in den letzten beiden Capiteln gewonnenen Resultate nochmals ins Auge, so können wir dieselben folgendermassen zusammenfassen. Die aufgezählten Specialisirungen des dreifachen Punktes werden alle erhalten, indem man gewisse Oeffnungen der Fläche, welche an den dreifachen Punkt angrenzen, zusammenzieht. Jeder Erhöhung der Ordnung*) des dreifachen Punktes um *eine Einheit* entspricht das Zusammenziehen *einer* an den dreifachen Punkt angrenzenden *Oeffnung*. Man kann auf diese Weise eine ganze Kette von Oeffnungen in den dreifachen Punkt zusammenziehen, sobald nur die erste Oeffnung der Kette an denselben angrenzt. An Stelle des Zusammenziehens einer Oeffnung kann auch das Zusammenziehen eines tropfenförmigen Flächentheils treten.

Welchen Einfluss dieses Zusammenziehen von Oeffnungen auf die Gestalt irgend einer Projection der Umgebung des dreifachen Punktes in jedem Falle ausübt, ist leicht zu verfolgen; ich unterlasse es darauf einzugehen.

Monoide, für welche $u_3 = 0$ in eine einfache und in eine Doppelebene, oder in eine dreifache Ebene zerfällt.

68. Die analytische Behandlung dieser Flächen mag wiederum den Anfang machen, und zwar beginnen wir mit den Monoiden, deren

*) Unter der Ordnung eines n-fachen Punktes versteht man die Zahl, welche angiebt, um wie viel derselbe die Classe einer Fläche erniedrigt.

Tangentialkegel in eine Doppel- und eine einfache Ebene zerfällt, also $u_3 = x^2 y$. Dagegen nehmen wir für $u_4 = 0$ die frühere Form:

$$u_4 = Fz^4 + z^3(Gx + Hy) + z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + \cdots.$$

Die Polarfläche eines beliebigen Punktes in Bezug auf unser Monoid schneidet jetzt eine Curve 12. Ord. mit *siebenfachem* Punkte aus. Es genügt dieses für die Polarfläche des Punktes $x_0, y_0, 0, 0$ zu beweisen, da man die Z-Ebene und die W-Ebene noch durch einen beliebigen Punkt hindurchlegen kann. Nun ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + Gz^3 + 2Iz^2x + 2Kz^2y + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + Hz^3 + 2Kz^2x + 2Lz^2y + \cdots.$$

Für die Schnittcurve der Polarfläche: $x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit dem Monoid ergeben sich demnach folgende Reihenentwicklungen:

$$x = \varepsilon a z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \beta z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{1},$$

wobei $a^2\alpha + F = 0$ und $2x_0 a\alpha + y_0 a^2 = 0$ ist; sie liefern einen superlinearen Zweig dritter Ord., welcher die Gerade $x = 0$, $y = 0$ in seinem singulären Punkt berührt. Ferner ergeben sich noch vier weitere Entwicklungen: $x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2, 3, 4$ wobei: $F + H\alpha + L\alpha^2 + P\alpha^3 + U\alpha^4 = 0$ und

$$x_0(2b\alpha + G + 2K\alpha + 3O\alpha^2 + 4T\alpha^3) + y_0(H + 2L\alpha + 3P\alpha^2 + 4U\alpha^3) = 0$$

ist. Diese Reihen stellen vier einfache Curvenzweige dar, welche die Doppelebene in der Richtung der vier Hauptgeraden $x = 0$, $u_4 = 0$ berühren; die Tangentenrichtung dieser Curvenzweige ist also von der Wahl der Polarfläche unabhängig. Es ist dieses Verhalten ganz analog dem Verhalten der Polarfläche in einem uniplanaren Knotenpunkt*).

69. Um die Reduction der Classenzahl des Monoids durch einen derartigen dreifachen Punkt zu bestimmen, müssen wir wiederum die Anzahl der Schnittpunkte der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit dem Monoide $f = 0$ aufsuchen, welche in den Punkt $x = y = z = 0$ hereinfallen. Die Curve besitzt erstens zwei mit einander verzweigte Aeste:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta_i z^2 + \cdots,$$

wobei $2a\alpha + G = 0$ und $a^2 + H = 0$ ist; sie ergeben als niedrigste Potenz von z in $f(xyz)$ die vierte. Die Curve besitzt zweitens drei lineare Aeste: $x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$, $i = 1,2,3,$

*) Vergleiche meine Arbeit über biplanare und uniplanare Punkte, Math. Ann. Bd. XXII, pag. 136 u. 137.

wobei: $2b\alpha + G + 2K\alpha + 3O\alpha^2 + 4T\alpha^3 = 0$ und $H + 2L\alpha + 3P\alpha^2 + 4U\alpha^3 = 0$ ist; sie liefern als niedrigste Potenz von z ebenfalls die vierte. Die Gesammtreduction der Classe des Monoids wird also $5 \cdot 4 = 20$.

70. Nehmen wir an, dass der Kegel $u_4 = 0$ eine besondere Lage zur Doppelebene hat, indem er dieselbe tangirt, so tritt eine weitere Specialisirung des dreifachen Punktes ein. Bezeichnen wir den Kegel $u_4 = 0$ symbolisch durch $(xyz)_4 = 0$, so werden seine Schnittgeraden mit der Ebene $x = 0$ durch $(0yz)_4 = 0$ dargestellt sein. Wir haben dann folgende Fälle zu unterscheiden: $(0yz)_4 = 0$ hat *eine Doppelwurzel*, oder *zwei Doppelwurzeln*, oder *eine dreifache*, oder endlich *eine vierfache Wurzel*. Die zugehörigen Monoide werden wie vorher durch einen Kegel 12. Ord. mit *siebenfacher* Kante projicirt. Drei der Mäntel durch die siebenfache Kante sind, wie früher in Nr. 68, mit einander verzweigt, ihre Reihenentwicklungen haben sich nicht wesentlich geändert. Die vier übrigen Mäntel, welche vorher linear waren und die vier Geraden $(0yz)_4 = 0$ resp. berührten, werden jetzt theilweise verzweigt sein; einer Doppelwurzel von $(0yz)_4 = 0$ entspricht eine Verzweigung zweier Mäntel, einer dreifachen oder vierfachen Wurzel eine Verzweigung von drei resp. vier Mänteln. Schon aus diesem Verhalten des projicirenden Kegels können wir schliessen, dass die Classenerniedrigung des Monoids durch den dreifachen Punkt in den aufgezählten vier Fällen: 21, 22, 22, 23 respective beträgt.

Ein strenger Beweis dieser Behauptung erfordert wieder eine Untersuchung der Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Man erkennt sofort, dass die beiden vorher verzweigten Aeste keine wesentliche Aenderung erfahren, sie schneiden demnach das Monoid nach wie vor in je vier consecutiven Punkten. Dagegen tritt bei den drei linearen Aesten der Curve eine Aenderung ein. Besitzt $(0yz)_4 = 0$ eine *Doppelwurzel* $y : z = \alpha : 1$, so wird von den drei linearen Aesten

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$$

einer die Gerade $y = \alpha z$ berühren, da die Tangenten dieser Aeste sich durch $x = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(0yz)_4 = 0$ bestimmen. Der *eine* lineare Ast schneidet desshalb das Monoid in fünf, die beiden übrigen schneiden in je vier consecutiven Punkten. Analoges gilt für eine zweite Doppelwurzel.

Besitzt $(0yz)_4 = 0$ eine *dreifache Wurzel* $y : z = \alpha : 1$, so besitzt $\frac{\partial}{\partial y}(0yz)_4 = 0$ noch eine Doppelwurzel $y : z = \alpha : 1$; es fallen also zwei Tangenten zusammen, von den drei linearen Zweigen des vorigen Falles sind jetzt zwei verzweigt. Die Reihen dieser Zweige sind:

$$x = b_1 z^2 + c_1 z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_1 z + \beta_1 z^2 + \cdots,$$

resp.

$$x = b z^2 \pm d z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z \pm \beta z^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Der erste Zweig schneidet wieder in vier, die letzteren beiden dagegen schneiden in je fünf consecutiven Punkten; denn es verschwindet nach Einsetzen der Reihen von x und y in f nicht nur der Coefficient $(0\alpha 1)_4$ von z^4, sondern auch noch der Coefficient $\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4$ von $z^{4\frac{1}{2}}$,

Hat $(0yz)_4 = 0$ *vier gleiche Wurzeln* $y:z = \alpha:1$, also $\frac{\partial}{\partial y}(0yz) = 0$ drei gleiche Wurzeln, so sind die drei (vorher linearen) Zweige von $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit einander verzweigt und ihre Reihen werden:

$$x = d z^2 + \varepsilon e z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \gamma z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

wo $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ ist. Jedes dieser drei Reihenpaare für x und y eingesetzt liefert als niedrigste nicht verschwindende Potenz von z die fünfte, da die Coefficienten von z^4, nämlich $(0\alpha 1)_4$, von $z^{4\frac{1}{3}}$, nämlich $\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4$, von $z^{4\frac{2}{3}}$, nämlich $\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 + \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(0\alpha 1)_4$ sämmtlich verschwinden. Somit ist die obige Behauptung erwiesen.

71. Der Kegel $u_4 = 0$ kann noch eine Reihe anderer specieller Lagen in Bezug auf den Kegel $u_3 = x^2 y = 0$ einnehmen, indem er die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$ passirt und längs dieser Geraden die eine oder andere singuläre Ebene tangirt, osculirt oder hyperosculirt. Geht $u_4 = 0$ einfach durch die singuläre Gerade hindurch, so wird $F = 0$. Der projicirende Kegel 12. Ord. hat wieder eine siebenfache Kante; zwei Mal zwei Mäntel durch diese Kante sind verzweigt, sie berühren die Gerade $x = 0$, $y = 0$; drei Mäntel sind linear, sie berühren je eine der drei Geraden $\frac{1}{y} \cdot (0yz)_4 = 0$. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt genau dieselben fünf Zweige wie in Nr. 69, aber die beiden Reihen $x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots$, $y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots$ ergeben, in $f(xyz)$ eingesetzt, jetzt als niedrigste Potenz $z^{4\frac{1}{2}}$, so dass die Erniedrigung der Classe des Monoids durch den dreifachen Punkt 21 beträgt.

Berührt der Kegel $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $y = 0$ längs der singulären Kante $x = 0$, $y = 0$, so wird auch noch $G = 0$. Die linearen Mäntel in der siebenfachen Kante des projicirenden Kegels 12. Ord. bleiben dabei ungeändert; die vier übrigen Mäntel, welche die Kante $x = 0$, $y = 0$ berühren, bilden einen einzigen superlinearen Zweig

mit den Reihen*) $x = \pm az^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^3 bz^{\frac{7}{4}} + \cdots$, $y = \varepsilon^3\beta z^{\frac{7}{4}} + \cdots$, $\varepsilon^4 = 1$, wobei $a^2 + H = 0$ und $x_0\beta + y_0\gamma = 0$, $2b\beta + Ia = 0$.

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder wie in Nr. 69 aus drei linearen Zweigen, welche sich von den dortigen nicht besonders unterscheiden, und aus zwei verzweigten Aesten, deren Reihen hier die Form annehmen:

$$x = \pm az^{\frac{3}{2}} + bz^2 + \cdots, \qquad y = \beta z^2 \pm \gamma z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

wo $H + a^2 = 0$, $\beta + I = 0$, $b + K = 0$. Die linearen Zweige schneiden das Monoid in je vier Punkten, die beiden verzweigten Aeste in je fünf Punkten; die Gesammterniedrigung der Classe wird also 22.

Osculirt der Kegel $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$ längs der singulären Kante, so wird ferner noch $I = 0$. Die linearen Mäntel des projicirenden Kegels bleiben im Wesentlichen ungeändert; die vier übrigen Mäntel, welche die Kante $x = 0$, $y = 0$ berühren, sind zwei Mal zu zwei verzweigt; ihre Reihen sind:

$$x = \pm az^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \qquad y = \pm\beta z^2 \pm \gamma_i z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \qquad i = 1,2,$$

wobei $a^2 + H = 0$, und $y_0(b + K) + x_0\beta = 0$, $\beta(b + K) - \frac{1}{2}MH = 0$. Die drei linearen Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ bleiben wieder ungeändert, die beiden verzweigten Aeste dieser Curve sind:

$$x = \pm az^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \pm\gamma z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

wo $a^2 + H = 0$ und $2\gamma + 3Ma = 0$. Die drei linearen Aeste schneiden das Monoid wieder in je vier Punkten, die beiden verzweigten Aeste zusammen in 11 Punkten, so dass sich die Gesammtreduction der Classe auf 23 beläuft.

Wird die singuläre Ebene $y = 0$ längs der singulären Kante hyperosculirt, so verschwindet noch M. Die linearen Mäntel des projicirenden Kegels ändern sich auch hier nicht; die vier übrigen, die Kante $x = 0$, $y = 0$ berührenden Mäntel sind mit einander verzweigt und werden durch die Reihen

$$x = \pm az^{\frac{3}{2}} + cz^2 + \varepsilon dz^{\frac{9}{4}} + \cdots, \qquad y = \varepsilon\delta z^{\frac{9}{4}} + \varepsilon^3\zeta z^{\frac{11}{4}} + \cdots,$$

$\varepsilon^4 = 1$ dargestellt, wobei $a^2 + H = 0$, $c + K = 0$ und $y_0 d + x_0\delta = 0$,

*) Hier wie im Folgenden spreche ich von den Reihen des projicirenden Kegels, obgleich die Reihen seiner Berührungscurve gemeint sind.

$2a d\delta + Q = 0$. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder aus den drei linearen Zweigen und aus zwei verzweigten Aesten mit den Reihen:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b z^2 \cdots, \quad y = \pm \delta z^3 \pm \varepsilon z^{\frac{7}{2}} + \cdots,$$

wo $a^2 + H = 0$, $b + K = 0$, und $2a\delta + Q = 0$, $2a\varepsilon + 12QHK = 0$. Die linearen Aeste haben mit dem Monoide je vier, die beiden verzweigten Aeste je sechs consecutive Punkte gemein. Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt beträgt 24.

72. Wenn der Kegel $u_1 = 0$ die Doppelebene $x = 0$ längs der singulären Kante $x = 0$, $y = 0$ berührt, so wird $H = 0$. Der projicirende Kegel 12. Ord. aus dem Punkte $x_0, y_0, 0, 0$ besitzt wieder eine siebenfache Kante, durch welche jetzt folgende Mäntel gehen. Erstens existiren zwei lineare Mäntel

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots, \qquad i = 1, 2,$$

mit den Tangenten $L + P\alpha + U\alpha^2 = 0$; zweitens giebt es zwei mit einander verzweigte Mäntel

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

für welche $a\alpha + G = 0$ und $y_0 a^2 - x_0 G = 0$ ist; drittens finden sich drei verzweigte Mäntel

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \qquad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots,$$

$\varepsilon^3 = 1$, wobei $2b\alpha + G = 0$ und $b^2\alpha + Gb + L\alpha^2 = 0$ ist. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus zwei linearen Aesten

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \qquad i = 1, 2,$$

mit den Tangenten $2L + 3P\alpha + 4U\alpha^2 = 0$, und aus drei verzweigten Aesten:

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \qquad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots$$

für welche $2b\alpha + G = 0$ und $b^2 + 2L\alpha = 0$ ist. Die beiden linearen Aeste schneiden das Monoid in je vier, die drei verzweigten Aeste zusammen in 14 consecutiven Punkten, so dass der dreifache Punkt die Classe um 22 Einheiten reducirt.

Eine Osculation zwischen dem Kegel $u_1 = 0$ und der Doppelebene $x = 0$ findet statt, wenn gleichzeitig $H = 0$ und $L = 0$ werden. Der projicirende Kegel 12. Ord. besitzt jetzt nur noch einen linearen Mantel $x = bz^2 + \cdots$, $y = \alpha z + \cdots$, mit der Tangente $P + U\alpha = 0$, die 6 übrigen Mäntel berühren die singuläre Kante $x = 0$, $y = 0$. Von diesen 6 Mänteln sind ein Mal zwei verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wobei $a\alpha + G = 0$ und $y_0 a^2 - x_0 G = 0$ ist, und einmal sind vier Mäntel verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \varepsilon^3 c z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{5}{4}} + \cdots,$$

$\varepsilon^4 = 1$, wobei $c^2\alpha + Gc + P\alpha^3 = 0$ und $2c\alpha + G = 0$ ist. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt einen linearen Ast $x = bz^2 + \cdots$, $y = \alpha z + \cdots$, mit der Tangente $3P + 4U\alpha = 0$, und vier mit einander verzweigte Aeste mit den Reihen

$$x = \varepsilon^3 c z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{5}{4}} + \cdots, \quad \varepsilon^4 = 1,$$

wobei $2c\alpha + G = 0$ und $c^2 + 3P\alpha^2 = 0$ ist. Der lineare Ast schneidet das Monoid in vier, die vier verzweigten Aeste zusammen in 19 consecutiven Punkten; die Classenreduction wird also 23.

Soll der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$ hyperosculiren, so müssen gleichzeitig H, L und P verschwinden. Dann berühren alle sieben Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. in der siebenfachen Kante die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$; von denselben sind ein Mal zwei verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \pm\, a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \pm\, \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wo $a\alpha + G = 0$ und $y_0 a^2 - x_0 G = 0$ ist, und ein Mal sind fünf verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \varepsilon^4 d z^{\frac{9}{5}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{6}{5}} + \cdots, \quad \varepsilon^5 = 1,$$

wo $2d\alpha + G = 0$ und $d^2\alpha + Gd + U\alpha^4 = 0$ ist. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus fünf verzweigten Aesten mit den Reihen

$$x = \varepsilon^4 d z^{\frac{9}{5}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{6}{5}} + \cdots, \quad \varepsilon^5 = 1,$$

wobei: $2d\alpha + G = 0$ und $d^2 + 4U\alpha^3 = 0$ ist; sie schneiden das Monoid in 24 consecutiven Punkten. Der dreifache Punkt erniedrigt die Classe um 24 Einheiten.

73. Gehen wir nun zu den Monoiden über, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus einer dreifachen Ebene besteht, oder, wie wir kurz sagen wollen, zu den Monoiden mit uniplanarem dreifachen Punkt. Als singuläre Ebene nehmen wir die Ebene $x = 0$, während wiederum $u_4 = Fz^4 + z^3(Gx + Hy) + z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + \cdots$ gesetzt wird. Es sind dann folgende fünf Fälle zu unterscheiden: Die vier Geraden $u_4 = 0$, $x = 0$ oder $(0yz)_4 = 0$ sind alle verschieden, oder es fallen zwei zusammen, oder es fallen zwei Mal zwei zusammen, oder endlich es fallen drei resp. vier von ihnen zusammen. Als Scheitel

des projicirenden Kegels 12. Ord. können wir hier, unbeschadet der Allgemeinheit, den Punkt $x, y, z, w = 1, 0, 0, 0$ wählen, dieser Kegel besitzt stets eine achtfache Kante.

Falls die Geraden $(0yz)_4 = 0$ alle verschieden sind, sind die acht Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. paarweise verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = a_i z + \cdots, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wo $(0\alpha 1)_4 = 0$ ist, d. h. die Mäntel berühren die 4 Geraden $(0yz)_4 = 0$. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus 6 Curvenästen, welche drei Mal zu zwei verzweigt sind und durch die Reihen

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = a_i z + \cdots, \quad i = 1, 2, 3,$$

dargestellt werden, wobei $\frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 = 0$ ist. Jeder Curvenast schneidet das Monoid in vier consecutiven Punkten, wodurch sich die Classenerniedrigung des uniplanaren dreifachen Punktes auf 24 beziffert.

Fallen von den Geraden $(0yz)_4 = 0$ zwei mit der Geraden $y : z = \alpha : 1$ zusammen, so sind von den 8 Mänteln des Kegels 12. Ord. zwei Mal je zwei und ein Mal vier verzweigt, die ersteren haben die früheren Reihen, die Reihen der letzteren sind

$$x = \pm c z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^3 d z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{5}{4}} + \cdots, \quad \varepsilon^4 = 1.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder aus 6 Aesten, welche drei Mal zu zwei verzweigt sind; da aber die Tangenten dieser Aeste durch die Gleichung $\frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 = 0$ bestimmt werden, so fällt eine der drei Tangenten mit $y : z = \alpha : 1$ zusammen. Der zu dieser Tangente gehörige Zweig schneidet das Monoid im Ganzen in 9 Punkten, die beiden übrigen Zweige in je 8 Punkten, so dass die Reduction der Classenzahl gleich 25 wird. Ein analoges Resultat kommt, wenn $(0yz)_4 = 0$ zwei Doppelwurzeln hat.

Fallen von den Geraden $(0yz)_4 = 0$ drei mit der Geraden $y : z = \alpha : 1$ zusammen, so ist $\frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(0\alpha 1)_4 = 0$, von den acht Mänteln des Kegels 12. Ord. sind dann ein Mal zwei und ein Mal sechs verzweigt; die Reihen der letzteren werden

$$x = \pm d z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^4 e z^{\frac{10}{6}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{7}{6}} + \cdots, \quad \varepsilon^6 = 1.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus 6 Aesten, von welchen ein Mal zwei und ein Mal vier verzweigt sind; die Reihen der letzteren werden:

$$x = \pm c z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^3 d z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{5}{4}} + \cdots, \quad \varepsilon^4 = 1.$$

Diese Reihen in die Gleichung des Monoids eingesetzt liefern als niedrigste Potenz $z^{1\frac{1}{4}}$, so dass die Gesammterniedrigung der Classe 26 beträgt.

Wird endlich $(0yz)_4 = 0$ eine reine vierte Potenz, so sind alle 8 Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. mit einander verzweigt, sie haben die Reihen

$$x = \pm e z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^5 f z^{\frac{13}{8}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{9}{8}} + \cdots, \quad \varepsilon^8 = 1.$$

Auch alle Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sind mit einander verzweigt; die Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt wird hier gleich 27.

74. Es ist noch die Aufgabe zu erledigen, die in dem letzten Capitel aufgestellten Flächen auch gestaltlich aus den früheren Flächen zu entwickeln. Zu diesem Ende gehen wir von dem Monoide aus, dessen Tangentialkegel 3. Ord. aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, siehe Nr. 57. Nehmen wir ferner an, dass die Hauptgeraden des Monoids alle reell sind, und lassen wir eine singuläre Ebene sich um die singuläre Axe drehen. Wird diese Drehung so lange fortgesetzt, bis die Ebene mit einer der beiden übrigen singulären Ebenen zusammenfällt, so geht das Monoid in ein solches über, dessen Tangentialkegel 3. Ord. aus einer einfachen und einer Doppelebene besteht. Wie diese neue Fläche entsteht, kann man sich leicht vorstellen, wenn man bei der Ausgangsfläche sich eine Ebene um die singuläre Axe drehen lässt und die Schnittcurven beachtet. Die Entstehung dieser neuen Fläche unterscheidet sich aber in etwas von den gestaltlichen Entwicklungsvorgängen, die wir in früheren Capiteln kennen gelernt haben. Dort handelt es sich um das Zusammenziehen einzelner Oeffnungen der Fläche, oder um das Zusammenziehen einzelner an den dreifachen Punkt angrenzender Schleifen der Fläche, die ebenfalls eine Einschnürung der Fläche bewirken. Hier dagegen werden unendlich viele Schleifen zusammengezogen, welche die singulären Ebenen b und c berühren, wie man sofort an der Abbildung der Fläche auf eine Ebene erkennt. In Figur 16 entsprechen nämlich den Kreisstücken Schleifen des zugehörigen Monoids, und durch Drehung der Ebene c in die Lage b ziehen sich alle diese Schleifen zusammen; jeder Schnitt durch den dreifachen Punkt geht aus der Form 16a in die Form 16b über. Nur diejenigen Schnitte machen eine Ausnahme, welche durch eine der vier Geraden in der Doppelebene gehen, sie haben die Form 16c. So kommt es, dass der projicirende Kegel 12. Ord. jetzt eine siebenfache Kante erhält, indem einer der beiden sich

berührenden superlinearen Mäntel in vier lineare Mäntel übergeht, analog dem Uebergang der Curve 10b in 10c. Gehen wir noch einmal auf die Abbildung 16 zurück, so erkennen wir, dass durch Zusammenziehen der Curven 1, 2, 3, 4 daselbst ein derartiges Verhalten bedingt wird; jeder solchen Curve entspricht nämlich eine Doppelschleife der Fläche, und während unendlich viele einfache Schleifen zusammengezogen werden, werden *vier* Doppelschleifen zusammengezogen, entsprechend den vier singulären Richtungen in der Doppelebene.

75. Nachdem nun das Monoid, dessen Tangentialkegel aus einer einfachen und einer Doppelebene besteht, seiner Gestalt nach bekannt ist, kann man die weiteren Specialisirungen dieser Fläche ganz wie früher durch Zusammenziehen einzelner Schleifen (Oeffnungen, welche an den dreifachen Punkt angrenzen) erhalten. Rücken von den Hauptgeraden in der Doppelebene zwei, drei oder vier zusammen, so verzweigen sich von den vier linearen Mänteln des projicirenden Kegels 12. Ord. zwei, drei oder vier, was durch Zusammenziehen von einer, zwei oder drei Schleifen erreicht wird.

76. Das Monoid, dessen Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, und bei welchem $u_4 = 0$ die singuläre Kante passirt, siehe Nr. 62, geht in ein Monoid mit Doppelebene über, wenn man eine der drei singulären Ebenen so lange dreht, bis sie mit einer der übrigen zusammenfällt. Der Uebergang ist genau wie in Nr. 74 zu bewerkstelligen. Man zieht nämlich zunächst die unendlich vielen Schleifen zusammen, welche die singulären Ebenen b und c berühren, und dann zieht man in den drei (nicht mit der singulären Geraden zusammenfallenden) Hauptrichtungen noch eine zweite Schleife zusammen. Dadurch geht von den drei Paar einfach verzweigten Mänteln, aus welchen der projicirende Kegel 12. Ord. vorher bestand, ein Paar in drei lineare Mäntel über, analog dem Uebergang der Curve 17 in drei gerade Linien, die sich in einem Punkte schneiden.

Aus dem soeben abgeleiteten Monoid erhält man alle übrigen Monoide mit einer einfachen und einer Doppelebene im dreifachen Punkt durch Zusammenziehen von Schleifen. Wenn $u_4 = 0$ die einfache Ebene längs der singulären Kante berührt, osculirt oder hyperosculirt, so bleiben die drei linearen Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. ungeändert, während die vier übrigen vier Mäntel entweder zwei Mal zu zwei oder ein Mal zu vier verzweigt sind; das letztere tritt bei einfacher Berührung und bei Hyperosculation ein. Den Uebergang von zwei Paar einfach verzweigten Aesten zu einem superlinearen Zweig 4. Ord. und umgekehrt zeigen die Figuren 18 und 19 resp. 18a und 19a, welche das Zusammenziehen einer an den dreifachen

Punkt angrenzenden Schleife bei dem zugehörigen Monoid leicht erkennen lassen.

Wenn $u_4 = 0$ die Doppelebene längs der singulären Kante berührt, osculirt oder hyperosculirt, so bleibt *ein Paar* einfach verzweigter Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. ungeändert, während von den linearen Mänteln sich einer, zwei oder alle drei mit dem *andern* Mantelpaar verzweigen. Diesen Vorgang zeigt Figur 20, 20a, 20b, 20c; sie zeigen wiederum deutlich das Zusammenziehen der Schleifen bei dem zugehörigen Monoid.

77. Von den Monoiden mit *uniplanarem dreifachen Punkte* macht man sich am besten eine Vorstellung, wenn man die Schnitte untersucht, welche von einer sich um die Axe $y = 0$, $z = 0$ drehenden Ebene ausgeschnitten werden. Dieselben haben im Allgemeinen die Gestalt der Figur 21α; dreht sich die Ebene, bis sie eine der vier Hauptgeraden enthält, so geht 21α über in 21β, dreht sich die Ebene noch weiter, so geht 21β in 21γ über. Man erkennt so, dass das Monoid in der Nähe des dreifachen Punktes folgende Gestalt hat. Im Allgemeinen liegt über der dreifachen Ebene nur ein einziger reeller Flächentheil; derselbe macht an vier Stellen Falten, wie sie Figur 22 zeigt, jedoch existiren diese Falten bei jeder Hauptgeraden nur nach *einer* Seite hin (vom dreifachen Punkt aus gerechnet). Das Monoid besteht in der Umgebung des dreifachen Punktes nur aus einem einzigen unpaaren Flächentheile.

Wenn $u_4 = 0$ die dreifache Ebene berührt, so geht der projicirende Kegel 12. Ord. aus 23 in 23α über, was mit dem Zusammenziehen einer Schleife bei dem zugehörigen Monoid identisch ist. Dasselbe besteht jetzt in der Nähe des dreifachen Punktes aus einem *unpaaren* Flächentheil und aus einem *paaren* Flächentheil, der sich *dornförmig* in den dreifachen Punkt erstreckt, und dort den unpaaren Flächentheil berührt. Wenn $u_4 = 0$ die dreifache Ebene zwei Mal berührt, so giebt es im dreifachen Punkt ausser dem unpaaren Flächentheil noch *zwei paare* Flächentheile. Findet zwischen $u_4 = 0$ und der singulären Ebene eine Osculation statt, so besteht das Monoid in der Nähe des dreifachen Punktes nur aus einem unpaaren Flächentheil, während bei einer Hyperosculation neben dem unpaaren wieder ein paarer Flächentheil erscheint.

Die Monoide mit Doppelgeraden.

78. Soll das Monoid $w \cdot u_3 + u_4 = 0$ eine Doppelgerade besitzen, so muss dieselbe offenbar Doppelkante sowohl für den Kegel $u_3 = 0$ als auch für den Kegel $u_4 = 0$ sein. Wir können desshalb, falls die Doppelkante von $u_3 = 0$ keine isolirte ist, für diesen Kegel die Gleichung

$$u_3 = xyz + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0$$

wählen und ebenso für den Kegel 4. Ord. die Gleichung:

$$u_4 = z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + z(Mx^2 + 3Nx^2y + \cdots) + Qx^4 + \cdots = 0.$$

Dann existiren auf der Doppelgeraden $x = 0$, $y = 0$ des Monoids zwei Punkte (Pinch-points), für welche die beiden Tangentialebenen zusammenfallen; es sind dieses die beiden Punkte $z = \frac{1}{-2K \pm 2\sqrt{IL}}$. Die singulären Ebenen in diesen beiden Punkten sind: $x\sqrt{I} \pm y\sqrt{L} = 0$. Legt man durch die Doppelgerade und vier Hauptgeraden des Monoids einen Kegel 2. Ord., so schneidet dieser noch einen Kegelschnitt aus; es giebt im Ganzen 70 solcher Kegelschnitte. Dieselben liegen paarweise in 35 Ebenen, den 35 noch existirenden dreifachen Berührungsebenen. Ausserdem giebt es auf der Fläche noch 8 Geraden, welche den dreifachen Punkt nicht passiren.

Um die Reduction der Classenzahl in diesem Falle zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass die Curve 9. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ hier in die Doppelgerade und eine Curve 8. Ord. zerfällt. Die Doppelgerade reducirt demnach an und für sich die Classe um 4 Einheiten. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schickt, abgesehen von der Doppelgeraden, noch drei Aeste durch den dreifachen Punkt, so dass derselbe die Classe nur noch um 9 Einheiten erniedrigt. Ausserdem geht je ein Ast jener Curve durch die beiden Pinch-points, welche das Monoid in je drei consecutiven Punkten schneiden, wie man sich sofort überzeugt, wenn man die Potenzreihen für die Curvenäste aufstellt. Die Gesammterniedrigung der Classenzahl wird demnach gleich 19.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Pinch-points auch conjugirt imaginär sein können.

79. Ist die Doppelkante von $u_3 = 0$ isolirt, so lässt sich dieser Kegel in der Form schreiben

$$u_3 = (x^2 + y^2)z + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0,$$

während $u_4 = 0$ seine frühere Form beibehält. Die Pinch-points sind dann durch $z = \frac{2}{-(I+L) \pm \sqrt{(I-L)^2 + K^2}}$ bestimmt, und sind hier offenbar immer reell; natürlich sind auch die singulären Ebenen in diesen Punkten, nämlich

$$\sqrt{I - L \pm \sqrt{(I-L)^2 + 4K^2}} \cdot x$$
$$+ \sqrt{-I + L \pm \sqrt{(I-L)^2 + 4K^2}} \cdot y = 0,$$

stets reell.

80. Nehmen wir die Doppelkante von $u_3 = 0$ wieder, wie in Nr. 78, mit reellen Tangentialebenen an, so kann eine weitere Specialisirung

dadurch eintreten, *dass ein Mantel von $u_4 = 0$ einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante berührt.* Dieses tritt ein, wenn die Constante L in der Gleichung von $u_4 = 0$ verschwindet. Dann giebt es längs der Doppelkante *eine feste und eine bewegliche Tangentialebene,* beide fallen zusammen für den Punkt $z = -\frac{1}{2K}$. Es existirt hier nur noch ein *einziger singulärer* Punkt mit zusammengefallenen Tangentialebenen, der durch Zusammenrücken zweier Pinch-points entstanden ist.

Die constante Tangentialebene schneidet das Monoid noch in einer Geraden $D + Pz + Uy = 0$, welche den singulären Punkt nicht enthält. Jeder projicirende Kegel 10. Ord. berührt die Doppelgerade in dem singulären Punkt, so dass derselbe eine Form annimmt, wie sie Figur 24 zeigt. Den Beweis dafür erhält man, wenn man die Reihen der Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ im Punkt $x = y = 0$, $z = -\frac{1}{2K}$ aufstellt. Die Reihen der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ in diesem Punkte werden $x = bz_1^3 + \cdots$, $y = az_1^2 + \cdots$, wenn $z_1 = z + \frac{1}{2K}$ ist; der zugehörige Curvenast schneidet desshalb das Monoid in 6 consecutiven Punkten. Die Erniedrigung der Classenzahl wird also gleich 19, genau wie in Nr. 78.

81) Wenn ein Mantel von $u_4 = 0$ einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante osculirt, so ist $P = 2KD$. Dann gibt es wieder eine *feste* und eine *bewegliche* Tangentialebene, welche für den Punkt $z = -\frac{1}{2K}$ zusammenfallen; erstere schneidet das Monoid noch in einer Geraden, welche durch den singulären Punkt $z = -\frac{1}{2K}$ hindurchgeht. Jeder projicirende Kegel 10. Ord. schickt *zwei* Mäntel durch denselben hindurch, er hat also die Form 25. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt in diesem Punkt ebenfalls zwei Aeste mit den Reihen $x = b_i z_1^2 + \cdots$, $y = a_i z_1 + \cdots$, wo $i = 1, 2$ und $z_1 = z + \frac{1}{2K}$ ist; jeder Ast schneidet das Monoid in 4 consecutiven Punkten. Der singuläre Punkt ist durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines gewöhnlichen Knotenpunktes entstanden. Die Reduction der Classe beträgt hier 21.

Findet zwischen einem Mantel des Kegels 4. Ord. und einem Mantel des Kegels 3. Ord. eine Hyperosculation statt, so hat man die Relation $U + 3CP - 3DO + JD^2 = 0$. Bei dem projirenden Kegel 10. Ord. sind jetzt die beiden Mäntel durch den singulären Punkt verzweigt, derselbe hat also die Form 26. Er erniedrigt die Classe des Monoids um 9 Einheiten, wie man durch Aufstellung der Curve

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zeigt, und ist durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines biplanaren Knotenpunktes B_3 entstanden.

Ganz analog ergiebt sich allgemein folgendes Resultat: *Besitzen die Kegel $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinsame Doppelkante und hat ein Mantel des einen Kegels mit einem Mantel des andern Kegels $\varkappa$ consecutive Kanten gemein, welche mit der Doppelkante zusammenfallen, so besitzt das zugehörige Monoid eine Doppelkante und auf ihr einen singulären Punkt, der durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines biplanaren Knotenpunktes $B_{\varkappa-1}$ entstanden ist und die Classe demgemäss um $(\varkappa + 5)$ Einheiten erniedrigt.*

82) Eine andere Reihe von Monoiden erhalten wir, wenn beide Mäntel von $u_3 = 0$ beide Mäntel von $u_4 = 0$ längs der gemeinsamen Doppelkante berühren, was durch gleichzeitiges Nullsetzen von J und L erreicht wird. Dann giebt es längs der Doppelgeraden des Monoids *zwei constante Tangentialebenen.* Die Kegelschnitte, welche in den Ebenen durch die Doppelgerade liegen, schneiden sich alle in denselben beiden Punkten der Doppelgeraden, nämlich in den *beiden dreifachen Punkten des Monoids* $x = y = z = 0$ und $x = y = 0$, $z = -\frac{1}{2K}$. Die beiden dreifachen Punkte sind ganz gleichartig und erniedrigen die Classe, abgesehen von der Doppelgeraden, um 9, so dass die Gesammtreduction gleich 22 wird. Das Monoid erhält die beiden Gleichungen:

$$\begin{gathered} xyz + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 2Kz^2xy \\ + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2 + Py^3) + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 \\ + 4Txy^3 + Uy^4 = 0, \end{gathered}$$

und:

$$\begin{gathered} -xyz_1 + x^3\left(A - \frac{M}{2K}\right) + 3x^2y\left(B - \frac{N}{2K}\right) + 3xy^2\left(C - \frac{O}{2K}\right) \\ + y^3\left(D - \frac{P}{2K}\right) + 2Kz_1^2xy + z_1(Mx^3 + \cdots) + (Qx^4 + \cdots) = 0, \\ z_1 = z + \frac{1}{2K}. \end{gathered}$$

83) Auch hier kann wieder die Relation $P = 2KD$ erfüllt sein, so dass der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ den *einen* Mantel von $u_3 = 0$ osculirt. Dann verschwindet der Coefficient von y^3 in der zweiten Flächengleichung, d. h. der Tangentialkegel in dem neuen dreifachen Punkte zerfällt in die Ebene $x = 0$ und einen Kegel 2. Ord. Während also der ursprüngliche dreifache Punkt nach wie vor die Classe um 9 Einheiten erniedrigt (abgesehen von der Doppelgeraden), erniedrigt der neue dreifache Punkt die Classe um 10 Einheiten, siehe Nr. 52.

Wie wir soeben gesehen haben erhält der Tangentialkegel im neuen dreifachen Punkt, ausser der Doppelgeraden des Monoids, eine

weitere Doppelkante $x = 0$, $z_1 = 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right)$, sobald *ein* Mantel von $u_3 = 0$ *einen* Mantel von $u_4 = 0$ längs der Doppelgeraden osculirt. Wir bezeichnen nun den Tangentialkegel 3. Ord. im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{2K}$ mit $U_3 = 0$ und den Kegel 4. Ord. mit $U_4 = 0$ (so dass also die zweite Flächengleichung in $U_3 + U_4 = 0$ übergeht). Dann lässt sich leicht auf analytischem Wege zeigen und es ist geometrisch unmittelbar klar, dass der Kegel $U_4 = 0$ durch die Doppelkante $x = 0$, $z_1 = 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right)$ des Kegels $U_3 = 0$ hindurchgeht und daselbst mit dem *einen* Mantel dieses Kegels $(\varkappa - 3)$ consecutive Kanten gemein hat, wenn der *eine* Mantel von $u_3 = 0$ mit dem *einen* Mantel von $u_4 = 0$ $\varkappa$ consecutive Kanten gemein hat. Der neue dreifache Punkt reducirt demnach (abgesehen von der Doppelgeraden des Monoids) nach Nr. 59, die Classe um $(7 + \varkappa)$ Einheiten, so dass die gesammte Classenerniedrigung gleich $(20 + \varkappa)$ wird.

84) Es kann nun weiter eintreten, dass beide Mäntel von $u_4 = 0$ beide Mäntel von $u_3 = 0$ in der Doppelkante osculiren, dann ist gleichzeitig $P = 2KD$ und $M = 2KA$, d. h. der Kegel $U_3 = 0$ zerfällt in die drei Ebenen:

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z_1 - 3x\left(B - \frac{N}{2K}\right) - 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right) = 0.$$

Die Classenreduction beträgt in diesem Falle 24. Finden zwischen den Mänteln von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ noch höhere Berührungen statt, so geht $U_4 = 0$ durch die Doppelkanten:

$$x = 0,\quad z_1 = 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right) \quad \text{resp.} \quad y = 0,\quad z_1 = 3x\left(B - \frac{N}{2K}\right)$$

einfach hindurch, oder berührt, osculirt oder hyperosculirt daselbst die Ebene $z_1 - 3x\left(B - \frac{N}{2K}\right) - 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right) = 0$. Die Erniedrigung der Classe ist in jedem Falle leicht anzugeben.

85) Ausser den bereits aufgezählten *Monoiden mit zwei dreifachen Punkten* sind noch folgende zu erwähnen. Der Kegel $u_3 = 0$ kann *zwei* Doppelkanten besitzen, die *eine* ist Doppelgerade des Monoids, während zugleich der Kegel $U_3 = 0$ *zwei* Doppelkanten hat. Dann sind noch zwei Fälle zu unterscheiden; entweder die Ebene von $u_3 = 0$ ist mit der Ebene von $U_3 = 0$ identisch und die Kegel 2. Ord., welche als Theile von $u_3 = 0$ resp. $U_3 = 0$ auftreten, berühren sich längs der Doppelgeraden des Monoids, oder die Ebene von $u_3 = 0$ berührt den Kegel 2. Ord. von $U_3 = 0$ und die Ebene von $U_3 = 0$ berührt den Kegel 2. Ord. von $u_3 = 0$.

Der Kegel $u_3 = 0$ kann endlich *drei* Doppelkanten besitzen, die *eine* ist Doppelgerade des Monoids, während der Kegel $U_3 = 0$ ebenfalls drei Doppelkanten besitzt. Die beiden Ebenen von $u_3 = 0$,

welche sich in der Doppelgeraden des Monoids schneiden, sind identisch mit zwei Ebenen von $U_3 = 0$. Die Classe einer solchen Fläche ist $36 - 26 = 10$. Ihre Gleichung lässt sich schreiben:

$$xyzw + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4 = 0.$$

Besitzt dieses Monoid noch zwei Knotenpunkte, so ist seine Classe gleich 6 und seine Gleichung wird:

$$xyzw + (ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 = 0.$$

Es mag hier noch erwähnt werden, dass auch bei den in Nr. 78, 79, 80 und 81 aufgezählten Monoiden der Kegel $u_3 = 0$ *zwei* resp. *drei* Doppelkanten besitzen und $u_4 = 0$ eventuell durch dieselben hindurchgehen und daselbst berühren kann. Ferner mag hervorgehoben werden, dass man zu keinen neuen Monoiden gelangt, wenn man die Doppelkante des Kegels $u_3 = 0$ zur dreifachen oder vierfachen Kante des Kegels $u_4 = 0$ nimmt.

86) Es sollen nun diejenigen Monoide mit Doppelgeraden ihre Erledigung finden, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine Rückkehrkante, Selbstberührungskante oder dreifache Kante besitzt. Hat $u_3 = 0$ *eine Rückkehrkante*, welche für $u_4 = 0$ Doppelkante ist, so wird:

$$u_3 = x^2z + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

während $u_4 = 0$ die in Nr. 78 angegebene Form beibehält. Auf der Doppelgeraden des Monoids existirt jetzt nur noch ein einziger gewöhnlicher Pinch-point $z = \frac{L}{K^2 - JL}$ mit der singulären Ebene $Kx + Ly = 0$, während der andere Pinch-point in den dreifachen Punkt hereingerückt ist. Von den vier Aesten, welche die Berührungscurve des projicirenden Kegels 10. Ord. durch den dreifachen Punkt schickt, berührt *einer* die Doppelgerade und hat die Reihen: $x = bz^3 + \cdots$, $y = az^2 + \cdots$, wobei $Da + L = 0$ und $2b + 3Ca^2 + 2Ka = 0$. Man findet, dass die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt jetzt 12 beträgt, sie hat sich also durch Hereinrücken des Pinch-point um 3 vermehrt.

Berührt ein Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Rückkehrkante, so wird $L = 0$. Dann giebt es längs der Doppelkante eine *constante* Tangentialebene $x = 0$ und eine *bewegliche* $x\left(J + \frac{1}{z}\right) + 2yK = 0$. Beide Pinch-points sind hier in den dreifachen Punkt hereingerückt. Von den vier Aesten der Berührungscurve des projicirenden Kegels 10. Ord. berührt wiederum *einer* die Doppelgerade, er hat die Reihen $x = bz^4 + \cdots$, $y = az^3 + \cdots$. Die Reduction der Classe des Monoids durch den dreifachen Punkt beträgt 15.

87) Besitzt $u_3 = 0$ *eine Selbstberührungskante*, welche für $u_4 = 0$ Doppelkante ist, so schreiben wir:

$$u_3 = x(Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz),$$

während u_4 seine frühere Form nicht ändert. Dann giebt es auf der Doppelgeraden wiederum nur einen einzigen Pinch-point $z = \frac{2DL}{K^2 - JL}$ mit der singulären Ebene $Kx + Ly = 0$; der andere ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt, von welchen zwei die Doppelgerade berühren und mit einander verzweigt sind, ihre Reihen sind: $x = bz^2 + \cdots$, $y = \pm\, a z^{\frac{3}{2}} + \cdots$. Von den drei Aesten der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ im dreifachen Punkt sind ebenfalls zwei verzweigt, sie haben die Reihen:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \pm\, az^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wobei $Bb + L = 0$ und $Ba^2 + 4Db = 0$ ist. Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt wird in Folge dessen gleich 13.

Berührt *einer* der Mäntel von $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, so verschwindet der Coefficient von z^2y^2, nämlich L, und es giebt in der Doppelgeraden eine *constante* und eine *bewegliche* Tangentialebene. Beide Pinch-points sind in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt, von welchen zwei die Doppelgerade berühren; ihre Reihen sind $x = b_i z^3 + \cdots$, $y = a_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$. Auch von den drei Aesten der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ berühren zwei die Doppelgerade und besitzen die Reihen: $x = b_i z^3 + \cdots$, $y = a_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$; sie schneiden desshalb das Monoid in je 7 consecutiven Punkten. Demnach wird die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt gleich 17.

Osculirt *einer* der Mäntel von $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$ längs der Selbstberührungskante, so verschwindet auch noch P. Dann sind die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord., welche die Doppelgerade tangiren, verzweigt und ihre Reihen werden $x = \pm\, dz^{\frac{7}{2}} + \cdots$, $y = az^2 + \cdots$, wo $Ba + 2K = 0$ und: $4Dd^2 - Ua^4 = 0$. Von den drei Aesten der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ berühren wieder zwei die Doppelgerade; der *eine* hat die Reihen $x = bz^3 + \cdots$, $y = az^2 + \cdots$, wo $Ba + K = 0$ und $4Db + Ka = 0$ ist, der *andere* hat die Reihen $x = cz^4 + \cdots$, $y = az^2 + \cdots$, wo $Ba + 2K = 0$ und $Kb - 2Ua^3 = 0$ ist. Der erstere Ast schneidet das Monoid in 7, der letztere in 8 consecutiven Punkten, so dass die Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt gleich 18 wird.

Osculirt *einer* der beiden Mäntel, die $u_4 = 0$ durch die Selbstberührungskante schickt, den Kegel:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0,$$

so gelten die Relationen $L = 0$, $BK - DP = 0$. Die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord., welche die Doppelgerade des Monoids berühren, sind dann ebenfalls mit einander verzweigt, aber ihre Reihen werden jetzt:

$$x = cz^3 \pm dz^{\frac{7}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

wo

$$\alpha = \frac{2K}{B} \quad \text{und} \quad c = -\frac{2K^2}{BD}$$

ist. Ebenso berühren zwei Aeste der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ganz wie vorher, die Doppelgerade; ihre Reihen sind:

$$x = b_i z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{K}{B}, \quad b_1 = -\frac{3}{4}\frac{P\alpha}{B} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{2K}{B}, \quad b_2 = -\frac{P\alpha}{B}$$

ist. Der erstere Zweig schneidet das Monoid in 7, der letztere in 8 consecutiven Punkten; die Classenerniedrigung wird wieder 18.

Es ist ferner möglich, dass *ein* Mantel von $u_4 = 0$ mit dem Kegel $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0$ vier, fünf, sechs, oder sieben consecutive Kanten gemein hat, die alle in die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$ hereingerückt sind. Dann wird die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt sich auf 19, 20, 21 oder 22 belaufen. Der Beweis lässt sich geometrisch leicht führen und ist ganz analog dem Beweise in Nr. 59. Dabei werden die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord., welche die Doppelgerade des Monoids tangiren, verzweigt sein, wenn die Zahl der consecutiven Kanten fünf oder sieben beträgt; beträgt sie jedoch vier oder sechs, so tritt eine Berührung der beiden Mäntel ein.

88) Es kommen jetzt die Monoide an die Reihe, deren Kegel $u_3 = 0$ in *drei sich in einer Geraden schneidende Ebenen* zerfällt, also $u_3 = xy(x + \varrho y)$, und deren Kegel $u_4 = 0$ die singuläre Gerade zur Doppelkante hat. Hat dieser letztere Kegel keine besondere Lage zu den drei Ebenen $u_3 = 0$, so ist seine Gleichung wieder die in Nr. 78 angenommene. Dann giebt es längs der Doppelgeraden des Monoids zwei *constante* Tangentialebenen, nämlich $Jx^2 + 2Kxy + Ly^2 = 0$. Der projicirende Kegel 10. Ord. aus dem Punkte $x_0, y_0, 0, 0$ schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt, welche alle vier die Doppelgerade berühren und deren Reihen die Form haben:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schickt drei Aeste durch den

dreifachen Punkt, auch sie berühren alle die Doppelgerade und haben Entwicklungen von der Form:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt beträgt offenbar 18. *Die vorliegende Fläche entsteht aus dem Monoid mit zwei dreifachen Punkten durch Zusammenrücken der beiden dreifachen Punkte.*

Berührt *ein* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$, so wird $L = 0$, und die constanten Tangentialebenen werden $x = 0$ und $Jx + 2Ky = 0$. Die Entwicklungen für die vier Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. werden:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective

$$x = \pm b z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

d. h. zwei sind verzweigt. Die Reihen der drei Zweige von $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sind $x = a_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$, respective $x = b z^3 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$; die Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt wird in Folge dessen gleich 19.

Osculirt *ein* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$, so wird $L = 0$ und $P = 0$. Zwei Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. haben wieder die Entwicklungen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

die beiden andern aber ergeben die Reihen:

$$x = \pm b z^3 + c_i z^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \beta_i z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Ebenso werden zwei Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wieder durch die Reihen $x = a_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z^2 \cdots$, $i = 1, 2$, die dritte aber durch die Reihen $x = c z^4 \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$ dargestellt. So ergiebt sich als Classenerniedrigung die Zahl 20.

89) Berühren die *beiden* Mäntel von $u_4 = 0$ die singulären Ebenen $x = 0$, $y = 0$ respective, so wird $J = 0$ und $L = 0$. Jetzt sind die vier Mäntel des Kegels 10. Ord. zwei Mal zu zwei mit einander verzweigt, sie besitzen die Reihen:

$$x = \pm b z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Die Reihen der drei Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ beginnen mit: $x = a z^2$, $y = \alpha z^2$, resp. $x = b z^3$, $y = \alpha z^2$, resp. $x = a z^2$, $y = \beta z^3$; die Classenerniedrigung wird wiederum gleich 20.

Osculirt *ein* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$, während der

andere die Ebene $y=0$ berührt, so wird ausser $J=0$, $L=0$, auch noch $P=0$. Zwei Mäntel des Kegels 10. Ord. haben die früheren Reihen:

$$x=az^2+\cdots,\quad y=\pm\beta z^{\frac{5}{2}}+\cdots,$$

die beiden andern haben die neuen Reihen:

$$x=\pm bz^3+c_iz^4+\cdots,\quad y=\alpha z^2+\beta_i z^3+\cdots,\quad i=1,2.$$

Die Reduction der Classe wird 21.

Osculiren die *beiden* Mäntel von $u_4=0$ die singulären Ebenen $x=0$, $y=0$ respective, so wird $J=0$, $L=0$, $M=0$, $P=0$ und die Reduction der Classe berechnet sich auf 22. Die Reihen der vier Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. sind dann:

$$x=\pm bz^3+c_iz^4+\cdots,\quad y=\alpha z^2+\beta_i z^3\cdots,\quad i=1,2,$$

respective

$$x=az^2+b_iz^3+\cdots,\quad y=\pm\beta z^3+\gamma_i z^4+\cdots.$$

Alle in den letzten beiden Nummern erhaltenen Monoide können als Monoide mit zwei zusammengefallenen dreifachen Punkten aufgefasst werden.

90) Es erübrigen nun noch diejenigen Monoide mit Doppelgeraden, deren Tangentialkegel $u_3=0$ in eine einfache und eine Doppelebene oder in eine dreifache Ebene zerfällt. Beginnen wir mit dem ersteren Falle und nehmen wir zunächst an, dass die Doppelkante von $u_4=0$ nicht mit der dreifachen Kante von $u_3=0$ zusammenfällt, dann können wir $u_4=0$ in seiner früheren Form (Nr. 78) belassen und

$$u_3=x^2(Ax+By+Cz)$$

setzen. Auf der Doppelgeraden giebt es ersichtlich nur einen gewöhnlichen Pinch-point; der andere ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt jetzt *fünf* Mäntel durch den dreifachen Punkt, nämlich zwei lineare Mäntel $x=b_iz^2+\cdots$, $y=\alpha_iz+\cdots$, welche die Geraden $Lz^2+Pzy+Uy^2=0$ berühren, und drei verzweigte Mäntel:

$$x=\varepsilon bz^{\frac{4}{3}}+\cdots,\quad y=\alpha z+\cdots,\quad \varepsilon^3=1,$$

welche die Gerade $By+Cz=0$ berühren. Die Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ besitzt *vier* Zweige, davon sind zwei linear, nämlich $x=b_iz^2+\cdots$, $y=\alpha_iz+\cdots$, $i=1,2$, und zwei verzweigt, nämlich:

$$x=\pm bz^{\frac{3}{2}}+\cdots,\quad y=\alpha z^2+\cdots,$$

sie berühren die Gerade $By+Cz=0$. Die vier Aeste schneiden das Monoid in je vier consecutiven Punkten, so dass die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt (abgesehen von der Doppelgeraden) gleich 16 wird.

Berührt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene, so wird $L = 0$; es giebt auf der Doppelgeraden keinen Pinch-point mehr, beide sind in den dreifachen Punkt hereingerückt. Die fünf Mäntel des Kegels 10. Ord. erhalten jetzt die Reihen:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

respective

$$x = bz^3 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots.$$

Die vier Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ werden durch die Reihen:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

resp.

$$x = bz^3 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

resp.

$$x = \pm b z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots.$$

dargestellt. Die Classe wird durch den dreifachen Punkt um 19 Einheiten erniedrigt.

Osculirt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene, so wird $L = 0$ und $P = 0$ und die fünf Mäntel des Kegels 10. Ord. werden durch die Reihen:

$$x = \pm c z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

respective

$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots$$

gegeben. In Folge dessen wird die Reduction der Classe gleich 20.

Hier ist noch zu erwähnen, dass die Hauptgeraden des Monoids, welche in der Ebene $Ax + By + Cz = 0$ liegen, in die dreifache Kante von $u_3 = 0$ hereinrücken und so die Classe noch weiter erniedrigen können, vergl. 71.

91) Fällt die Doppelkante von $u_4 = 0$ mit der dreifachen Kante von $u_3 = 0$ zusammen, so können wir $u_3 = x^2 y$ setzen, $u_4 = 0$ aber in seiner früheren Form nehmen. Dann sind die Tangentialebenen längs der Doppelgeraden *constant*. Die Mäntel des Kegels 10. Ord., welcher die Fläche aus dem Punkte x_0, y_0, 0, 0 projicirt, erhalten die Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Reihen der vier Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ werden:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Die Classenerniedrigung beträgt also 20.

Berührt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$, wird also $J = 0$, so besitzt der Kegel 10. Ord. wieder zwei Mäntel mit den Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und einen mit den Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots;$$

nur die beiden letzten Mäntel erhalten die neuen Reihen:

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Die Classenerniedrigung wird 21.

Osculirt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$, wird also auch noch $M = 0$, so besitzt der Kegel 10. Ord. immer noch zwei Mäntel mit den Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und einen mit den Reihen

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots;$$

dagegen werden die beiden noch übrigen Mäntel durch die Reihen:

$$x = a z^2 + b_i z^3 \cdots, \quad y = \pm \beta z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2$$

dargestellt. Die Classenerniedrigung berechnet sich auf 22.

Berührt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$, dann wird $L = 0$, und der Kegel 10. Ord. besitzt einen Mantel mit den Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z \cdots,$$

zwei weitere Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und endlich zwei verzweigte Mäntel mit den Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Die Classenerniedrigung beträgt 21.

Osculirt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$, dann wird $L = 0$, $P = 0$, und der Kegel 10. Ord. besitzt zwei Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

und drei verzweigte Mäntel mit den Reihen:

$$x = c z^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Die Classenerniedrigung beträgt 22.

Berühren die Mäntel von $u_4 = 0$ respective die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$, so wird $J = 0$ und $L = 0$. Der projicirende Kegel 10. Ord. hat hier einen linearen Mantel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = az + \cdots,$$

und zwei Mal zwei verzweigte Mäntel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

respective

$$x = az^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Der dreifache Punkt erniedrigt die Classe wieder um 22 Einheiten.

Wenn der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$ osculirt, während der *andere* die Ebene $x = 0$ berührt, so ist $J = 0$, $L = 0$ und $M = 0$. Der Kegel 10. Ord. hat wieder den linearen Mantel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = az + \cdots,$$

die beiden verzweigten Mäntel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

und zwei sich berührende Mäntel:

$$x = az^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^3 + \cdots.$$

Die Reduction der Classe wird 23.

Wenn umgekehrt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$ osculirt, während der *andere* die Ebene $y = 0$ tangirt, so ist $J = 0$, $L = 0$ und $P = 0$. Der Kegel 10. Ord. hat jetzt zwei verzweigte Mäntel:

$$x = az^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots$$

und drei verzweigte Mäntel:

$$x = cz^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Die Reduction der Classe ist wieder 23.

Osculiren die *beiden* Mäntel von $u_4 = 0$ respective die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, so wird endlich: $J = 0$, $L = 0$, $M = 0$, $P = 0$. Der projicirende Kegel 10. Ord. besitzt zwei sich berührende Mäntel $x = az^2 + \cdots$, $y = \pm \beta z^3 + \cdots$ und drei verzweigte Mäntel:

$$x = cz^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots.$$

Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt (abgesehen von der Doppelgeraden) beträgt 24.

92) Zum Schluss sind noch die Monoide mit Doppelgeraden zu behandeln, deren *dreifacher Punkt uniplanar ist*, für welche also $u_3 = x^3$ wird. Die Doppelkante von $u_4 = 0$ liegt in der singulären Ebene. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt sechs Mäntel durch den dreifachen Punkt, davon sind zwei Mal zwei verzweigt, sie berühren die Geraden $Lz^2 + Pzy + Uy^2 = 0$ und ihre Reihen sind:

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2;$$

die beiden übrigen berühren sich und haben die Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ besitzt fünf Aeste, davon sind zwei Mal zwei verzweigt, nämlich:

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und einer ist linear, nämlich $x = az^2 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$. Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt wird demnach 22. Würde $u_4 = 0$ zwei Doppelkanten haben, welche beide in der singulären Ebene liegen, so würde das Monoid zwei Doppelgeraden haben. Der projicirende Kegel würde dann nur von der 8. Ordnung sein und nur vier Mäntel durch den dreifachen Punkt schicken, welche zu zwei die beiden Doppelgeraden berühren. Die Erniedrigung der Classe würde, abgesehen von den beiden Doppelgeraden, 20 betragen.

Berührt *ein* Mantel von $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$ längs der Doppelkante, so wird $L = 0$. Die sechs Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. erhalten dann die Reihen:

$$x = \pm b z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

respective

$$x = az^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt steigt desshalb auf 23.

Osculirt *ein* Mantel von $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$ längs der Doppelkante, so wird auch noch $P = 0$, und die Reductionszahl der Classe steigt auf 24. Die 6 Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. werden jetzt durch die Reihen:

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = \varepsilon^3 c z^{\frac{8}{5}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{6}{5}} + \cdots, \quad \varepsilon^5 = 1,$$

dargestellt, wobei $3c^2 + 2K\alpha = 0$ und $-2c^3 + U\alpha^4 = 0$ ist.

93) Hiermit ist die Gesammtheit der Monoide mit Doppelgeraden erschöpft, insofern es sich um eine Specialisirung des dreifachen Punktes in der Richtung der Doppelgeraden handelt. Es mag jedoch besonders hervorgehoben werden, dass noch weitere Specialisirungen des dreifachen Punktes in andern Richtungen sich einstellen können.

Dazu ist natürlich vor allen Dingen erforderlich, dass der Kegel $u_3 = 0$ mehrere singuläre Kanten besitzt. Ist dieses der Fall, so kann in der Richtung einer jeden solchen Kante eine Reihe weiterer Specialisirungen eintreten, sowie wir dieses in den vorhergehenden Capiteln gesehen haben. Auch die gestaltliche Wirkung jener Specialisirungen haben wir bereits studirt, so dass wir hier davon absehen können. Schliesslich ist noch hinzuzufügen, dass *zwei* resp. *drei* Doppelkanten des Kegels $u_3 = 0$ zu Doppelgeraden des Monoids werden können. *Die letzteren Flächen nennt man Steiner'sche Flächen*, sie sollen in einem weiteren Capitel eine besondere Berücksichtigung erfahren.

94) Es mögen hier einige wenige Monoide mit Doppelgeraden eine kurze Behandlung finden. Zunächst können die Monoide mit *einer* Doppelgeraden noch *vier* Knotenpunkte besitzen. Legt man durch diese Knotenpunkte und die Doppelgerade einen Kegel 2. Ord., dessen Scheitel sich im dreifachen Punkt des Monoids befindet, so schneidet derselbe aus der Fläche einen Kegelschnitt, der die vier Knotenpunkte enthält und die Doppelgerade schneidet. Die Ebene durch diesen Kegelschnitt berührt längs desselben, trifft also die Doppelgerade in einem der beiden Pinch-points; durch den andern Pinch-point giebt es keine derartige Ebene. Berührt der Kegel 2. Ord. den Tangentialkegel 3. Ord. längs seiner Doppelkante, so fallen die beiden Pinch-points zusammen und zugleich rückt einer der vier Knotenpunkte in diesen singulären Punkt hinein.

Die Monoide mit *zwei* Doppelgeraden können noch *zwei* Knotenpunkte besitzen. Jede Ebene durch die beiden Knotenpunkte schneidet natürlich zwei Kegelschnitte aus; zwei von diesen Ebenen sind besonders ausgezeichnet, sie berühren das Monoid längs eines Kegelschnitts und schneiden die Doppelgeraden in ihren Pinch-points. Die Gleichung dieser Fläche lässt sich schreiben:

$$x(x^2 + 2azy) + \varrho(x^2 + 2byz + 2czx + 2dxy)^2 = 0.$$

Wird in dieser Gleichung $c = 0$ und $d = 0$ gesetzt, so giebt es auf jeder Doppelgeraden einen singulären Punkt, der durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines gewöhnlichen Knotenpunktes entstanden ist. Unter den Ebenen durch beide singuläre Punkte giebt es zwei, welche längs eines Kegelschnitts berühren.

Die Monoide mit *zwei dreifachen Punkten* können noch *drei* Knotenpunkte aufweisen. Von jedem Knotenpunkt aus giebt es zwei Tangentenkegel 2. Ord. an das Monoid. Diese Monoide bilden einen speciellen Fall des Symmetroids; man erhält dasselbe, wenn von den vier Grundflächen des Flächengebüsches zweiter Ordnung in Nr. 20 und 21 zwei in Doppelebenen ausarten. Die beiden dreifachen Punkte des Symmetroids rücken zusammen, wenn von den vier Grundflächen

des Gebüsches eine in eine Doppelebene und eine in ein Ebenenpaar ausartet, dessen eine Ebene mit der Doppelebene identisch ist.

95) Wir wenden uns jetzt der *gestaltlichen Discussion* der in diesem Capitel aufgezählten Flächen zu. Hier ist zunächst zu bemerken, dass das Verhalten der Monoide längs einer Doppelgeraden ein dreifaches sein kann. Giebt es auf der Doppelgeraden keine reellen Pinch-points, so giebt es in jedem Punkt derselben zwei reelle Tangentialebenen; durchläuft der Punkt die ganze Doppelgerade, so vertauschen sich die beiden Tangentialebenen. Bei der Abbildung des Monoids auf die Ebene stellt sich die Umgebung der Doppelgeraden in einer Weise dar, wie sie Figur 27 zeigt. Ist das ebene Bild ein Kreis (oder Oval), welcher den Bildpunkt der Doppelgeraden einschliesst, so besteht die zugehörige Curve auf dem Monoid aus vier durch den dreifachen Punkt verlaufenden unendlichen Aesten, die sich ganz in der Nähe der Doppelgeraden hinziehen. Ein solches Monoid kann man entstehen lassen aus einem Monoide, dessen Abbildung durch Fig. 27a dargestellt wird; dem kleinen Kreise entspricht auf der Fläche eine Curve, welche aus zwei unendlich langen Zweigen besteht, die sich in der Nähe der Doppelkante von $u_3 = 0$ hinziehen. Lässt man den Kreis immer kleiner werden, bis er sich auf einen Punkt zusammenzieht, so rücken die beiden unendlich langen Zweige ebenfalls zusammen und bilden so die Doppelgerade (da sie vorher auf getrennten Flächentheilen lagen).

Giebt es auf der Doppelgeraden zwei reelle Pinch-points, und giebt es in dem dreifachen Punkt zwei reelle Tangentialebenen durch dieselbe, so ist das Stück der Doppelgeraden zwischen den beiden Pinch-points isolirt und man kann die unendlich ferne Ebene so wählen, dass $u_4 = 0$ eine isolirte Doppelkante erhält. Dazu stellt Figur 28 das Bild des Monoids in der Nähe der Doppelgeraden dar, die Richtungen t_1 und t_2 gehören den Pinch-points zu; dem kleinen Kreise entspricht auf dem Monoid eine Curve, welche aus vier Schleifen besteht, die abwechselnd auf der einen und der andern Seite des dreifachen Punktes liegen. Zieht sich der Kreis in einen Punkt zusammen, so ziehen sich die Schleifen in die Stücke der Doppelgeraden zwischen den Pinch-points und dem dreifachen Punkt zusammen. Wenn die isolirte Doppelkante von $u_4 = 0$ wegfällt, so verschwindet gleichzeitig die Doppelgerade und wir erhalten das Monoid, wie es in Nr. 52 untersucht wird. Der gestaltliche Uebergang von der letzteren Fläche zur ersteren wird bewerkstelligt, indem man die Flächentheile längs *zweier Stücke* der Doppelkante, die im dreifachen Punkt aneinander stossen, zusammenwachsen lässt. Das Zusammenwachsen tritt also hier, nicht wie früher in einzelnen Punkten, sondern längs eines Stückes einer Geraden ein.

Liegen auf der Doppelgeraden zwei reelle Pinch-points, giebt es aber in dem dreifachen Punkt keine reellen Tangentialebenen durch dieselbe, so sind die Stücke der Doppelgeraden zwischen den Pinch-points und dem dreifachen Punkt isolirt und man kann wieder die unendlich ferne Ebene so wählen, dass die Doppelkante von $u_4 = 0$ isolirt wird. Bildet man die Fläche wieder auf die Ebene ab, so entsprechen den Pinch-points wieder zwei Richtungen t_1 und t_2, Figur 29; dem kleinen Kreise entspricht auf der Fläche eine geschlossene Curve, welche in der Nähe der Doppelgeraden verläuft und sich zwischen den beiden Pinch-points zwei Mal hin und zurückbewegt. Zieht sich der Kreis in einen Punkt zusammen, so geht die Curve auf der Fläche in das vierfach zu zählende Stück der Doppelgeraden zwischen den Pinch-points über. Verschwindet die isolirte Doppelkante von $u_4 = 0$, so verschwindet die Doppelgerade des Monoids, und es geht in ein Monoid über, dessen Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine isolirte Doppelkante besitzt, siehe Nr. 56. Der Uebergang von letzterer Fläche zur ersteren ist unschwer zu verfolgen; der dornförmige Theil derselben zieht sich zu einem Stück der Doppelgeraden zusammen, während gleichzeitig ein Zusammenwachsen des angrenzenden Flächengebiets mit sich selbst stattfindet.

96. *Die Monoide mit einer Doppelgeraden und reellen Pinchpoints,* für welche die an den dreifachen Punkt angrenzenden Stücke der Doppelgeraden *nicht isolirt* sind, bilden den Ausgangspunkt für eine Reihe weiterer Flächen. Zunächst können die beiden Pinch-points zusammenrücken, ein Vorgang, den die Figur 24a und 24 illustrirt; dieses tritt ein, wenn ein Mantel $u_4 = 0$ einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante berührt. Soll ein Mantel von $u_4 = 0$ mit einem Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante $\varkappa$ consecutive Kanten gemein haben, so kann man von einem Monoid mit Doppelgeraden und getrennten Pinch-points ausgehen, welches noch einen Knotenpunkt $B_{\varkappa-1}$ besitzt. Durch gleichzeitiges Zusammenrücken der beiden Pinch-points und des Knotenpunktes $B_{\varkappa-1}$ entsteht dann die gesuchte Fläche. Solche Uebergänge schildern die Figuren 25a und 25 respective 26a und 26.

97. Zwei Pinch-points können auch zusammenrücken, ohne dass ihre singulären Ebenen identisch werden. Die singulären Ebenen erhält man ja, indem man zu den beiden Tangentialebenen von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in der Doppelkante das gemeinschaftliche harmonische Ebenenpaar construirt. Ist dieses Ebenenpaar und ebenso das Tangentialebenenpaar von $u_3 = 0$ fixirt, welches jenes harmonisch trennt, so kann man eine der beiden Tangentialebenen von $u_4 = 0$ noch beliebig wählen, die andere ist dann völlig bestimmt. Lässt man nun eine dieser beiden Ebenen mit einer der beiden Tangentialebenen von $u_3 = 0$ zusammenfallen, so fallen auch die zweiten Ebenen dieser

Ebenenpaare zusammen und die beiden Pinch-points rücken zusammen, ohne dass sich die Lage ihrer singulären Ebenen ändert. In diesem Falle entsteht ein dreifacher Punkt, wie ihn Figur 30 zeigt; man macht sich am besten an der Zeichnung den Uebergang aus den Pinch-points in den dreifachen Punkt klar; lässt man nämlich die Kante durch a mit der Kante durch a_1 und die Kante durch b mit der Kante durch b_1 zusammenwachsen, so geht der dreifache Punkt in zwei Pinch-points über.

Die hierher gehörigen Monoide zerfallen noch hinsichtlich der gegenseitigen Lage ihrer dreifachen Punkte in zwei Gruppen. Die constanten Tangentialebenen längs der Doppelgeraden schneiden das Monoid noch in je einer Geraden. Diese Geraden können nun die Doppelgerade in Punkten schneiden, welche durch die dreifachen Punkte *getrennt* oder *nicht getrennt* werden. Im letzteren Falle liegen die paaren Manteltheile der Kegel 3. Ord. in den beiden dreifachen Punkten in *demselben* Winkelraum (oder in Scheitelwinkeln, welche durch Projection immer in jenen Fall übergeführt werden können); zugleich liegen auf dem paaren Mantel von $u_3 = 0$ (und ebenso von $U_3 = 0$) eine *gerade* Anzahl von Hauptgeraden. Im ersteren Falle dagegen liegen die paaren Manteltheile der Kegel 3. Ord. in *Nachbarräumen*, und es liegen auf dem paaren Mantel von $u_3 = 0$ (und ebenso von $U_3 = 0$) eine *ungerade* Anzahl von reellen Hauptgeraden. Der Beweis kann rein topologisch geführt werden, wenn man eine Ebene um die Doppelgerade sich drehen lässt. Durch Beachtung der Schnittcurven in diesen Ebenen erhält man auch die beste Vorstellung von der Fläche selbst.

Lässt man bei der in Nr. 95 zuletzt erwähnten Art von Monoiden die beiden Pinch-points zusammenrücken, so erhält man ein Monoid mit zwei dreifachen Punkten, dessen Doppelgerade völlig isolirt ist. Bei völlig isolirter Doppelgeraden können noch die dreifachen Punkte conjugirt imaginär werden; dann schneidet jede Ebene durch die Doppelgerade einen Kegelschnitt aus, der die Doppelgerade nicht schneidet; diese Fläche kann man sich unschwer vorstellen.

98. Die Flächen mit zwei dreifachen Punkten können noch weitere Specialisirungen aufweisen, indem der Tangentialkegel in einem der dreifachen Punkte eine weitere Doppelkante erhält. Es ist dieses ein Vorkommniss, welches bereits früher behandelt wurde und hier nicht weiter zu discutiren ist; Gleiches gilt für *die* Fälle, in denen sich der dreifache Punkt in der neuen Doppelkante noch weiter specialisirt. Auch alle übrigen in Nr. 85 aufgeführten Flächen sind hiernach leicht zu erledigen.

99. Erhält der Kegel $u_3 = 0$ eine *Rückkehrkante*, so rückt ein Pinch-point in den dreifachen Punkt herein; dieses geschieht dadurch,

dass derjenige Ast der Berührungscurve des projicirenden Kegels 10. Ord., welcher vom dreifachen Punkt nach dem einen Pinch-point geht, die Doppelgerade nicht mehr in getrennten Punkten schneidet, sondern im dreifachen Punkt berührt. Die gestaltliche Veränderung der Fläche bei diesem Vorgang ist äusserst einfach und übersichtlich; siehe Figur 31.

Berührt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Rückkehrkante, so rücken beide Pinch-points in den dreifachen Punkt herein. Um dieses zu erreichen, lässt man zunächst die Pinch-points zusammenrücken; der eine Ast der Berührungscurve berührt alsdann die Doppelgerade in diesem Punkt. Alsdann lässt man den neu gebildeten Punkt in den dreifachen Punkt hereinrücken; dann hat der Ast der Berührungscurve drei consecutive Punkte mit der Doppelgeraden gemein; auch die gestaltliche Entstehung dieser Fläche ist sehr einfach, siehe Figur 32.

100. Durch das Auftreten einer *Selbstberührungskante* rückt ebenfalls ein Pinch-point in den dreifachen Punkt herein; zugleich aber wird noch eine Schleife zusammengezogen, so dass Figur 31 in 33 übergeht. Das *eine* Stück der Doppelgeraden im dreifachen Punkte ist isolirt.

Berührt der eine Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, so rückt der zweite Pinch-point ebenfalls in den dreifachen Punkt, indem zugleich eine Schleife sich zusammenzieht, wie dies Figur 34 zeigt; jetzt ist die Doppelgerade nirgends mehr isolirt.

Osculirt der eine Mantel des Kegel $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$ längs der singulären Kante, so zieht sich abermals eine Schleife, welche an den dreifachen Punkt angrenzt, zusammen, und es entsteht Figur 35.

Osculirt der eine Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel 2. Ord.:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0,$$

so projicirt sich die Umgebung des dreifachen Punktes wiederum als Figur 35. Die beiden verzweigten Aeste der Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ liegen hier auf derselben Seite der singulären Ebene $x = 0$, während sie im vorhergehenden Falle auf verschiedenen Seiten lagen.

Soll der eine Mantel des Kegels $u_4 = 0$ vier, fünf, sechs oder sieben consecutive Kanten mit dem Kegel 2. Ord. gemein haben, welche alle in die singuläre Kante hereingerückt sind, so hat man noch eine, zwei, drei oder vier Schleifen einer Kette, die an den dreifachen Punkt angrenzt, zusammenzuziehen, wodurch die Projection im Wesentlichen die Form der Figur 34 oder 35 annimmt, je nachdem eine ungerade oder gerade Anzahl von Schleifen zusammengezogen worden ist.

101. Besitzt der Kegel $u_3 = 0$ eine dreifache Kante, welche für

den Kegel $u_4 = 0$ Doppelkante ist, so hat das zugehörige Monoid einen dreifachen Punkt, welcher durch Zusammenrücken zweier dreifacher Punkte entstanden ist, wie man sofort erkennt, wenn man beachtet, dass die vier Aeste der Curve $f = 0$, $x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die Doppelgerade berühren. Hier giebt es noch zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die constanten Tangentialebenen durch singuläre Ebenen getrennt werden oder nicht. Im letzteren Falle besteht das Monoid aus drei paaren Flächentheilen, vorausgesetzt dass die Hauptgeraden alle imaginär sind. Zwei von diesen Flächentheilen haben die in Nr. 57 gegebene Gestalt; der dritte durchsetzt sich selbst längs der ganzen Doppelgeraden und hat sich aus dem dritten Flächentheil des Monoids in Nr. 57 entwickelt, indem derselbe längs der Doppelgeraden mit sich selbst zusammengewachsen ist. Im ersteren Falle besteht das Monoid unter gleicher Voraussetzung aus einem paaren und zwei unpaaren Flächentheilen. Der paare Theil hat die in Nr. 57 gegebene Gestalt; die unpaaren Flächentheile liegen in den Winkelräumen, welche von den constanten Tangentialebenen geschnitten werden. Ein deutliches Bild eines solchen Theiles verschafft man sich, wenn man eine bewegliche Ebene den bezüglichen Winkelraum durchlaufen lässt; sie schneidet lauter Kegelschnitte aus, welche mit der Doppelgeraden zusammen jedes Mal den Gesammtdurchschnitt mit dem unpaaren Flächentheile ausmachen; so kommt die Figur 36.

Welcher Art die Aenderungen sind, wenn an Stelle der imaginären Hauptgeraden reelle treten, haben wir bereits früher gesehen.

Von den letzteren Flächen gelangt man leicht zu den anderen in Nr. 88 und 89 aufgeführten Monoiden, wenn man geeignete an den dreifachen Punkt angrenzende Schleifen zusammenzieht. Welche Schleifen man zu benutzen hat, erkennt man direct aus den Projectionen der Monoide, welche in den genannten Nummern angegeben sind. Man kann sich zu diesem Zwecke auch der Abbildung der Monoide auf eine Ebene bedienen; die Sache ist so einfach, dass ich nicht darauf eingehe.

102) Wir kommen jetzt zu den Monoiden mit Doppelgeraden, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus *einer einfachen* und *einer Doppelebene* besteht. Nehmen wir zunächst die Doppelgerade beliebig in der Doppelebene an, so erhalten wir eine Fläche, welche aus dem entsprechenden Monoid ohne Doppelgerade in Nr. 74 leicht abgeleitet werden kann. Durch Zusammenwachsen zweier Flächentheile längs eines *Theiles* der Doppelgeraden (vom dreifachen Punkt bis zum Pinch-point) entsteht die neue Fläche. Man übersieht das Gesagte am besten, wenn man die Schnittcurven in der Doppelebene Figur 37a

und in den benachbarten Ebenen, welche durch die Schnittgerade der einfachen und der Doppelebene hindurchgehen, Figur 37b betrachtet; der Punkt P entspricht dabei dem Pinch-point. Bei dem Monoid ohne Doppelgeraden sind die entsprechenden Schnittcurven durch die Figuren 10e) und 10b) gegeben.

Es kann nun der Pinch-point in den dreifachen Punkt hereinrücken; der Vorgang ist genau wie in den früheren derartigen Fällen, indem *der* Mantel des projicirenden Kegels 10. Ord., welcher die Doppelgerade in dem dreifachen Punkt und dem Pinch-point schneidet, übergeht in einen solchen, der die Doppelgerade im dreifachen Punkt berührt.

Ferner kann man noch eine Schleife des Monoids zusammenziehen, wodurch der die Doppelgerade berührende und der andere lineare Mantel des projicirenden Kegels 10. Ord. sich verzweigen.

103) Fällt die Doppelkante von $u_4 = 0$ mit der Schnittgeraden der einfachen und der Doppelebene zusammen, so ist das zugehörige Monoid als Specialfall des Monoids in Nr. 101 aufzufassen; es geht aus demselben hervor, wenn man zwei singuläre Ebenen zusammenrücken lässt. Ein derartiger Uebergang ist bereits in Nr. 74 geschildert; er bewirkt hier, dass einer der vier die singuläre Gerade berührenden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. sich in zwei sich schneidende Mäntel auflöst, ganz analog den Vorgängen in Nr. 74 und Nr. 76. Es giebt auch hier zwei wesentlich verschiedene Arten von Monoiden.

Aus dem soeben aufgestellten Monoid kann man eine Reihe weiterer Flächen ableiten. Lässt man durch Zusammenziehen einer Schleife *zwei* die Doppelgerade tangirende Mäntel des projicirenden Kegels sich in *einen* Mantel mit Rückkehrkante verwandeln, so entsteht ein neues Monoid. Dieses Monoid liefert abermals eine neue Fläche, indem durch Zusammenziehen einer weiteren Schleife der Mantel mit Rückkehrkante in zwei sich osculirende Mäntel übergeht.

Ferner kann man aus dem obigen Monoid dadurch weitere Flächen ableiten, dass man *einen* oder die *beiden* die Doppelgerade nicht berührenden Mäntel sich mit *einem* der drei übrigen sich berührenden Mäntel verzweigen lässt, was durch Zusammenziehen *einer* resp. *zweier* Schleifen geschieht.

Endlich kann man die beiden ersteren Operationen mit den beiden letzteren vereinigen und erhält so noch vier weitere Flächen.

104) Die Monoide mit *uniplanarem dreifachen Punkt* und einer Doppelgeraden können aus solchen ohne Doppelgerade abgeleitet werden, indem man ein Zusammenwachsen des in Nr. 77 erwähnten *paaren* und *unpaaren* Flächentheiles eintreten lässt (die Benennung paar und unpaar bezieht sich nur auf das Verhalten der Theile in der Umgebung des dreifachen Punktes). Das Monoid hat längs der Doppelgeraden

constante Tangentialebenen und sein Verhalten in der Nähe der Doppelgeraden ist leicht anzugeben. Der Schnitt durch die Gerade $x = 0$, $y = 0$ und die Doppelgerade hat die Form der Fig. 38a), die Nachbarschnitte haben die Form der Fig. 38b), die Projection dieser Partie der Fläche senkrecht zur singulären Ebene giebt Fig. 38c). Auch hier kann man durch Zusammenziehen von *einer* oder *zwei* Schleifen, genau wie in Nr. 77, zwei weitere Monoide ableiten.

Monoide mit Rückkehrgeraden oder Selbstberührungsgeraden.

105) Ein Monoid besitzt dann und nur dann eine *Rückkehrgerade*, wenn $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinsame Rückkehrkante mit gemeinsamer Tangentialebene besitzen; natürlich kann an Stelle der Rückkehrkante auch eine Selbstberührungskante, eine Doppelebene oder eine dreifache Ebene treten. Daraus folgt zunächst, dass bei den Monoiden mit Rückkehrgeraden *die Tangentialebene* in den Punkten dieser Geraden *eine constante ist.*

Gehen wir von dem einfachsten Falle aus, in welchem $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinschaftliche Rückkehrkante besitzen, die für sechs Schnittgeraden zählt, dann können wir setzen:

$$u_3 = x^2 z + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

$$u_4 = Jz^2x^2 + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2 + Py^3) + Qx^4 + \cdots .$$

Man erkennt dann sofort, dass auf der Rückkehrgeraden des Monoides $u_3 + u_4 = 0$ zwei dreifache Punkte liegen, nämlich der Punkt $z = 0$ und der Punkt $z = -\frac{1}{J}\cdot$ Die Gleichung des Monoides kann desshalb, unter der Annahme $z_1 = z + \frac{1}{J}$, auch in der Form geschrieben werden:

$$U_3 + U_4 = -x^2z_1 + x^3\left(A - \frac{M}{J}\right) + 3x^2y\left(B - \frac{N}{J}\right) + 3xy^2\left(C - \frac{O}{J}\right)$$
$$+ y^3\left(D - \frac{P}{J}\right) + Jz_1^2x^2 + z_1(Mx^3 + \cdots) + Qx^4 + \cdots = 0.$$

Hieraus sieht man, dass die beiden dreifachen Punkte völlig gleichberechtigt sind. Ferner findet sich auf der Rückkehrgeraden noch ein singulärer Punkt vor, den wir mit Cayley*) *Close-point* bezeichnen, es ist der Punkt $z = -\frac{D}{P}\cdot$ Der projicirende Kegel 9. Ord. schickt durch einen solchen Punkt einen einzigen Mantel, der die Rückkehr-

*) Cayley, „A Memoir on the theory of reciprocal surfaces", Phil. Transactions CLIX, p. 201. Zeuthen, Math. Annal. Bd. X, „Sur la théorie des surfaces reciproques".

gerade nicht tangirt, wie man sich durch Rechnung leicht überzeugt; die Gestalt der Fläche in der Umgebung dieses Punktes giebt also Fig. 39. Die Classenreduction des Monoids bestimmt sich folgendermassen. Die Rückkehrgerade reducirt die Classe um 8 Einheiten, da sie sich doppelt gezählt von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abtrennt, welche jetzt nur noch von der 7. Ord. ist. Jeder dreifache Punkt erniedrigt dann die Classe noch um 6 Einheiten und der Close-point um 4 Einheiten, so dass die Gesammtreduction der Classe gleich 24 wird.

Nebenbei sei erwähnt, dass hier keine dreifachen Tangentialebenen mehr existiren, dass es durch den Close-point jedoch noch 10 doppelte Tangentialebenen giebt.

106) Es kann nun eintreten, dass noch eine weitere Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in ihre gemeinschaftliche Rückkehrkante hereinrückt, so dass dieselbe für 7 Schnittgeraden zählt, dann besteht die Relation $JD = P$. Es rücken alsdann der Close-point $z = -\frac{D}{P}$ und der dreifache Punkt $z = -\frac{1}{J}$ zusammen; dadurch geht der Tangentialkegel $U_3 = 0$ in diesem dreifachen Punkt in einen Kegel mit Selbstberührungskante über. Der projicirende Kegel 9. Ord. schickt durch den dreifachen Punkt drei Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z_1 + \cdots, \quad y = \alpha_i z_1 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = b z_1^3 + \cdots, \quad y = \alpha z_1^2 + \cdots;$$

seine Classenerniedrigung berechnet sich auf $10 = 6 + 4$ Einheiten. Die Gesammterniedrigung der Classe hat sich demnach nicht geändert.

Rückt noch eine weitere Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in die gemeinschaftliche Rückkehrkante hinein, so wird auch noch $JC = 0$. Der Tangentialkegel in dem dreifachen Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{J}$ zerfällt jetzt in die Dopplebene $x^2 = 0$ und in die einfache Ebene:

$$x\left(A - \frac{M}{J}\right) + 3y\left(B - \frac{N}{J}\right) - z_1 = 0.$$

In der Doppelebene liegt die Gerade des Monoids $Pz_1 + Uy = 0$. Der projicirende Kegel 9. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt mit den Reihen:

$$x = b z_1^2 + \cdots, \quad y = \alpha z_1 + \cdots,$$

resp.

$$x = \varepsilon b z_1^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z_1 + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

für welche letzteren:

$$\alpha = \frac{1}{3}\,\frac{J}{BJ - N}$$

ist; seine Classenerniedrigung erhöht sich auf 12. Die Classe des Monoids wird also um 26 erniedrigt.

Rückt eine neunte Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in die gemeinschaftliche Rückkehrkante hinein, so besteht noch die Relation:

$$U + 3P\left(B - \frac{N}{J}\right) = 0.$$

Dadurch wird der Tangentialkegel in dem dreifachen Punkt $z = -\frac{1}{J}$ nicht wesentlich geändert, aber es geht jetzt der Kegel $U_4 = 0$ durch die dreifache Gerade des Kegels $U_3 = 0$ hindurch. In Folge dessen sind die vier Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. paarweise verzweigt, sie haben die Reihen:

$$x = \pm b_i z_1^{\frac{3}{2}} + \cdots,\quad y = \alpha z_1 \pm \beta_i z_1^{\frac{3}{2}} + \cdots,\quad i = 1, 2,$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\,\frac{J}{BJ - N}.$$

Die Reduction der Classenzahl durch den dreifachen Punkt wird, abgesehen von der Rückkehrgeraden, gleich 13.

Es kann ebenso die zehnte, eilfte und zwölfte Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in die gemeinsame Rückkehrkante hineinrücken. Dabei bleibt der Tangentialkegel im dreifachen Punkt $z = -\frac{1}{J}$ im Ganzen ungeändert, aber es berührt, osculirt oder hyperosculirt der Kegel $U_4 = 0$ die singuläre Ebene:

$$x\left(A - \frac{M}{J}\right) + 3y\left(B - \frac{N}{J}\right) - z_1 = 0$$

längs der dreifachen Kante des Kegels $U_3 = 0$. Zählt die Rückkehrkante für zehn oder zwölf Schnittgeraden, so sind die vier Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. verzweigt, zählt sie jedoch für neun oder eilf, so sind zwei Mal zwei verzweigt; das Verhalten des projicirenden Kegels folgt unmittelbar aus Nr. 71.

107) Neue Flächen *mit einer Rückkehrgeraden* erhalten wir nur dann, wenn wir dem Kegel $u_3 = 0$ eine dreifache Kante zuertheilen und dieselbe zur Rückkehrkante des Kegels $u_4 = 0$ machen. Wir setzen desshalb:

$$u_3 = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

und

$$u_4 = Jz^2x^2 + z(Mx^3 + \cdots) + Qx^4 + \cdots.$$

Es giebt hier nur noch einen einzigen dreifachen Punkt, in den die beiden dreifachen Punkte des Monoids in Nr. 105 zusammengerückt sind; ferner giebt es auf der Rückkehrkante einen Close-point in

$z = -\frac{D}{P}$, genau von derselben Gestalt wie an der citirten Stelle. Das Verhalten des projicirenden Kegels 9. Ord. erkennt man aus den drei Entwicklungen:

$$x = a_i z^2 + \cdots,\quad y = \alpha_i z^2 + \cdots,\quad i = 1, 2, 3.$$

Die Reduction des dreifachen Punktes beträgt, abgesehen von der Rückkehrgeraden, 12 Einheiten, die des Close-point wie vorher 4 Einheiten. Fällt eine der drei singulären Ebenen $u_3 = 0$ mit der Tangentialebene in der Rückkehrkante von $u_4 = 0$ zusammen, so wird $D = 0$ und der Close-point rückt in den dreifachen Punkt herein. Die drei Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. werden dann durch die Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots,\quad y = \alpha_i z^2 + \cdots,\quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = b z^4 + \cdots,\quad y = \alpha z^3 + \cdots$$

dargestellt, und die Classenerniedrigung des dreifachen Punktes beträgt 16 Einheiten.

108) Wir nehmen jetzt an, dass $u_3 = 0$ in eine einfache und eine Doppelebene zerfällt, und dass die Rückkehrkante von $u_4 = 0$ mit der dreifachen Kante von $u_3 = 0$ zusammenfällt, dass jedoch die Rückkehrtangentialebene mit keiner der singulären Ebenen identisch ist. Dann setzen wir $u_3 = y^2(x + \varrho y)$, während wir u_4 in seiner ursprünglichen Form Nr. 105 belassen. Auf der Rückkehrgeraden des Monoids giebt es wieder einen Close-point $z = -\frac{\varrho}{P}$, der die Classe genau wie früher um 4 erniedrigt. Der projicirende Kegel 9. Ord. aus dem Punkte $x_0, y_0, 0, 0$ besitzt vier Mäntel, deren Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots,\quad y = \alpha_i z^2 + \cdots,\quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = a_i z + \cdots,\quad y = \beta_i z^2 + \cdots,\quad i = 1, 2$$

sind; wesshalb die Classenerniedrigung gleich 14 wird. Wenn der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelebene $y = 0$ berührt, so verzweigen sich die beiden zuletzt genannten Mäntel des projicirenden Kegels und die Classe wird noch um eine weitere Einheit reducirt. Es kann der Kegel $u_4 = 0$ auch noch eine Doppelkante besitzen, welche in der Doppelebene $y = 0$ liegt, so dass das Monoid noch eine Doppelgerade erhält.

Lassen wir jetzt die einfache Ebene von $u_3 = 0$ mit der Tangentialebene in der Rückkehrkante von $u_4 = 0$ zusammenfallen, so wird $\varrho = 0$, und der Close-point rückt in den dreifachen Punkt herein. Die vier Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. bekommen die Reihen $x = a z^2 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$, resp. $x = b z^4 + \cdots$, $y = \alpha z^3 + \cdots$, resp. $x = a_i z + \cdots$, $y = \beta_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$; und die Classenerniedrigung wird 18. Auch hier verzweigen sich die letzten beiden Mäntel, wenn $u_4 = 0$ die Doppelebene berührt, was wiederum die

Classe um eine Einheit vermindert; oder das Monoid erhält noch eine Doppelgerade, wenn $u_4 = 0$ in der Ebene $y = 0$ eine Doppelkante besitzt.

Lassen wir endlich die Doppelebene von $u_3 = 0$ mit der Tangentialebene in der Rückkehrkante von $u_4 = 0$ zusammenfallen, so kann man $u_3 = x^2 y$ setzen. Der projicirende Kegel 9. Ord. besitzt dann die vier Mäntel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = az + \cdots,$$

resp.

$$x = \varepsilon b z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = az^2 + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1;$$

und die Classenerniedrigung beträgt 18 Einheiten.

109. Ist der dreifache Punkt *uniplanar*, d. h. ist $u_3 = y^3$, und behält u_4 seine frühere Form bei, so besitzt der projicirende Kegel 9. Ord. fünf Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z + \cdots, \qquad y = \pm \beta_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = az^2 + \cdots, \qquad y = \quad az^2 + \cdots.$$

Die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt berechnet sich auf 16 Einheiten. Zugleich existirt auf der Rückkehrgeraden wieder ein Close-point, der die Classe um 4 Einheiten erniedrigt. Berührt der Kegel $u_4 = 0$ die dreifache Ebene, so verzweigen sich die vier erstgenannten Mäntel des projicirenden Kegels mit einander, wodurch die Reduction des dreifachen Punktes gleich 17 wird.

Ertheilt man dem Kegel $u_4 = 0$ noch eine Doppelkante, welche in der dreifachen Ebene liegt, so giebt es auf dem Monoid noch eine Doppelgerade. Der projicirende Kegel 7. Ord. schickt nur noch drei Mäntel durch den dreifachen Punkt, von denen *zwei* die Doppelgerade und *einer* die Rückkehrgerade tangirt. Abgesehen von den singulären Geraden reducirt der dreifache Punkt die Classe um 14, so dass die Gesammtreduction gleich 30 wird. Ertheilt man dem Kegel $u_4 = 0$ dagegen noch eine Rückkehrkante, welche in der dreifachen Ebene liegt, so hat das Monoid noch eine Rückkehrgerade. Der projicirende Kegel 6. Ord. schickt nur noch zwei Mäntel durch den dreifachen Punkt, welche die beiden singulären Geraden berühren. Der dreifache Punkt reducirt um 8, und die Gesammtreduction beträgt 32.

Fällt die Tangentialebene in der Rückkehrkante des Kegels $u_4 = 0$ mit der dreifachen Ebene zusammen, so setzen wir $u_3 = x^3$; dann rückt der Close-point wieder in den dreifachen Punkt herein. Die fünf Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. erhalten jetzt die Reihen:

$$x = \pm bz^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = az + \cdots,$$

resp.

$$x = \quad b z^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon^2 \alpha z^{\frac{5}{3}} + \cdots;$$

die Classe wird durch den dreifachen Punkt um 20 Einheiten vermindert.

110. Hiermit ist die Gesammtheit der Monoide mit Rückkehrgeraden erledigt, und wir beginnen mit den *Monoiden mit einer Selbstberührungsgeraden.* Der einfachste Fall ist der, wo $u_3=0$ und $u_4=0$ eine gemeinsame Selbstberührungsgerade mit gemeinsamer Tangentialebene aufweisen, dann können wir setzen:

$$u_3 = x(Ax^2+By^2+2Cxy+2Dxz)$$

und

$$u_4 = Ix^2z^2 + z(Mx^3+3Nx^2y+3Oxy^2) + Qx^4+4Rx^3y+\cdots.$$

Auf der singulären Geraden giebt es einerseits zwei dreifache Punkte, nämlich $z=0$, und $z=-\frac{2D}{I}$, andererseits zwei Pinch-points*), welche sich durch die quadratische Gleichung:

$$z^2(9O^2-4IU)+2z(3BO-4DU)+B^2=0$$

bestimmen. Die Gleichung des Monoids kann auch in der Form geschrieben werden:

$$U_3+U_4=x\Big[\Big(A-\frac{2MD}{I}\Big)x^2+\Big(B-\frac{6OD}{I}\Big)y^2+\Big(C-\frac{3ND}{I}\Big)2xy-2Dxz_1\Big]$$
$$+Ix^2z_1^2+z_1(Mx^3+3Nx^2y+3Oxy^2)+Qx^4+\cdots=0,$$

$z_1=z+\frac{2D}{I}\cdot$ Man erkennt nun sofort, das der projicirende Kegel 8. Ord. durch jeden dreifachen Punkt zwei Mäntel schickt, die zu der singulären Geraden keine specielle Lage haben. Jeder dreifache Punkt reducirt desshalb die Classe um 3, während die Selbstberührungsgerade um 12 reducirt. Der projicirende Kegel schickt ferner durch jeden der beiden übrigen singulären Punkte auf der Selbstberührungsgeraden einen einzigen Mantel, und dieselben vermindern die Classe um je 5 Einheiten. Die Classe des Monoids ist also gleich 8. Ein derartiges Monoid kann noch zwei gewöhnliche Knotenpunkte besitzen, so dass es von der 4. Ord. und von der 4. Classe wird.

Wenn der *eine* Mantel des Kegels $u_4=0$ den Kegel 2. Ord.:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dxz=0$$

längs der singulären Geraden osculirt, so besteht zwischen den Constanten die Relation:

$$IB^2-6OBD+4UD^2=0.$$

*) Es sind dies keine gewöhnlichen Pinch-points, sie entstehen, wenn man zwei gewöhnliche Pinch-points mit ihren Doppelgeraden zusammenrücken lässt.

Dadurch werden die beiden dreifachen Punkte nicht weiter alterirt; dagegen rücken die beiden Pinch-points zusammen, so dass ein Mantel des projicirenden Kegels die singuläre Gerade in diesem Punkte berührt (siehe Fig. 40). Auch die Classenzahl ist ungeändert geblieben.

Wenn der *eine* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ mit dem Kegel 2. Ord. vier, fünf oder sechs consecutive Kanten gemein hat, die alle in die singuläre Gerade hereingerückt sind, so bleiben hierbei die dreifachen Punkte ungeändert. Durch den einzigen singulären Punkt, der noch ausserdem auf der Selbstberührungsgeraden liegt, gehen jetzt zwei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. Dieselben sind im ersten Falle linear, im zweiten verzweigt und im dritten berühren sie sich; in Bezug auf die singuläre Gerade haben sie keine specielle Lage. Sie entstehen durch Zusammenrücken der beiden Pinch-points auf der Selbstberührungsgeraden mit einem gewöhnlichen Knotenpunkte, resp. einem biplanaren Knotenpunkt B_3 oder B_4; siehe Figur 40b, 40c und 40d. Die Classe des bezüglichen Monoids wird 6, 5 oder 4.

111. Besteht der Kegel $u_3 = 0$ aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen, und berührt *eine* dieser Ebenen den Kegel $u_4 = 0$ in seiner Selbstberührungskante, so können wir schreiben $u_3 = xy(x + \varrho y)$, während wir u_4 in seiner früheren Form nehmen. Die beiden Pinch-points ändern sich hierbei nicht, nur die beiden dreifachen Punkte rücken zusammen; die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. durch diesen Punkt berühren desshalb die singuläre Gerade. Die Classe des Monoids ist wiederum 8.

112. Zerfällt der Kegel $u_3 = 0$ in eine einfache und eine Doppelebene, und berührt letztere den Kegel $u_4 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, so belassen wir wieder u_4 in seiner alten Form und setzen: $u_3 = x^2(Ax + By + Cz)$. Dann giebt es auf der singulären Geraden zwei dreifache Punkte $z = 0$ und $z = -\frac{C}{I}$. Ferner giebt es einen Pinch-point $z = \frac{4UC}{9O^2 - 4IU}$, der andere ist in den dreifachen Punkt $z = 0$ hereingerückt. Im letzteren Punkte giebt es jetzt drei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord., ihre Reihen sind:

$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1;$$

er erniedrigt die Classe um 8 Einheiten. Lässt man O verschwinden, so rückt der andere Pinch-point in den dreifachen Punkt $z = -\frac{C}{I}$; es giebt dann auf der singulären Geraden zwei dreifache Punkte, deren Tangentialkegel je in eine einfache und eine Doppelebene zerfällt; jeder erniedrigt die Classe um 8, so dass die Classe des zugehörigen Monoids ungeändert gleich 8 bleibt. Auch ein solches Monoid kann noch zwei gewöhnliche Knotenpunkte besitzen.

113. Fällt die dreifache Kante von $u_3=0$ mit der Selbstberührungskante von $u_4=0$ zusammen und berührt die einfache Ebene den Kegel $u_4=0$ längs dieser Kante, so setzen wir: $u_3=zy^2$ und für u_4 seinen früheren Ausdruck. Auf der Selbstberührungsgeraden des Monoids giebt es zwei Pinch-points, welche wie vorher die Classe je um 5 erniedrigen. Die beiden dreifachen Punkte sind zusammengerückt; die drei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. in diesem Punkte haben die Reihen:

$$x=az^2+\cdots,\quad y=\alpha z^2+\cdots,$$

resp.

$$x=a_i z+\cdots,\quad y=\beta_i z^2+\cdots,\quad i=1,2;$$

weshalb dieser dreifache Punkt die Classe um 8 Einheiten reducirt. Das Monoid ist von der 6. Classe. Berührt $u_4=0$ die Doppelebene, so verzweigen sich die beiden zuletzt genannten Mäntel des projicirenden Kegels und das Monoid wird von der 5. Classe.

Hat der Kegel $u_4=0$ noch eine weitere Doppelkante, welche ebenfalls in der Doppelebene liegt, so erhält das Monoid noch eine Doppelgerade. Auf dieser liegt noch ein gewöhnlicher Pinch-point, während auf der Selbstberührungsgeraden nach wie vor zwei Pinch-points mit der Classenerniedrigung 5 liegen. Durch den dreifachen Punkt geht nur noch ein einziger Mantel des projicirenden Kegels 6. Ord., welcher die Selbstberührungsgerade tangirt; er reducirt die Classe, abgesehen von den singulären Geraden, um 4 Einheiten. Das Monoid ist nur noch von der 3. Classe und bildet einen *speciellen Fall der Steiner'schen Fläche;* vergleiche Nr. 126 im letzten Capitel.

114. Fallen die singulären Kanten von $u_3=0$ und $u_4=0$ zusammen und tangirt die Doppelebene den Kegel $u_4=0$ längs dieser Kante, so haben wir $u_3=x^2y$ zu setzen. Jetzt sind die beiden dreifachen Punkte und die beiden Pinch-points in den Punkt $z=0$ zusammengerückt. Die drei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. durch diesen Punkt werden durch die Reihen:

$$x=\quad bz^3+\cdots,\quad y=\alpha z^2+\cdots,$$

resp.

$$x=\pm bz^{\frac{5}{2}}+\cdots,\quad y=\alpha z^2+\cdots,$$

dargestellt, sein Einfluss auf die Erniedrigung der Classe beträgt 16 Einheiten. Das Monoid wird folglich von der 8. Classe.

Stellt $u_3=0$ eine dreifache Ebene dar, welche den Kegel $u_4=0$ längs seiner singulären Geraden tangirt, so hat man $u_3=x^3$ zu setzen. Der projicirende Kegel 8. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt mit den Reihen:

$$x=b_i z^2+\cdots,\qquad y=\pm\alpha_i z^{\frac{3}{2}}+\cdots,\quad i=1,2.$$

Die Reduction der Classe beträgt 18, abgesehen von der singulären Kante; so dass das Monoid von der 6. Classe wird.

115. Auch in diesem Capitel mag auf einige der aufgezählten Monoide kurz aufmerksam gemacht werden. Das in Nr. 105 zuerst erwähnte Monoid kann noch drei gewöhnliche Knotenpunkte besitzen; die Ebene durch diese 3 Punkte muss die Fläche längs eines Kegelschnitts berühren, der die Rückkehrgerade offenbar im Close-point trifft.

Ferner giebt es einige Monoide 4. Ord. und 4. Classe. So z. B. das Monoid mit zwei Rückkehrgeraden. Auf jeder liegt ein Close-point; eine der Ebenen durch die beiden Close-points berührt längs eines Kegelschnitts, so dass die Gleichung dieser Fläche immer auf die Form:

$$x^3 + (ax^2 + 2byz)^2 = 0$$

gebracht werden kann.

Das Monoid mit einer Selbstberührungsgeraden und zwei gewöhnlichen Knotenpunkten ist ebenfalls von der 4. Ord. und der 4. Classe. Die Ebenen durch die beiden Knotenpunkte und je einen Pinch-point berühren längs eines Kegelschnitts. Die Gleichung dieser Fläche kann geschrieben werden:

$$(bx+ay)(ayz+bzx+cxy) + \varrho(ayz+bzx+dxy)^2 = 0.$$

Die beiden Close-points und ein Knotenpunkt können zusammenrücken, dann giebt es durch diesen Punkt und den noch übrigen Knotenpunkt zwei Ebenen, welche längs eines Kegelschnitts berühren. Die Gleichung der Fläche wird jetzt:

$$x(xz - \varrho y^2) + \sigma(xz - \varrho y^2 + axy)^2 = 0.$$

Ebenso kann der letzte Knotenpunkt noch in den singulären Punkt der Selbstberührungsgeraden hereinrücken. Dann giebt es durch diesen Punkt zwei Ebenen, welche längs eines Kegelschnitts berühren, ihre Schnittgerade ist die singuläre Gerade des Punktes. Ihre Gleichung ist:

$$0 = x(xz - \varrho y^2) + \sigma(xz - \varrho y^2 - \tau x^2)^2.$$

Ferner kann bei dem Monoid mit Selbstberührungsgeraden und zwei Knotenpunkten ein Pinch-point mit einem dreifachen Punkt zusammenrücken. Der Tangentialkegel in diesem Punkte zerfällt in eine Doppelebene und eine einfache Ebene, welche die beiden Knotenpunkte enthält und die Fläche längs zweier Geraden berührt. Ihre Gleichung ist:

$$(bx + ay)(ayz + bzx + cxy) + x^2y^2 = 0.$$

Rückt auch noch der andere dreifache Punkt mit dem andern Pinch-point zusammen, so zerfällt auch der Tangentialkegel in diesem Punkt in der angegebenen Weise, und die Gleichung wird:

$$(bx + ay)^2 z + x^2y^2 = 0.$$

Endlich können die beiden dreifachen Punkte zusammenrücken, während die Pinch-points getrennt bleiben, dann zerfällt der Tangentialkegel

im dreifachen Punkt in drei Ebenen durch die Selbstberührungsgerade. Die Gleichung der Fläche wird demnach:

$$xy(bx + ay) + \varrho(ayz + bzx + cxy)^2 = 0.$$

116. Es erübrigt in diesem Capitel nur noch die *gestaltliche Behandlung* unserer Flächen und wir beginnen mit den *Flächen mit Rückkehrgeraden.* Ich unterlasse es hier die Aenderungen anzugeben, welche bei den einzelnen Flächen vorzunehmen sind, und gebe nur das Princip an, nach dem man zu verfahren hat. Man kann nämlich immer von den Monoiden mit Doppelgeraden ausgehen, welche längs derselben constante Tangentialebenen besitzen. Solche Monoide besitzen zwei getrennt liegende, oder zusammenfallende dreifache Punkte. Lässt man nun die Doppelgerade in eine Rückkehrgerade übergehen, so trennt sich von der Berührungscurve des projicirenden Kegels die Doppelgerade ab, wie dies Figur 41a und 41b zeigt. Von den dreifachen Punkten A und B ist nur der Theil gezeichnet, der uns bei dem genannten Vorgang interessirt. Man übersieht hierbei sehr schön wie der Close-point entsteht. Die beiden dreifachen Punkte können auch conjugirt imaginär sein, ganz ebenso wie bei den Flächen in Nr. 97.

Die *Monoide mit einer Selbstberührungsgeraden* kann man aus den Monoiden mit zwei Doppelgeraden ableiten, indem man diese zusammenrücken lässt. Es sind hier folgende Fälle zu unterscheiden. Die beiden Pinch-points trennen die dreifachen Punkte, oder sie trennen die dreifachen Punkte nicht, oder sie sind conjugirt imaginär. Um das Monoid mit Selbstberührungsgeraden abzuleiten, dessen beiden Pinch-points die dreifachen Punkte nicht trennen, geht man von dem Monoid mit zwei Doppelgeraden aus, dessen Abbildung auf die Ebene die Figur 42a zeigt. Den Richtungen s_1, t_1 und s_2, t_2 entsprechen auf den Doppelgeraden die Pinch-points. Beim Grenzübergange rücken die beiden Pinch-points, entsprechend den Richtungen s_1 und s_2, zusammen und bilden den einen neuen Pinch-point auf der Selbstberührungsgeraden; die beiden Pinch-points, entsprechend den Richtungen t_1 und t_2 rücken ebenfalls zusammen, bilden aber den andern dreifachen Punkt, siehe Figur 42b. Jeder Richtung durch P_1 resp. P_2 in Fig. 42a entspricht ein Punkt der Doppelgeraden, da die Tangentialebenen in den Punkten der Doppelgeraden noch beweglich sind; dagegen entspricht jeder Richtung durch P in Fig. 42b nur noch ein einziger Punkt, da die Tangentialebenen in den Punkten der Berührungsgeraden constant sind. So entspricht der Partie A der Ebene beim Monoide ohne reelle Hauptgeraden ein geschlossener Flächentheil, der sich wie ein Kegel 2. Ord. in die beiden dreifachen Punkte erstreckt. Macht man eine Reihe Schnitte durch das Monoid, welche der Bildebene parallel sind, so entspricht dem Schnitt durch den dreifachen Punkt $z = 0$ die Curve

$u_3 = 0$, den Schnitten zwischen beiden dreifachen Punkten Curven von der Form 1, dem Schnitt durch den dreifachen Punkt $z = -\frac{2D}{I}$ die Curve 2, (bestehend aus einem Zweig und dem isolirten Punkt P), den Schnitten zwischen diesem dreifachen Punkt und dem einen Pinch-point Curven von der Form 3, dem Schnitt durch den Pinch-point die Curve 4, den Schnitten zwischen beiden Pinch-points Curven von der Form 5 oder 6, dem Schnitt durch den zweiten Pinch-point die Curve 7, den Schnitten zwischen diesem Punkt und dem dreifachen Punkt $z = 0$ Curven von der Form 8. Hierdurch gewinnt man ein deutliches Bild der Fläche *ohne* reelle Hauptgeraden; will man aber eine Fläche *mit* reellen Hauptgeraden, so muss man die Fläche, wie in Nr. 45 und Nr. 46 gezeigt wurde, mit sich selbst an geeigneten Stellen zusammenwachsen lassen.

Sollen die Pinch-points conjugirt imaginär werden, so lässt man bei der vorigen Fläche die beiden Pinch-points zusammenrücken und dann imaginär werden. Man kann die Fläche jedoch auch direct ableiten, wenn man von einem Monoid ausgeht, dessen Bild Fig. 42c darstellt. Sollen die Pinch-points durch die dreifachen Punkte getrennt werden, so kann man einen von ihnen durch einen dreifachen Punkt hindurchgehen lassen, oder aber man kann dasselbe wieder direct ableiten.

Auch bei den zuletzt aufgestellten Monoiden können die dreifachen Punkte wieder conjugirt imaginär werden.

Monoide mit Rückkehrgeraden höherer Ordnung oder mit Selbstosculationsgeraden.

117. Es handelt sich in diesem Capitel noch um einige wenige Monoide, deren singuläre Gerade von höherer Ordnung*) ist als die Selbstberührungsgerade. Wir haben bereits im vorigen Capitel gesehen, dass alle Monoide mit Rückkehr- resp. Selbstberührungsgeraden in den Punkten dieser Geraden eine constante Tangentialebene besitzen, oder dass die Projectionen aller ebenen Schnitte Curven mit Spitze resp. Selbsberührungspunkt liefern, deren Tangenten in diesem Punkte identisch sind. Mit andern Worten: die Potenzreihen dieser projicirten Curven oder der Projectionskegel stimmen bis zur Potenz $y^{\frac{3}{2}}$ resp. y^2 überein, wenn $x = 0$, $y = 0$ die singuläre Gerade darstellt. Ganz ebenso zeigt sich, dass bei einer Rückkehrgeraden 5. Ord. die Potenzreihen der Projectionskegel bis zur Potenz $y^{\frac{5}{2}}$ oder bei einer Selbst-

*) Den Rückkehrpunkt einer Curve oder die Rückkehrkante eines Kegels nennt man von der 3., 5., 7., ... Ord., wenn er die Classe um 3, 5, 7, ... erniedrigt; ebenso unterscheidet man Selbstberührungskanten 4., 6., 8., ... Ord.

osculationsgeraden bis zur Potenz y^3 übereinstimmen. Je zwei solche zu einer Fläche gehörige Kegel, welche auf ebenen Schnitten stehen, schneiden sich demnach in 10 resp. 12 zusammenfallenden Kanten und folglich schneiden sie den Tangentialkegel 3. Ord. in dreifachen Punkte ebenfalls in 10 resp. 12 consecutiven Kanten. In Folge dessen sind nur die folgenden Möglichkeiten geboten.

Der Kegel $u_3 = 0$ zerfällt in eine einfache und eine Doppelebene, der Kegel $u_4 = 0$ besitzt eine Rückkehrkante 5. Ordnung und wird längs derselben von der Doppelebene berührt. Wir können dann:

$$u_3 = x^2 y \text{ und } u_4 = Ix^2z^2 + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2) + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4$$

setzen unter Zuhilfenahme der Relation $9O^2 - 4IU = 0$. Jeder ebene Schnitt des Monoids $u_3 + u_4 = 0$ besitzt im Allgemeinen einen Rückkehrpunkt 5. Ord.; nur Schnitte durch einzelne Punkte der Rückkehrgeraden können höhere Singularitäten aufweisen, nämlich die Schnitte durch die singulären Punkte dieser Geraden. Umgekehrt können wir die singulären Punkte der Rückkehrgeraden dadurch bestimmen, dass wir uns fragen, für welche Werthe von z wird die Curve $u_3 + u_4 = 0$ einen dreifachen Punkt oder einen Selbstosculationspunkt erhalten; im ersteren Falle ist der bezügliche Punkt ein dreifacher Punkt, im letzteren ein Close-point*) des Monoids. Man erkennt aber sofort, dass kein weiterer dreifacher Punkt existiren kann, dagegen giebt es einen Close-point. Die Reihenentwicklungen für die beiden Aeste der Curve $u_3 + u_4 = 0$ beginnen nämlich mit $y = \alpha z^2$ und schreiten im Allgemeinen nach Potenzen von $z^{\frac{1}{2}}$ fort, also $y = \alpha z^2 \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots$. Für die Schnittcurve durch den Close-point, welche einen Selbstosculationspunkt hat, müssen aber die Potenzreihen nach ganzen Potenzen von z fortschreiten, d. h. es muss β verschwinden. Nun ist $\alpha = -\frac{3O}{2Iz}$, ferner bestimmt sich β durch Nullsetzen der Glieder 7. Dimension, also $Iz^2\beta^2 + \alpha^2 + 3Nz\alpha^2 + 4T\alpha = 0$. Soll β verschwinden, so folgt daraus $z = \frac{3O}{8IT - 9ON}$, und hierdurch ist der Close-point bestimmt.

Die Reduction der Classenzahl vertheilt sich, wie folgt. Zunächst reducirt die Rückkehrgerade die Classe um 16 Einheiten, da sie sich vierfach von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abtrennt. Der projicirende Kegel ist nur noch von der 7. Ord. und schickt nur noch zwei Mäntel durch den dreifachen Punkt, sie haben die Reihen:

*) Die Bezeichnung Close-point ist nicht völlig correct, aber der Punkt ist einem gewöhnlichen Closepoint sehr ähnlich, so dass ich keine bessere Bezeichnung wüsste.

$$x = \pm b z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = a z^2 + \cdots, \quad a = -I;$$

die Reduction durch diesen Punkt berechnet sich auf 8. Für den Close-point findet man 6 als die Zahl, welche seinen Einfluss auf die Classenerniedrigung angiebt.

118. Wenn der Kegel $u_3 = 0$ eine dreifache Ebene darstellt und $u_4 = 0$ wiederum einen Kegel mit einer Rückkehrkante 5. Ord., welcher längs derselben von der singulären Ebene berührt wird, so setzen wir $u_3 = x^3$, während wir die Gleichung für u_4 und die Constantenrelation beibehalten, und erhalten ein neues Monoid mit einer Rückkehrgeraden 5. Ordnung. Es giebt jetzt auf der Rückkehrgeraden keinen Close-point mehr, er ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 7. Ord. schickt drei Mäntel mit den Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad b = -\frac{4}{9} I, \quad a^2 = \frac{8 I^2}{81 O},$$

resp.

$$x = b z^3 + \cdots, \quad y = \quad a z^2 + \cdots, \quad a = \frac{9NO - 8IT}{2U}.$$

Der dreifache Punkt reducirt hier die Classe um 15, so dass die Gesammtreduction gleich 31 wird.

119. Schliesslich ist noch das Monoid mit einer *Selbstosculationsgeraden* zu erwähnen; man erhält es, wenn $u_4 = 0$ eine Selbstosculationskante besitzt und $u_3 = x^3 = 0$ den Kegel $u_4 = 0$ längs dieser Kante berührt. Nehmen wir u_4 in seiner früheren Form, so haben wir zwischen den Constanten die beiden Relationen $9O^2 - 4IU = 0$ und $8IT - 9ON = 0$; aus beiden folgt dann weiter $UN - 2OT = 0$. Es giebt dann auf der singulären Geraden einen Pinch-point*) höherer Ord., einen Punkt für welchen die ebenen Schnittcurven Rückkehrpunkte von der 7. Ord. haben. Nun besitzen die Curven $u_3 + u_4 = 0$ alle einen Selbstosculationspunkt, der zum Rückkehrpunkt 7. Ord. wird, wenn

$$z = \frac{3OU}{72IT^2 + 12ISU + 3MOU}$$

ist; hierdurch ist also der Pinch-point bestimmt.

Die Selbstosculationsgerade reducirt die Classe um 20, da sie sich fünffach von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abtrennt. Durch den dreifachen Punkt gehen zwei Mäntel des projicirenden Kegels 6. Ord., sie haben die Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad a = \frac{8 I^2}{81 O}, \quad b = -\frac{4I}{9};$$

*) Dieser Pinchpoint ist durch Zusammenrücken dreier Pinch-points und ihrer drei Doppelgeraden entstanden.

der dreifache Punkt erniedrigt die Classe um 6 Einheiten. Durch den Pinch-point geht ein Mantel des projicirenden Kegels, er reducirt die Classe um 7 Einheiten. Die Fläche ist demnach von der 3. Classe und bildet einen *speciellen Fall der Steiner'schen Fläche;* siehe Nr. 126 des letzten Capitels.

120. Um sich ein Bild von der Gestalt des Monoids in Nr. 117 zu machen, lasse man eine Ebene sich um die singuläre Gerade drehen. Sind die beiden Hauptgeraden der Fläche imaginär und geht man von der Lage $y = 0$ aus, so bildet die Schnittcurve einen isolirten Punkt, der bei Drehung der Ebene in einen kleinen Kegelschnitt übergeht. Bei weiterer Drehung verlängert sich dieser Kegelschnitt, bis er in das doppelt gezählte Stück der singulären Geraden zwischen dreifachem Punkt und Closepoint übergeht, wenn die Ebene die Lage $x = 0$ einnimmt; siehe Figur 43. Nimmt man die Drehung der Ebene, von der Lage $y = 0$ ausgehend, in entgegengesetzter Richtung vor, so entwickelt sich aus dem isolirten Punkt ein kleiner Kegelschnitt, der auf der entgegengesetzten Seite der singulären Geraden liegt. Bei weiterer Drehung verlängert sich derselbe immer mehr, bis er schliesslich in den durchs Unendliche verlaufenden Theil der singulären Geraden übergeht; siehe Figur 43b). Die Fläche liegt in der Nähe des dreifachen Punktes ganz auf der einen Seite der Ebene $y = 0$. Sind die beiden Hauptgeraden reell, so erhält man die Fläche, wenn man die geschilderten Theile an einer Stelle zusammenwachsen lässt.

Die Gestalt des Monoids in Nr. 118 lässt sich ganz in derselben Weise finden, indem man eine Ebene um die singuläre Gerade dreht. Als Ausgangslage wähle man die Ebene senkrecht zur Ebene $x = 0$; sie schneidet einen Kegelschnitt aus, der bei der Drehung der Ebene immer kleiner wird, bis er sich auf einen Punkt zusammenzieht, wenn die bewegliche Ebene die Lage $x = 0$ angenommen hat. Macht man die Drehung von der Ausgangslage in entgegengesetzter Richtung, so verlängert sich der Kegelschnitt immer mehr, dringt durchs Unendliche und geht in die doppelte singuläre Gerade über, wenn die bewegliche Ebene wieder die Lage $x = 0$ angenommen hat; siehe Fig. 44.

Die Partien der Fläche, welche sich an die Rückkehrgerade ansetzen, liegen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $x = 0$ und der singulären Geraden, wenn man den dreifachen Punkt passirt.

Was endlich die Gestalt der Fläche mit Selbstosculationsgeraden anlangt, so ist zunächst zu bemerken, dass es durch den Pinch-point eine Ebene giebt, welche längs eines Kegelschnitts berührt. Dreht sich wieder eine Ebene um die singuläre Gerade, so schneidet sie immer einen Kegelschnitt aus, der jene Ebene in einem Punkte ihres Kegelschnitts und die singuläre Gerade wie vorher im dreifachen Punkt berührt. Nimmt die bewegliche Ebene die Lage $x = 0$ an, so geht der Kegel-

schnitt in das doppelt gezählte Stück der singulären Geraden zwischen dem dreifachen Punkt und dem Pinch-point über, und zwar tritt dieses ein, einerlei ob man von der Ausgangslage nach rechts oder links dreht. Das eine Stück der Selbstosculationsgeraden zwischen den beiden singulären Punkten ist reell, das andere imaginär.

Die Regelflächen 4. Ordnung mit einer dreifachen Geraden.

121. Obgleich diese Regelflächen schon anderwärts*) ihre Erledigung gefunden haben, so können sie doch hier der Vollständigkeit halber nicht ausgelassen werden, und ich halte die nachstehenden Auseinandersetzungen um so weniger für überflüssig, als uns ein anderes Princip leiten wird, als das in den citirten Arbeiten. Wir gehen wieder von der Gleichungsform $u_3 + u_4 = 0$ aus, wo $u_3 = 0$ drei Ebenen durch die Gerade $x = 0$, $y = 0$ und $u_4 = 0$ einen Kegel 4. Ord. mit der dreifachen Kante $x = 0$, $y = 0$ bezeichnet; von den 12 Schnittgeraden $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ können 9, 10 oder 11 in die singuläre Gerade hereinrücken und hiernach haben wir verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Schneiden sich $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in 9 Geraden $x = 0$, $y = 0$, so können wir setzen:

$$u_3 = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

und

$$u_4 = z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Qxy^2 + Py^3) + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4.$$

Es giebt dann im Allgemeinen in jedem Punkt der dreifachen Geraden drei von einander verschiedene Tangentialebenen, nur für *vier* Punkte dieser Geraden fallen zwei Tangentialebenen zusammen, da bekanntlich die Discriminante einer Gleichung 3. Grades in den Coefficienten vom vierten Grade ist. Einen solchen Punkt wollen wir wiederum als Pinch-point bezeichnen, da durch ihn ein einfacher Mantel der Regelfläche geht und zwei mit einander zusammenhängende Mäntel, welche sich genau so verhalten, wie die beiden Mäntel durch eine Doppelgerade in ihrem Pinch-point.

Der projicirende Kegel aus einem beliebigen Raumpunkt ist nur noch von der sechsten Ordnung; die Berührungscurve 6. Ord. dieses Kegels geht durch die vier Pinch-points hindurch, so dass in jeder Ebene durch die dreifache Gerade nur noch zwei bewegliche Punkte dieser Curve liegen. Von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ trennt sich die Gerade $x = 0$, $y = 0$ vierfach zählend ab, die übrig bleibende

*) Zuerst hat Cayley die verschiedenen Regelflächen 4. Grades untersucht, aber einige ausgelassen, vergl. Phil. Transactions CLIV, p. 559; vollständig bis auf *eine* giebt sie Cremona, Memorie del R. Ist. di Bologna v. VIII, vergl. die zweite Note auf Seite 147.

Curve 5. Ord. geht durch die Pinch-points einfach hindurch und schneidet daselbst die Regelfläche in je vier consecutiven Punkten, so dass sich für die Regelfläche die Classe 4 ergiebt, wie das ja auch bekannt ist.

Die drei Erzeugenden in einem Punkt der dreifachen Geraden liegen im Allgemeinen *nicht* in einer Ebene*); liegen sie jedoch für irgend einen Punkt der dreifachen Geraden in einer Ebene**), so gilt Gleiches für jeden Punkt derselben; die Erzeugenden treffen alle eine feste Gerade, welche der Regelfläche nur einfach angehören kann.

Ein Schnitt durch einen Pinchpoint liefert zwei verzweigte und einen linearen Ast; geht der Schnitt durch die singuläre Gerade oder Dorsallinie des Pinch-point, so wird diese Gerade, ein sie berührender Ast und ein weiterer Ast ausgeschnitten. Es giebt durch die Dorsallinie *eine* Ebene, welche längs ihr berührt und einen Kegelschnitt ausschneidet, der natürlich durch den Pinchpoint geht.

Rücken zwei Pinch-points zusammen, so gehen durch diesen Punkt drei Erzeugende, welche einander unendlich nahe gerückt sind. Macht man also diesen Punkt zum Coordinatenanfang, so hat man in der Gleichung $u_3 + u_4 = 0$ für u_3 einen reinen Cubus, etwa x^3, zu setzen. Dann schickt der projicirende Kegel 6. Ord. durch diesen Punkt zwei Mäntel, welche mit einander verzweigt sind und die Gerade $x = 0$, $Pz + Uy = 0$ berühren. Es können auch zwei Mal zwei Pinch-points zusammenrücken, aber es können nicht drei oder vier in einen Punkt zusammenfallen.

122. Nehmen wir jetzt an, dass eine der Ebenen $u_3 = 0$ einen der Mäntel des Kegel $u_4 = 0$ längs der dreifachen Kante berührt, so haben wir in der Gleichung der Regelfläche $D = 0$ und $P = 0$ zu setzen. Es giebt jetzt in der dreifachen Geraden *eine constante und zwei bewegliche Tangentialebenen****). Die Discriminante der Gleichung 3. Grades reducirt sich jetzt auf

$$(C + zO)^2 \{4(A + zM)(C + zO) - 3(B + zN)^2\}.$$

Es existiren also nur zwei gewöhnliche Pinch-points, die beiden andern sind in den singulären Punkt $z = -\frac{C}{O}$ zusammengerückt. Der projicirende Kegel 6. Ord. schickt durch den Punkt $z = -\frac{C}{O}$ zwei Mäntel mit den Reihen $x = bz_1^3 + \cdots$, $y = \alpha z_1^2 + \cdots$, $z_1 = z + \frac{C}{O}$.

Als Specialfall ist zu erwähnen die Regelfläche, für welche ein Pinch-point in den singulären Punkt $z = -\frac{C}{O}$ hereinrückt, für welche also $BO - CN = 0$ ist. Der projicirende Kegel 6. Ord. schickt im

*) Cremona, a. a. O. Regelfläche 8.
**) Cremona, a. a. O. Regelfläche 9.
***) Cremona, a. a. O. Regelfläche 3.

letzteren Falle durch den Punkt $z = -\frac{C}{O}$ zwei verzweigte Mäntel mit den Reihen:

$$x = b z_1^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z_1^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

123. Wenn zwei der Ebenen $u_3 = 0$ zwei Mäntel des Kegels $u_4 = 0$ längs der dreifachen Kante berühren, so können wir schreiben:

$$u_3 = 3Bx^2y + 3Cxy^2$$

und

$$u_4 = z(3Nx^2y + 3Oxy^2) + Qx^4 + Rx^3y + \cdots.$$

In Folge dessen sind von den *Tangentialebenen* in den Punkten der dreifachen Geraden *zwei constant und eine beweglich**). Die Discriminante der Gleichung 3. Grades geht über in:

$$3(B + zN)^2 (C + zO)^2,$$

es giebt also zwei singuläre Punkte:

$$z = -\frac{C}{O} \text{ und } z = -\frac{B}{N}.$$

Die beiden constanten Tangentialebenen können auch zusammenrücken, dann verschwindet die Discriminante identisch; zwei Mäntel der Regelfläche sind längs der dreifachen Geraden verzweigt, d. h. sie haben dieselbe zur *Rückkehrkante*, und die Rückkehrtangentialebene ist gerade die constante Tangentialebene. Es giebt auf der dreifachen Geraden nur noch *einen* einzigen *singulären Punkt;* macht man denselben zum Coordinatenanfang, so erhält man als Gleichung der Regelfläche**):

$$x^3 + 3Nx^2z + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4 = 0.$$

Der projicirende Kegel ist jetzt nur noch von der 5. Ord., er schickt durch den singulären Punkt einen Mantel mit den Reihen:

$$x = bz^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^3 + \cdots.$$

Auch die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist nur noch von der 4. Ord., so dass der singuläre Punkt, abgesehen von der dreifachen Geraden, die Classe um 12 erniedrigt, da ja die Regelfläche immer von der 4. Classe sein muss. Jeder Schnitt durch den singulären Punkt liefert eine irreducible Curve 4. Ord., deren drei Aeste mit einander verzweigt sind, nur die Schnitte durch die dreifache Gerade machen hiervon eine Ausnahme.

124. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse ist kurz Folgendes zu bemerken. Die Regelfläche mit drei beweglichen Tangentialebenen in

*) Cremona, a. a. O. Regelfläche 10.

**) Diese Regelfläche ist von Cremona in der citirten Abhandlung nicht angegeben.

der dreifachen Geraden kann vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Pinch-points besitzen. Wir drehen nun eine Ebene um die dreifache Gerade und verfolgen die Bewegung ihres Berührungspunktes. Sind alle 4 Pinch-points reell, und bezeichnen wir dieselben mit A, B, C, D, siehe Fig. 45, so können wir von derjenigen Ebene ausgehen, deren Berührungspunkt der unendlich ferne Punkt ist. Der Drehung dieser Ebene um 180°, entspricht eine Bewegung des Berührungspunktes von $-\infty$ nach A, dann wird die Bewegung rückläufig bis B, kehrt hier abermals um und geht nach C, wird hier rückläufig bis D, kehrt hier wieder um und geht nach $+\infty$, womit die ganze Bewegung geschlossen ist. Die Figur bringt in der punktirten Linie diese Bewegung zur Anschauung; eine andere Möglichkeit kann nicht eintreten. Ob nun die Erzeugenden alle noch eine feste Gerade treffen oder nicht, ist hinsichtlich der Gestalt der Regelfläche nicht von Belang.

Sollen nun zwei Pinch-points zusammenrücken, so können das in unserer Figur die Punkte A und B oder C und D sein, dann rücken die 3 Erzeugenden durch einen solchen Punkt unendlich nahe zusammen. Hieraus ist aber unmittelbar die Bewegung des Berührungspunktes in diesem Falle klar. Man erkennt auch sofort, wie die Verhältnisse sich gestalten, wenn A und B conjugirt imaginär werden. Werden auch noch C und D conjugirt imaginär, so giebt es ersichtlich in jedem Punkte der dreifachen Geraden nur noch eine *einzige reelle Tangentialebene.* Aus der Regelfläche mit nur zwei rellen Pinch-points C und D kann man noch eine zweite Regelfläche ohne reelle Pinch-points ableiten, wenn man in Fig. 45 die Punkte C und D durchs Unendliche zusammenrücken, und dann conjugirt imaginär werden lässt. Dasselbe erreicht man, wenn man von der Figur 45a ausgeht und die Punkte C und D im Endlichen zusammenrücken und conjugirt imaginär werden lässt. Man erhält so eine Regelfläche, welche in jedem Punkt der dreifachen Geraden noch *drei reelle Tangentialebenen* besitzt. Dreht sich eine Ebene durch die dreifache Gerade um 180°, so durchläuft der Berührungspunkt diese Gerade drei Mal in derselben Richtung. Der Uebergang von der Regelfläche mit *zwei* reellen Pinch-points zu der letztgenannten Regelfläche, wird von einer Regelfläche, mit einer constanten Tangentialebene längs der dreifachen Geraden, gebildet.

Hat die Regelfläche in der dreifachen Geraden *eine* constante Tangentialebene und bezeichnen wir die beiden Pinch-points wieder mit A und B, den singulären Punkt aber mit S, so giebt uns Figur 45a die Bewegung des Berührungspunktes. Die Erzeugende durch den Berührungspunkt fällt dabei *ein* Mal mit der dreifachen Geraden zusammen und zwar gerade für den Punkt S als Berührungspunkt; in-

dem also der Berührungspunkt die Lage S passirt, passirt die Erzeugende die Lage der dreifachen Geraden.

Nach einer Drehung von 180^0 nimmt die Erzeugende wieder ihre ursprüngliche Lage an. Versieht man die Erzeugende mit einem Pfeil, um eine positive Richtung zu markiren, so stimmt die Richtung zu Anfang und am Schluss der Bewegung überein, was bei den vorhergehenden Regelflächen ebenfalls der Fall ist. Man übersieht leicht die kleine Aenderung, welche eintritt, wenn der Pinch-point A in den singulären Punkt hereinrückt.

Hat die Regelfläche in der dreifachen Geraden *zwei* constante Tangentialebenen, so durchläuft der Berührungspunkt die dreifache Gerade *einfach*, wenn sich die Tangentialebene um 180^0 dreht. Für zwei Lagen des Berührungspunktes fällt die Erzeugende mit der dreifachen Geraden zusammen, die positive Richtung der Erzeugenden zu Anfang und zu Ende der Bewegung stimmen wieder überein.

Zum Schluss ist noch die Regelfläche zu nennen, bei welcher die beiden Mäntel mit constanter Tangentialebene verzweigt sind. Der Berührungspunkt durchläuft die Gerade einfach; für einen Punkt fällt die Erzeugende mit der dreifachen Geraden zusammen und ändert in demselben Moment die Richtung ihrer Drehung in Bezug auf ihren Punkt in der dreifachen Geraden.

Da bei der zuletzt genannten Regelfläche, die beiden singulären Punkte zusammengerückt sind, so erkennt man, dass bei der Regelfläche mit *zwei* constanten Tangentialebenen, die letzteren auch conjugirt imaginär sein können.

Die Steiner'sche Fläche, ihre Realitätsverhältnisse, sowie die Specialfälle derselben.

125. Da die Steiner'sche Fläche ein so allgemeines Interesse in Anspruch nimmt, so dürfte es nicht überflüssig sein, ihr ein besonderes Capitel zu widmen. Beginnen wir mit dem Fall der Steiner'schen Fläche, in welchem die drei Doppelgeraden reell sind, dann ist ihre Gleichung:

$$2xyzw+a_1y^2z^2+a_2z^2x^2+a_3x^2y^2+2b_1x^2yz+2b_2y^2zx+2b_3z^2xy=0.$$

Die Pinch-points auf den drei Doppelgeraden bestimmen sich respective durch die Werthe:

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=\frac{-1}{b_3\pm\sqrt{a_1a_2}},$$

$$x=0,\qquad y=\frac{-1}{b_2\pm\sqrt{a_1a_3}},\qquad z=0,$$

$$x=\frac{-1}{b_1\pm\sqrt{a_2a_3}},\qquad y=0,\qquad z=0;$$

zugleich werden die Gleichungen der singulären Ebenen in diesen 6 Punkten:

$$x\sqrt{a_2} \pm y\sqrt{a_1} = 0,$$

resp.

$$y\sqrt{a_3} \pm z\sqrt{a_2} = 0,$$

resp.

$$z\sqrt{a_1} \pm x\sqrt{a_3} = 0.$$

Von diesen singulären Ebenen lassen sich vier Mal drei herausgreifen, welche sich in einer Geraden schneiden. Die 6 Pinch-points liegen vier Mal zu drei in Ebenen, welche die Fläche längs eines Kegelschnitts berühren, die 6 Dorsallinien in den Pinch-points bilden die Kanten eines Tetraeders. Alle diese Eigenschaften sind längs bekannt und habe ich sie hier nur einfach wiederholt*).

Sind die Grössen a_1, a_2, a_3 alle drei zugleich positiv oder zugleich negativ, so sind die aufgezählten Singularitäten alle reell und das Tetraeder der Dorsallinie ist reell**). Die Fläche liegt ganz innerhalb dieses Tetraeders.

Sind von den Grössen a_1, a_2, a_3 eine oder zwei negativ, die andern positiv, so giebt es nur noch zwei reelle Pinch-points und zwei reelle Dorsallinien; die vier Ebenen, welche längs eines Kegelschnittes berühren, sind paarweise conjugirt imaginär.

Den Uebergangsfall bildet eine zerfallende Fläche, welche aus einer Ebene und einer Regelfläche 3. Ord. besteht.

Die Steiner'sche Fläche kann auch so beschaffen sein, dass eine der drei Doppelgeraden reell, die beiden andern aber conjugirt imaginär sind. Macht man die reelle Doppelgerade zur Axe $x = 0$, $y = 0$ und die reelle Ebene durch die beiden andern Doppelgeraden zur Ebene $z = 0$, bestimmt man ferner die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ so, dass die imaginären Doppelgeraden sich in der Form:

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2) = 0$$

darstellen, so wird die Gleichung der Steiner'schen Fläche:

$$(x^2+y^2)^2 + (azx+bzy)(x^2+y^2) + z^2(cx^2+dy^2+2exy) + 2\varrho z(x^2+y^2) = 0.$$

Hier giebt es offenbar nur noch zwei reelle Pinch-points, sie liegen auf der einzigen reellen Doppelgeraden $x = 0$, $y = 0$ und bestimmen sich als:

$$z = \varrho\,\frac{(c+d) \pm \sqrt{(c-d)^2 + 4e^2}}{e^2 - dc}.$$

*) Ich erwähne hier: Steiner, Kummer, Weierstrass, Cremona, Clebsch, Schröter, Sturm.

**) Es ist das diejenige Steiner'sche Fläche, deren Modell von Kummer angefertigt worden ist, vergl. Berliner Monatsberichte 1864, oder auch Verlagskatalog von L. Brill in Darmstadt.

Man erkennt, dass diese Pinch-points stets reell sein müssen; durch jeden dieser beiden Punkte gehen zwei reelle Ebenen, welche längs eines Kegelschnittes berühren. Im dreifachen Punkt giebt es einen reellen Flächentheil, welcher die Ebene $z=0$ berührt, die Doppelgerade $x=0$, $y=0$ ist in der Nähe des dreifachen Punktes isolirt.

126. Den Uebergang von der Steiner'schen Fläche mit 3 reellen Doppelgeraden zu derjenigen mit nur einer reellen Doppelgeraden, bildet die Fläche mit *Selbstberührungsgeraden;* siehe Nr. 113. Die Gleichung dieser Fläche lässt sich immer schreiben:

$$x^2z + ax^4 + bx^3z + cx^2yz + z^2(dx^2 + ey^2) = 0.$$

Auf der Doppelgeraden $x=0$, $y=0$ liegt der eine Pinch-point $z = -\frac{1}{d}$, der andere ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Auf der Selbstberührungsgeraden $z=0$, $x=0$ liegen die beiden singulären Punkte $y = \frac{-1}{c \pm 2\sqrt{ae}}$; durch jeden dieser Punkte geht *eine* Ebene, welche längs eines Kegelschnitts berührt. Die beiden andern Ebenen, welche längs eines Kegelschnitts berühren, sind in die Ebene $z=0$ zusammengefallen. Der projicirende Kegel 3. Classe geht stets durch den dreifachen Punkt und berührt daselbst die Selbstberührungsgerade.

Die singulären Punkte auf der Geraden $z=0$, $x=0$ können auch conjugirt imaginär werden, dann werden auch die beiden, längs eines Kegelschnitts berührenden Ebenen conjugirt imaginär; in diesem Falle giebt es kein isolirtes Stück der Selbstberührungsgeraden mehr.

Zum Schluss haben wir noch die Steiner'sche Fläche mit *Selbstosculationsgeraden* zu untersuchen. In Nr. 119 haben wir bereits gefunden, dass es auf der singulären Geraden einen singulären Punkt giebt, durch diesen Punkt giebt es eine singuläre Tangente und durch diese eine Ebene, welche längs eines Kegelschnittes berührt. Da diese Singularitäten immer reell sein müssen, so kann man die Gleichung der Fläche immer schreiben: $x^3 + (axz + by^2)^2 = 0$. Das Gestaltliche dieser Fläche ist bereits in Nr. 120 besprochen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um auf ein Versehen in meiner Abhandlung „Ueber die Gestalten der Kummer'schen Fläche," Math. Annalen Bd. XVIII aufmerksam zu machen. Dort ist in dem letzten Abschnitt, welcher über Linienflächen handelt, Seite 156, die Linienfläche mit vier reellen Cuspidalpunkten auf der *einen* und vier imaginären auf der *andern* Doppelgeraden ausgelassen worden, sie ist ein Specialfall der Kummer'schen Fläche vom Typus IV.

Leipzig, den 20. Januar 1884.

Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques.

Par

Corrado Segre à Turin.

Extrait d'une lettre adressée à M. J. Rosanes.

Votre note *„Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen“* publiée à la pag. 412 du tome XXIII des Mathematische Annalen m'a rappelé certains résultats, qui semblent encore nouveaux et non sans quelque interêt, auxquels j'étais arrivé il y a plus d'une année à propos de la signification des invariants simultanés de deux formes quadratiques, et aussi une difficulté étrange que j'avais trouvé sur cette matière· Permettez que je vous expose ici ces résultats et cette difficulté (à laquelle d'autres recherches m'empêchent à-présent de penser).

C'est par une extension en deux sens de la méthode très-élégante dont M. Lüroth a fait usage*) pour trouver la signification géométrique des invariants simultanés de deux quadriques de l'espace ordinaire que j'arrive à une interprétation des invariants simultanés de deux formes quadratiques à $n+1$ variables.

Soient $f(xx)$, $\varphi(xx)$ ces deux formes: on sait qu'un système de leurs invariants simultanés se compose des coefficients de la forme binaire en λ, μ qui est le discriminant de $\lambda f+\mu\varphi$, c'est-à-dire que si (en indiquant en général le discriminant d'une forme ψ par $\Delta\psi$) l'on a

$$\Delta(\lambda f+\mu\varphi)=J_{n+1,0}\lambda^{n+1}+J_{n,1}\lambda^n\mu+J_{n-1,2}\lambda^{n-1}\mu^2+\cdots+J_{0,n+1}\mu^{n+1},$$

les quantités $J_{n-k+1,k}(k=0,1,\cdots,n+1)$ (parmi lesquelles $J_{n+1,0}=\Delta f$, $J_{0,n+1}=\Delta\varphi$) forment un système d'invariants simultanés de f et φ. Et on sait aussi (ou l'on démontre en peu de mots) que si

$$f=a_x^2=a_x'^2=\cdots,\quad \varphi=b_x^2=b_x'^2=\cdots,$$

---

*) Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung. Zeitschrift für M. u. Ph. Bd. XIII (1868), pag. 404.

ces invariants seront représentés symboliquement, à moins de certains facteurs numériques, par

$$(aa'a''\cdots a^{(n)})^2,\quad (ba'a''\cdots a^{(n)})^2,\quad (bb'a''\cdots a^{(n)})^2,\cdots;$$

de sorte que $J_{n,1}$ et $J_{1,n}$ seront vos *invariants harmoniques.* — Soient $x'\cdots x^{(n+1)}$ et $y'\cdots y^{(n+1)}$ deux groupes quelconques de *points* tels que les déterminants $X=|x_i^r|$, $Y=|y_i^s|$ ne soient pas nuls (c'est-à-dire deux groupes qui ne soient pas contenus dans des espaces linéaires à $n-1$ dimensions). On aura identiquement par deux multiplications successives de déterminants

$$XY\Delta(\lambda f+\mu\varphi)=|\lambda f(x^r y^s)+\mu\varphi(x^r y^s)|.$$

En supposant à-présent que

$$\text{(a)}\qquad f(x^r y^s)=0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s,$$

et en égalant dans les deux membres de l'identité précédente les coefficients des différentes puissances de λ,μ on aura:

$$\text{(1)}\quad XY\cdot J_{n,1}=\sum\varphi(x'y')\cdot f(x''y'')f(x'''y''')\cdots f(x^{(n+1)}y^{(n+1)}),$$

$$\text{(2)}\quad XY\cdot J_{n-1,2}=\sum\begin{vmatrix}\varphi(x'y') & \varphi(x'y'')\\ \varphi(x''y') & \varphi(x''y'')\end{vmatrix}\cdot f(x'''y''')\cdots f(x^{(n+1)}y^{(n+1)}),$$

. . . .

$$\text{(k)}\quad XY\cdot J_{n-k+1,k}=\sum\begin{vmatrix}\varphi(x'y') & \varphi(x'y^k)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ \varphi(x^k y') & \varphi(x^k y^k)\end{vmatrix}\cdot f(x^{(k+1)}y^{(k+1)})\cdots f(x^{(n+1)}y^{(n+1)}).$$

. . . .

Les égalités (a) signifient que les deux groupes de points x, y sont *polaires* l'un de l'autre par rapport à la forme f, c'est-à-dire que chaque point de l'un de ces groupes est *conjugué* par rapport à f à tous les points de l'autre groupe, excepté celui qui lui correspond (comme ayant le même indice). Cela posé, l'identité (1) nous dit que $J_{n,1}=0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations

$$\varphi(x'y')=0,\quad \varphi(x''y'')=0,\;\cdots,\;\varphi(x^{(n+1)}y^{(n+1)})=0$$

se vérifient ensemble, c'est-à-dire que si toutes ces équations, moins une, se vérifient, celle-là se vérifie aussi. Donc: *La condition nécéssaire et suffisante pour que l'invariant* (*harmonique*) $J_{n,1}$ *s'annulle est que l'on puisse trouver deux groupes de* $n+1$ *points polaires l'un de l'autre par rapport à* f *et dont les points correspondants soient conjugués par rapport à* φ. Comme cas particulier, en supposant que les deux groupes de points coincident, on a le théorème que vous avez donné dans la note que j'ai citée.

En remarquant qu'en général

$$\begin{vmatrix} \varphi(x'y') & \cdot & \varphi(x'y^k) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(x^k y') & \cdot & \varphi(x^k y^k) \end{vmatrix} = 0$$

exprime que les deux espaces linéaires à $k-1$ dimensions joignant $x' \cdots x^k$ et $y' \cdots y^k$ (et que je dirai, par brièveté, *appartenir* resp. aux deux groupes de points x et y) sont *conjugués* par rapport à la forme φ (en ce sens que chacun d'eux contient un point de l'espace polaire de l'autre), l'identité (2) nous dit que: *L'invariant $J_{n-1,2}$ s'annulle lorsqu'on peut trouver deux groupes de $n+1$ points polaires l'un de l'autre par rapport à f et dont les droites correspondantes soient conjuguées par rapport à φ. En particulier cet invariant s'annulle lorsqu'on peut trouver un groupe de $n+1$ points polaire de soi-même par rapport à f et dont les $\binom{n+1}{2}$ droites qui les joignent deux-à-deux soient toutes tangentes à φ.* — Et plus en général l'identité (k) nous dit que: *L'invariant $J_{n-k+1,k}$ s'annulle lorsqu'on peut trouver deux groupes de $n+1$ points polaires l'un de l'autre par rapport à f et dont les espaces à $k-1$ dimensions correspondants soient conjugués par rapport à φ; et en particulier lorsqu'on peut trouver un groupe de $n+1$ points polaire de soi-même par rapport à f et dont les $\binom{n+1}{k}$ espaces à $k-1$ dimenmensions qui les joignent k — à — k soient tous tangents à φ.*

Il n'est pas nécéssaire que je vous fasse remarquer que ces propositions donnent déjà des résultats nouveaux pour la théorie du système de deux coniques et de deux quadriques de l'espace ordinaire*); ni que

---

*) Je dois dire cependant que la nouvelle interprétation, que l'on obtient ainsi, pour la relation *harmonique* de deux coniques et de deux quadriques ordinaires pourrait aussi s'obtenir comme cas particulier de certains théorèmes sur une relation particulière entre deux correlations que vous avez donnés dans votre note *Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft* (Journal für Math., 90; v. pag. 312, 321).

Ces théorèmes peuvent d'ailleurs s'obtenir immédiatement par ma méthode. Remarquez en effet que mes calculs n'ont besoin d'aucune modification lorsqu'on fait l'hypothèse plus générale que $f(xy)$ et $\varphi(xy)$ soient deux formes bilinéaires quelconques (non symétriques). Supposez que les x soient des coordonnées de points dans un espace et que les y soient des coordonnées de points, ou bien des coordonnées de *plans*, dans un autre espace et vous aurez ainsi une série de propositions sur les invariants simultanés de deux correlations ou bien de deux homographies. En particulier si les deux espaces coincident et $\varphi(xy) = 0$ est la condition pour que le point x et le plan y soient unis (condition qui, par un choix convenable des coordonnées, peut être mise sous la forme $\sum x_i y_i = 0$), on obtient ainsi des propositions intéressantes sur les invariants d'une homographie, et on peut déduire de celles-ci les propositions dont je parlais sur le système de deux correlations ou de deux homographies. En me bornant par brièveté aux

je m'arrête à montrer les applications qu'on peut en faire à la géométrie de la droite. Ce qu'il m'importe surtout de vous faire remarquer c'est la difficulté dont je vous parlais au commencement. Remarquez que ce que j'ai démontré (avec quelques remarques que j'ai laissées de côté par briéveté) se résume analytiquement dans ceci: „La condition $J_{n-k+1,k}=0$ est *nécessaire* afin que l'on puisse déterminer les quantités $x_i' \cdots x_i^{(n+1)}$, et $y_i' \cdots y_i^{(n+1)}$ de manière à vérifier les équations

$$f(x^r y^s) = 0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s,$$

$$\begin{vmatrix} \varphi(x' y') & \cdot & \varphi(x' y^k) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(x^k y') & \cdot & \varphi(x^k y^k) \end{vmatrix} = 0, \cdots,$$

(où au lieu des indices $1, \cdots, k$ on doit mettre toutes les combinaisons k-uples de $1, 2, \cdots, n+1$); ou, pour parler plus exactement encore, si l'on peut déterminer ces quantités de manière à satisfaire à toutes ces équations moins une, celle-ci sera aussi satisfaite précisément lorsque $J_{n-k+1,k}=0$“. Mais peut-on toujours disposer de ces quantités de manière à satisfaire à toutes ces équations moins une? Les paramètres disponibles sont $2n(n+1)$ et ces equations sont en tout $n(n+1)+\binom{n+1}{k}$, de sorte qu'il semble qu'afin que l'on puisse déterminer ces paramètres de manière à satisfaire à toutes ces équations moins une on doit avoir (si ces équations sont indépendantes entre elles)

$$n(n+1) \geqq \binom{n+1}{k} - 1.$$

Or cette relation n'a lieu, pour n quelconque, que si $k=1$ ou bien $k=2$, ou si $k=n$ ou bien $k=n-1$*). Donc on peut dire

---

formes quaternaires, c'est-à-dire à l'espace ordinaire, on a les propositions suivantes, que je crois nouvelles:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'invariant $J_{3,1}$ d'une homographie s'annulle est qu'il existe un couple de tétraèdres correspondants par rapport à l'homographie et dont le premier soit inscrit dans le second. — En échangeant entre eux les deux espaces homographiques coincidents on a la condition pour que $J_{1,3}$ soit nul.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'invariant $J_{2,2}$ d'une homographie soit nul est qu'il existe un couple de tétraèdres correspondants tels que les arêtes de l'un coupent les arêtes opposées aux arêtes correspondantes de l'autre.

La première de ces propositions a pour analogue dans le plan un théorème sur les homographies planes démontré d'une autre manière par M. Pasch dans sa note *Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität* (Math. Ann., XXIII, pag. 426).

*) Elle a aussi lieu pour $k=3$ si $n=7$ et pour toutes les valeurs de k si $n=6$ (ou bien $n<6$).

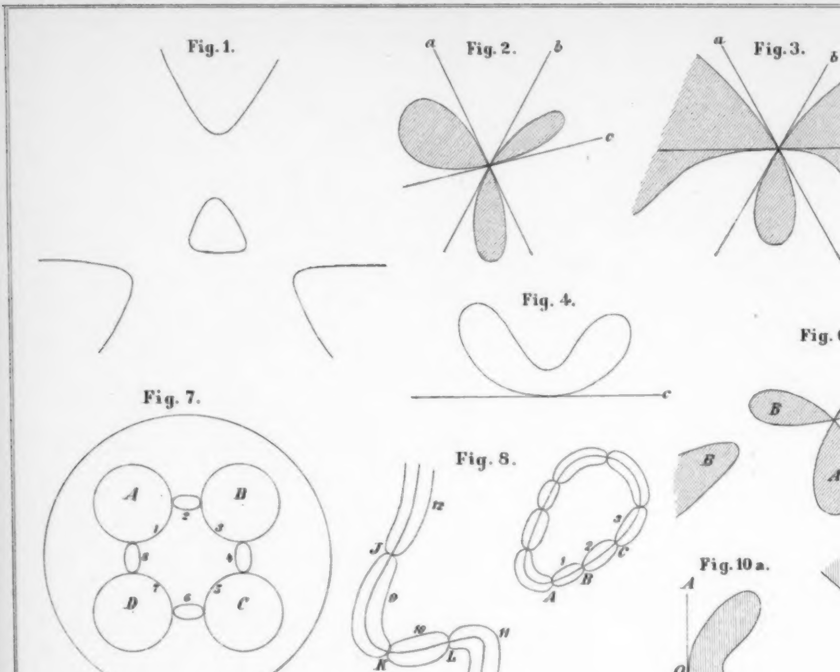
que la condition $J_{n-k+1,k}=0$ est non seulement *necéssaire*, mais aussi *suffisante* pour que l'on puisse trouver les deux groupes de points dont parle mon théorème, *seulement* lorsque $k=1, 2, n-1, n$. Mais en général pour des valeurs quelconques de n et de k il est bien vrai que $J_{n-k+1,k}=0$ lorsqu'il existe de tels groupes de points, mais il ne semble plus que l'existence de tels groupes soit nécéssaire pour que $J_{n-k+1,k}=0$.

Est-ce qu'il y a (ce qui me semble peu probable) entre les équations considérées des liens en force desquels on puisse toujours les satisfaire toutes moins une, quels que soient n et k? Et dans le cas contraire y a-t-il quelque autre relation géométrique entre les deux formes f et φ que l'on puisse substituer à la mienne de manière à avoir toujours une relation non seulement *suffisante*, mais aussi *nécessaire* pour que l'invariant $J_{n-k+1,k}$ s'annulle?

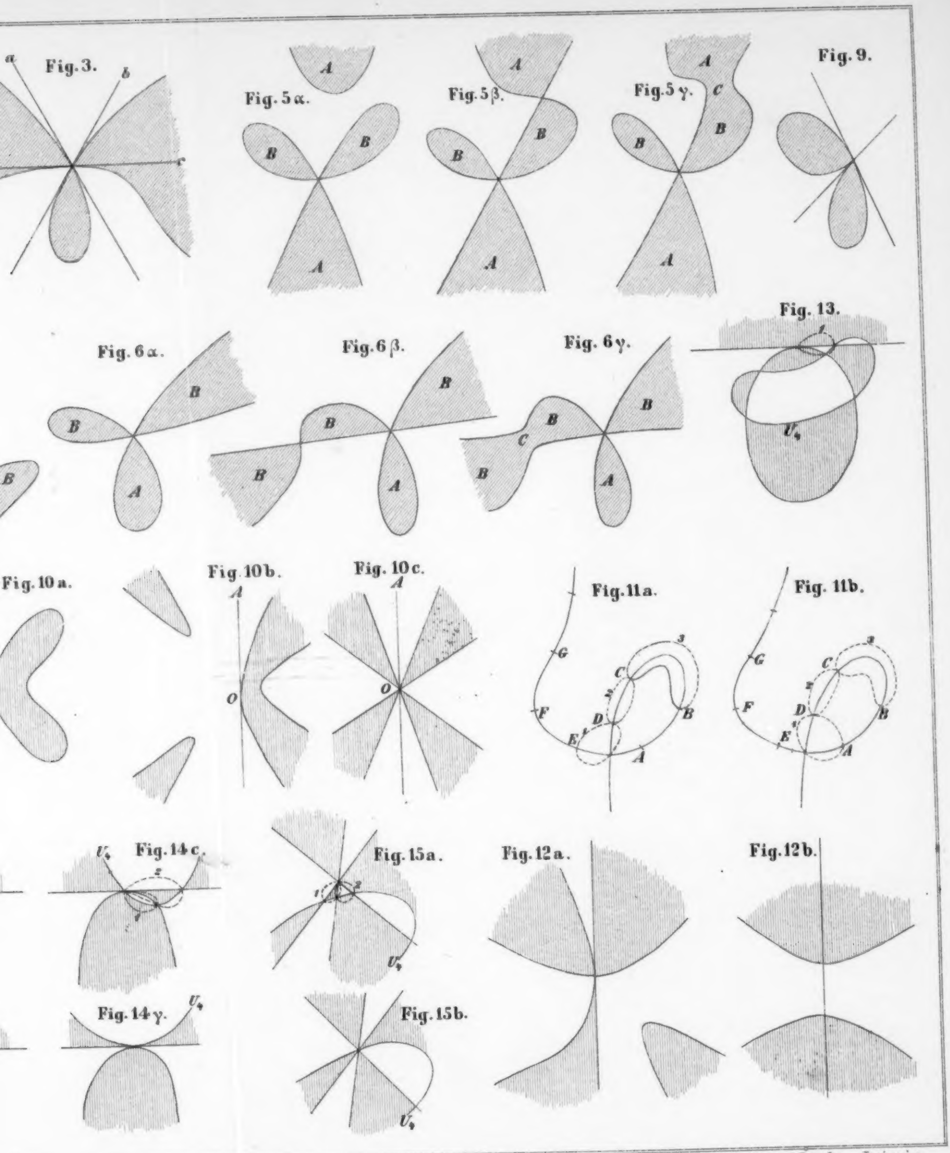
Turin, le 11. Avril 1884.

si
nt
n
ne
ne
ne

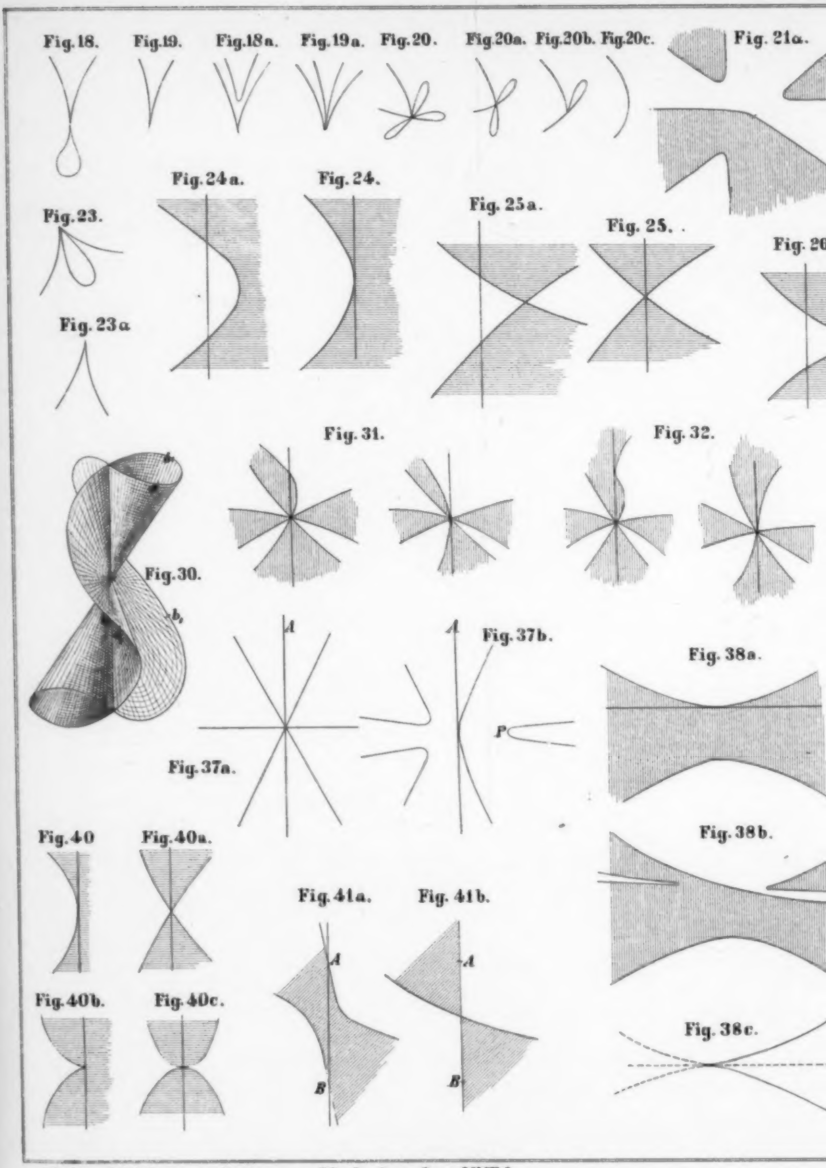
a-
es
as
ax
à
é-



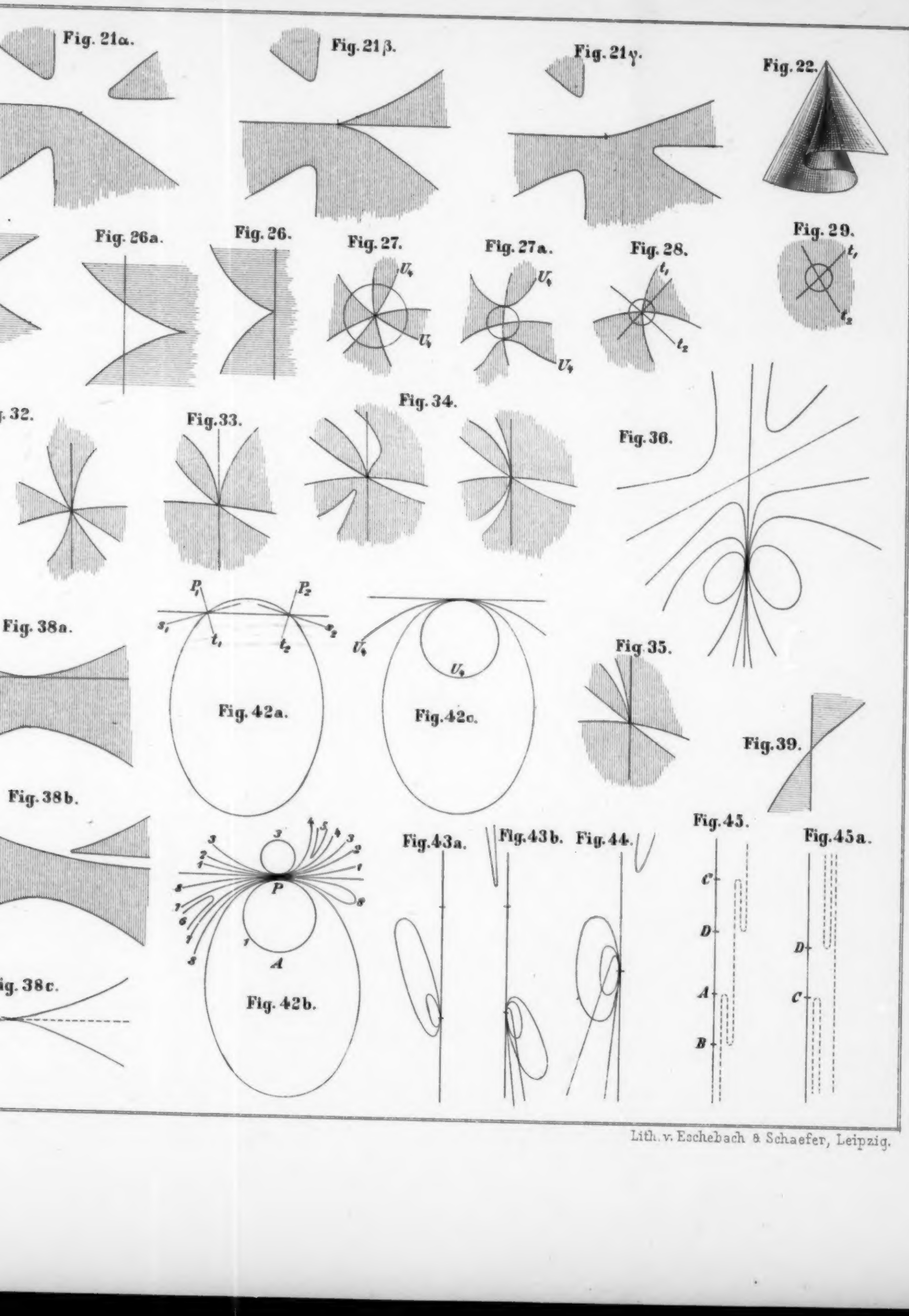
Rohn, Flächen 4. Ordnung. Math. Annalen XXIV.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.



Rohn, Flächen 4. Ordnung. Math. Annalen XXIV.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

di
zu
ab
In
an
re
er
da
de
G
ka
„
la
li
da
w
d
„
s
p
s
s
k
n
z
v

Ueber unendliche Doppelreihen.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Bekanntlich handelt von den Doppelreihen mit *reellen* Gliedern die 7. Note in Cauchy's Cours d'Analyse*). Dabei wird das Problem zurückgeführt auf die Betrachtung einer Function $s_n^{(m)}$ von zwei unabhängigen Variabeln m, n, die beide zur Grenze $+\infty$ übergehen. In diesem Sinne ist es auch im Folgenden gestellt. Später (Résumés analytiques 1833 p. 86) definirte Cauchy die Convergenz einer Doppelreihe in anderer Weise. Er bildet aus den Gliedern derselben, in endlicher oder auch in unendlicher Anzahl eine Summe s_n in der Art, dass sie wenigstens alle jene Glieder enthält, in denen die Summe der Indices kleiner ist als n, und dass neben jedem in ihr stehenden Gliede auch alle jene Glieder vorkommen, die man daraus ableiten kann, indem man einen oder beide Indices durch kleinere ersetzt. „Si toutes les fois que les deux conditions précédentes sont remplies, la somme s_n converge, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe s, la série multiple sera dite *convergente* etc.“ Es ist klar, dass damit gemeint ist, es müsse s_n immer *denselben* endlichen Grenzwerth s haben. So begreift sich ein späterer Satz von Cauchy**), der einfach aus der Convergenz einer vielfachen Reihe gefolgert wird: „Une série multiple (mit dem allgemeinen Gliede $f(x, y, z \ldots)$) étant supposée convergente, désignons par $k_0, k_1, h_2 \ldots k_n$ etc. des sommés partielles formées avec divers termes de cette série multiple, de telle sorte que le même terme ne se trouve jamais reproduit dans deux sommes distinctes, et que les termes exclus du système des sommes $k_0, k_1, k_2 \ldots k_n$ soient toujours, pour une valeur infiniment grande de n, des termes, qui correspondent à des valeurs infiniment grandes de $x, y, z \ldots$; alors, la série simple k_0, k_1, k_2 etc. sera elle-même convergente, et elle aura pour somme la somme s de la série multiple“. k_2

---

*) In den folgenden Citaten mit C. bezeichnet. R. bedeutet die „Resumés.“

**) Vgl. Comptes rendus. 1844. 2. sém. p. 1435.

Wenn man die erste Definition für die Convergenz einer Doppelreihe (Nr. 1) gebraucht, so würde es nicht einmal stets richtig sein, dass die Reihe $k_0, k_1, k_2 \ldots$ convergirt; trifft das aber in der That zu, so bleibt es erst noch fraglich, ob der Grenzwerth der Reihe gerade s ist. Der Nachweis des so modificirten Satzes gestaltet sich schon in einem bestimmten Falle ziemlich umständlich (Nr. 6). — Der genannte Satz bezieht sich übrigens auch auf vielfache Reihen mit *complexen* Gliedern, worüber auch § 21 der Résumes handelt.

Gegenüber der ersten Definition einer convergenten Doppelreihe drückt Cauchy's zweite die unbedingte oder besser *absolute* Convergenz einer Doppelreihe aus (Nr. 7). Demnach erscheint es als völlig berechtigt, jene an die Spitze der Theorie dieser Reihen zu stellen. Nicht-absolut convergente Doppelreihen können ebenso leicht, wie solche einfache Reihen gebildet werden. Insbesondere lässt sich aus einem fundamentalen Satze des Herrn Weierstrass eine, zunächst nur schlechtweg convergente Doppelreihe gewinnen (Nr. 8).

1. Eine Doppelreihe

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \quad a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ + a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array}\right.$$

heisst convergent, wenn

$$s_n^{(m)} = \left\{\begin{array}{l} \quad a_0^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + a_0^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} \end{array}\right.$$

bei $\lim m = +\infty$, $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth a hat, d. i. wenn jeder positiven Zahl ε positive Zahlen μ, ν zugeordnet werden können, so dass für alle ganzzahligen Werthsysteme $m > \mu$, $n > \nu$

$$(1) \qquad | s_n^{(m)} - a | < \varepsilon.$$

Dabei können die Glieder der Doppelreihe *reelle oder complexe Zahlen* sein. Zur Convergenz der Doppelreihe ist nothwendig und hinreichend die folgende Bedingung: „Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehören Zahlen $\mu > 0$, $\nu > 0$, so dass für alle ganzzahligen Werthsysteme $m > \mu$, $n > \nu$

$$(2) \qquad | s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)} | < \varepsilon,$$

welche der Werthe $0, 1, 2 \ldots$ auch die ganzen Zahlen p, r erhalten mögen."

Versteht man unter

$$R_{n,r}^{(m,p)} = \left\{ \begin{array}{l} \quad a_n^{(m)} \quad + \cdots + a_{n+r}^{(m)} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + a_n^{(m+p)} + \cdots + a_{n+r}^{(m+p)} \end{array} \right. ,$$

so folgt aus (2) unmittelbar, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Zahlen $\mu > 0$, $\nu > 0$ zugeordnet werden können, so dass für alle ganzzahligen Werthsysteme $m > \mu$, $n > \nu$, jeder der Ausdrücke

$$(3) \qquad |R_{0,n}^{(m,p)}|, \quad |R_{n,r}^{(0,m)}|, \quad |R_{n,r}^{(m,p)}|$$

kleiner ist als ε, welche der Werthe $0, 1, 2 \ldots$ auch die ganzen Zahlen p, r erhalten mögen. Man hat insbesondere $|a_n^{(m)}| < \varepsilon$ für alle $m > \mu$, $n > \nu$; woraus man aber nicht schliessen darf, dass im Falle der Convergenz von (I) eine Zahl $g > 0$ existiren muss, unter der alle Glieder $a_n^{(m)}$ dem absoluten Betrage nach liegen. Der Schluss ist jedoch gestattet, wenn man *von vorneherein* weiss, dass jede horizontale und jede vertikale Reihe in (I) convergirt. Aus der Convergenz von (I) kann aber die soeben erwähnte Eigenschaft dieses Schema's nicht geschlossen werden, wie Cauchy (C. p. 538) angiebt. In der That kann z. B. die erste Horizontalreihe in (I) eine divergente Reihe sein, wenn nur die Reihe der entgegengesetzten Glieder irgendwo als Parallelreihe eingeschaltet ist. — Daher wird das erste Theorem von Cauchy (C. p. 539) so zu lauten haben:

„Wenn ausser der Convergenz der Doppelreihe (I) (und zwar zum Werthe a) bekannt ist, dass *jede Horizontalreihe in* (I) *convergirt;* so folgt, dass die aus ihren Grenzwerthen gebildete unendliche Reihe ebenfalls convergirt und zwar zum Grenzwerthe a.“ — Der analoge Satz gilt auch hinsichtlich der Vertikalreihen.

Es dürfte nicht überflüssig sein, den Beweis dieses Satzes hier vorzuführen. Nach Voraussetzung hat man

$$(4) \qquad \sum_0^\infty{}^n a_n^{(m)} = a^{(m)}, \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

und

$$s^{(m)} = a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(m)} = \sum_0^\infty{}^p (a_p^{(0)} + a_p^{(1)} + \cdots + a_p^{(m)}).$$

Theilen wir diese Summe nach p in die Parthien von 0 bis n und von $n+1$ bis $+\infty$, so ergiebt sich

$$(5) \qquad s^{(m)} = s_n^{(m)} + \varrho_n^{(m)}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgelegt und $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so hat man nach (3)

$$\left| \sum_{n+1}^{n+r}{}^p [a_p^{(0)} + a_p^{(1)} + \cdots + a_p^{(m)}] \right| < \varepsilon', \quad (m > \mu', \ n > \nu'),$$

somit

$$| \varrho_n^{(m)} | \leqq \varepsilon' \quad \text{und} \quad | \varrho_n^{(m)} | < \varepsilon.$$

Also ergiebt sich aus (1) und (5), wenn μ'' die grössere der Zahlen μ, μ' bedeutet,

$$m > \mu'' \quad | s^{(m)} - a | < 2\varepsilon,$$

d. i. $\lim s^{(m)} = a$ bei $\lim m = +\infty$.

Wenn im zweifach unendlichen Schema (I) jede Horizontal- und jede Vertikalreihe und die aus den Summen der ersteren, sowie der letzteren gebildeten unendlichen Reihen convergiren, die Grenzwerthe dieser beiden Reihen aber verschieden sind, so kann die Doppelreihe (I) nicht convergiren. Ein solches Beispiel hat F. Arndt aufgestellt (Grunert's A. XX, p. 56.). — Selbst wenn die zuletzt genannten Reihen zu demselben Grenzwerthe convergiren, darf man nicht ohne Weiteres auf die Convergenz der Doppelreihe schliessen.

Satz: „Wenn jede Horizontal- und jede Verticalreihe in der *convergenten* Doppelreihe (I) convergirt, so convergirt auch diejenige Doppelreihe, die aus (I) dadurch entsteht, dass man nur die Glieder rechts und unterhalb von einem gegebenen $a_k^{(h)}$ nebst diesem selbst behält, d. i.

$$\text{(Ia)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \quad a_k^{(h)} + a_{k+1}^{(h)} + \cdots + a_{k+r}^{(h)} + \cdots, \\ + a^{(h+1)} + a_{k+1}^{(h+1)} + \cdots + a_{k+r}^{(h)} + \cdots, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + a_k^{(h+p)} + a_{k+1}^{(h+p)} + \cdots + a_{k+r}^{(h+p)} + \cdots \text{“} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Das folgt aus der Gleichung

$$s_{k+r}^{(h+p)} = s_{k-1}^{(h-1)} + R_{k,r}^{(0,h-1)} + R_{0,k-1}^{(h,p)} + R_{k,r}^{(h,p)}$$

unmittelbar, da jetzt der zweite Theil rechts bei $\lim r = +\infty$ und der dritte bei $\lim p = +\infty$ endliche Grenzwerthe besitzen. Wir werden den Grenzwerth der Doppelreihe (Ia) mit $R_k^{(h)}$ bezeichnen.

Unter denselben Voraussetzungen kann man aus (3) folgern:

„Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehören Zahlen $\mu > 0$, $\nu > 0$, so dass für alle ganzzahligen Werthsysteme $m > \mu$, $n > \nu$

$$| R_n^{(m)} | < \varepsilon \text{“}.$$

Convergente Doppelreihen mit reellen Gliedern entnehmen wir aus dem folgenden Satze: „Man setze in (I)

$$a_n^{(m)} = (-1)^{m+n} \mathsf{A}_n^{(m)},$$

worin $\mathsf{A}_n^{(m)}$ positiv sein soll. Es sei für jedes ganzzahlige Werthsystem $p \geqq 0$, $r \geqq 0$

$$\mathsf{A}_{n+r}^{(m+p)} \leqq \mathsf{A}_n^{(m)}$$

und sowohl bei constantem n $\lim\limits_{m+\infty} \mathsf{A}_n^{(m)} = 0$ als auch bei constantem m $\lim\limits_{n=\infty} \mathsf{A}_n^{(m)} = 0$. Endlich sei stets

$$\mathsf{A}_n^{(m)} + \mathsf{A}_{n+1}^{(m+1)} \geqq \mathsf{A}_n^{(m+1)} + \mathsf{A}_{n+1}^{(m)}.$$

Unter diesen Voraussetzungen *convergirt die Doppelreihe* (I)".

Der Beweis folgt aus der naheliegenden Relation

$$\left| s_{m+p}^{(n+r)} - s_m^{(n)} \right| \leqq \mathsf{A}_{n+1}^{(0)} + \mathsf{A}_0^{(m+1)},$$

woraus vermöge $\lim \mathsf{A}_n^{(0)} = 0$ bei $\lim n = +\infty$ und $\lim \mathsf{A}_0^{(m)}$ bei $\lim m = +\infty$ unmittelbar die Ungleichung (2) hervorgeht. — So convergirt die Doppelreihe

$$\text{(1 b)} \qquad a_n^{(m)} = \frac{(-1)^{m+n}}{m+n+1} \qquad \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \Big\} = 0, 1, 2 \ldots$$

(und zwar, wie leicht zu zeigen ist, zum Grenzwerthe $\frac{1}{2}$).

Eine andere Classe convergenter Doppelreihen mit reellen Gliedern kann man aus einem Satze von F. Arndt (l. c. p. 58) ableiten.

„Man setze

$$a_n^{(m)} = (-1)^n \mathsf{A}_n^{(m)} \quad \mathsf{A}_n^{(m)} > 0.$$

Es sei durchaus

$$\mathsf{A}_{n+1}^{(m)} \leqq \mathsf{A}_n^{(m)}$$

und bei constantem m $\lim\limits_{n=\infty} \mathsf{A}_n^{(m)} = 0$; so dass jede Horizontalreihe in (I) convergirt. Ferner sei auch die aus ihren Summen gebildete unendliche Reihe convergent. Endlich sei jede Verticalreihe in (I) und die aus ihren Summen gebildete Reihe convergent. Dann convergirt die Doppelreihe (I) ebenfalls." — Die letzte Bedingung kommt darauf zurück, dass die erste Verticalreihe convergirt und dass wenn $\sum^m \mathsf{A}_n^{(m)} = \mathsf{A}_n$, $\lim \mathsf{A}_n = 0$ sei bei $\lim n = +\infty$.

Der Beweis folgt aus der Relation

$$\left| s^{(m)} - s_n^{(m)} \right| < \mathsf{A}_{n+1}.$$

2. Wenn wir unter der Voraussetzung dass die Doppelreihe (I) convergirt, die Glieder derselben diagonal summiren d. h. die unendliche Reihe bilden $d_0 + d_1 + d_2 + \cdots$, worin

$$\text{(6)} \qquad d_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \cdots + a_r^{(n-r)} + \cdots + a_n^{(0)};$$

so kann sie auch divergent sein, wie schon die Doppelreihe (1b) oder gewisse aus den Gliedern zweier convergenten Reihen

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_m + \cdots, \quad b_0 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

gebildete Doppelreihen

$$a_n^{(m)} = a_m b_n$$

lehren. — Wenn aber die Reihe (6) convergirt, so muss ihr Grenzwerth a sein. Der Beweis dieses Satzes erheischt jedoch einige Vorbereitungen, insbesondere die Betrachtung absolut convergirender Doppelreihen.

Zunächst wollen wir noch hervorheben, dass *eine convergente Doppelreihe durch gehörige Einschaltung von Nullen in eine divergente verwandelt werden kann*. Ersetzen wir das Schema (I) durch das folgende

$$\text{(II)} \quad \left\{\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_m^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ +0 \;\; + a_0^{(1)} + \cdots + a_{m-1}^{(1)} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +0 \;\; +0 \;\; + \cdots + a_0^{(m)} + \cdots + a_{n-m}^{(m)} + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right.$$

so ist

$$s_m^{(m)} = d_0 + d_1 + \cdots + d_m .$$

Wenn nun die Reihe (6) divergirt, so muss die Doppelreihe (II) divergiren, da $s_n^{(m)}$ nicht einmal, falls $n = m$ gesetzt wird, bei $\lim m = +\infty$ einen Grenzwerth hat.

3. Doppelreihen mit positiven Gliedern: $a_n^{(m)} \geqq 0$.

Da nunmehr

$$s_{n+r}^{(m+p)} \geqq s_n^{(m)} \quad \left.\begin{matrix} p \\ r \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots,$$

so folgt der Satz:

1. „Existirt eine positive Zahl A, so dass für jedes Werthsystem m, n $s_n^{(m)} < A$, so *convergirt die Doppelreihe* (I). Im anderen Falle ist

$$\lim_{m=+\infty\; n=+\infty} s_n^{(m)} = +\infty.“$$

Weiter ergiebt sich unmittelbar:

2) „Ist die Doppelreihe (I), worin $a_n^{(m)} \geqq 0$, convergent, so convergiren alle ihre Horizontal (Vertical)-Reihen. Nach Nr. 1 convergirt daher die mit ihren Grenzwerthen gebildete unendliche Reihe und zwar zum Grenzwerthe der Doppelreihe.“

3. „Unter derselben Voraussetzung convergirt die unendliche Reihe

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + a_0^{(2)} + a_1^{(1)} + a_2^{(0)} + a_0^{(3)} + \cdots$$

und zwar zum Grenzwerthe der Doppelreihe. Und umgekehrt.“

Durch diesen Satz wird die Doppelreihe auf eine einfache zurückgeführt. Nun ergiebt sich sofort:

4. „Versetzt man in einer convergenten Doppelreihe, worin $a_n^{(m)} \geqq 0$, diese Glieder in beliebiger Weise, so bleibt sie auch bei der neuen Anordnung derselben convergent und hat denselben Grenz-

werth wie ursprünglich." — „Wenn man ihre Glieder auf beliebige Weise in eine unendliche Anzahl von endlichen oder einfach-unendlichen Reihen oder in eine endliche oder unendliche Anzahl von Doppelreihen vertheilt, so werden diese Partialreihen stets convergiren und die Summe ihrer Grenzwerthe wird gleich sein dem Grenzwerthe der vorgelegten Doppelreihe."

Cauchy hat noch bemerkt (C. p. 540):

5) „Convergiren in (I) sämmtliche Horizontal (Vertical)-Reihen und convergirt die aus ihren Grenzwerthen $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ gebildete unendliche Reihe, so convergirt die Doppelreihe (I) und hat daher nach Nr. 1 denselben Grenzwerth wie die Reihe $\sum a^{(m)}$."

Denn es ist

$$s_n^{(m)} \leqq a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(m)} < \sum a^{(m)}.$$

4. Absolut convergente Doppelreihen. Wenn die Glieder einer Doppelreihe (I) so beschaffen sind, dass *die aus ihren absoluten Beträgen* $|a_n^{(m)}| = \mathsf{A}_n^{(m)}$ *gebildete Doppelreihe*

$$\text{(III)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{A}_0^{(0)} + \cdots + \mathsf{A}_n^{(0)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + \mathsf{A}_0^{(m)} + \cdots + \mathsf{A}_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

convergirt, so convergirt auch die Doppelreihe (I) (Cauchy C. p. 540; R. p. 57, 161). Sie soll in diesem Falle als *absolut* convergent bezeichnet werden. — Denn bezeichnet man mit $S_n^{(m)}$ die Summe der je $(n+1)$ Anfangsglieder in den $(m+1)$ ersten Horizontalreihen von (III), so folgt unmittelbar

$$|s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)}| \leqq |S_{n+r}^{(m+p)} - S_n^{(m)}|;$$

es ist somit die Relation (2) erfüllt. — Sind die Glieder in (I) sämmtlich reell, so ist ihr Grenzwerth $a = b - c$, wo b der Grenzwerth der aus den positiven, $-c$ den der aus den negativen Gliedern $a_n^{(m)}$ gebildeten Doppelreihe bedeutet. — Sind die Glieder in (II) sämmtlich oder zum Theil complexe Zahlen, so ist $a = \beta + \gamma i$, unter β den Grenzwerth der aus den reellen Theilen der $a_n^{(m)}$, unter γi den der mit den imaginären Theilen der $a_n^{(m)}$ gebildeten Doppelreihe verstanden.

Unter der Voraussetzung dass die Doppelreihe (I) absolut convergirt, *gelten auch der zweite, dritte und vierte Satz der vorigen Nr.**).

5. „Wenn die Zahlen $a_n^{(m)}$ dem absoluten Betrage nach sämmtlich

---

*) Cauchy C. p. 541, R. p. 59, 561.

unter einer positiven Zahl g liegen, so convergirt die unendliche Doppelreihe

$$
\text{(IV)} \quad \begin{cases}
\quad a_0^{(0)} + a_1^{(0)} x + \cdots + a_n^{(0)} x^n + \cdots \\
+ a_0^{(1)} x + a_1^{(1)} x^2 + \cdots + a_n^{(1)} x^{n+1} + \cdots \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
+ a_0^{(m)} x^m + a_1^{(m)} x^{m+1} + \cdots + a_n^{(m)} x^{m+n} + \cdots \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{cases}
$$

für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind *und zwar absolut.*"

Dieser bekannte Satz folgt daraus, dass — $|x| = X$ gesetzt —

$$| a_n^{(m)} x^{m+n} | < g X^{m+n}.$$

Somit convergirt, falls $X < 1$, jede Horizontalreihe in der Doppelreihe mit allgemeinem Gliede $A_n^{(m)} X^{m+n}$ (V). Dabei ist ihre Summe kleiner als $g X^m : (1 - X)$ $(m = 0, 1, 2 \ldots)$. Da ferner

$$\sum_0^\infty {}_m \frac{g X^m}{1 - X} = \frac{g}{(1 - X)^2},$$

so convergirt die aus den Summen der Horizontalreihen in (V) gebildete unendliche Reihe und also nach dem 5. Satze in Nr. 3 auch die Doppelreihe (V) selbst.

Setzt man ferner

$$\text{(7)} \qquad |x| < 1 \qquad \sum_0^\infty {}_n a_n^{(m)} x^{m+n} = \varphi^{(m)}(x),$$

so ist (3. Satz in Nr. 4)

$$\text{(8)} \qquad |x| < 1 \qquad \sum_0^\infty {}_m \varphi^{(m)}(x) = \sum_0^\infty {}_n d_n x^n.$$

6. Nunmehr können wir den in Nr. 2 angekündigten Satz beweisen.

Satz. *Angenommen, es convergire die Doppelreihe* (I), *sowie jede ihrer Horizontal- und jede ihrer Verticalreihen, und es convergire auch die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede* (6): $d_0 + d_1 + d_2 + \cdots$; *so ist der Grenzwerth der letzteren* $\left(\sum d_n = d\right)$ *gleich dem Grenzwerthe* a *der Doppelreihe* (I).

Beweis. Wir bilden das Schema (IV). Da unter den hier bestehenden Voraussetzungen gewiss eine positive Zahl g existirt, so dass $| a_n^{(m)} | < g$; so convergirt die Doppelreihe (IV) absolut für alle Werthe von x: $|x| < 1$. Demnach besteht die Gleichung (8). Beschränken wir x auf das reelle Intervall $(0, 1)$; so hat man nach einem bekannten Satze von Abel

$$\lim_{x=1-0} \sum_{0}^{\infty} {}_n \, d_n x^n = d.$$

Nach Nr. 1 muss $\sum \varphi^{(m)}(1)$ convergiren und zwar zum Grenzwerthe a.

Der Grenzwerth der linken Seite von (8) bei $\lim x = 1 - 0$ ist aber nur dann sicher

$$\sum_{0}^{\infty} {}_m \, \varphi^{(m)}(1) = \sum_{0}^{\infty} {}_m \, a^{(m)} = a,$$

wenn die unendliche Reihe $\sum \varphi^{(m)}(x)$ *gleichmässig für alle* $0 \leq x < 1$ *convergirt.* Unter dieser Bedingung ist also $a = d$.

Um die angegebene gleichmässige Convergenz zu beweisen, setze man

$$\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m+1)}(x) + \cdots + \varphi^{(m+p)}(x) = \varrho_{m,p}(x);$$

ferner sei

$$P_n^{(k)} = a_n^{(k)} + a_{n+1}^{(k)} + \cdots, \quad (n \geq 0), \quad P_0^{(k)} = a^{(k)} \text{ nach (4).}$$

Man hat demnach

$$a_n^{(k)} = P_n^{(k)} - P_{n+1}^{(k)}$$

und nach (7)

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_n \left\{ P_n^{(k)} - P_{n+1}^{(k)} \right\} x^{k+n} = a^{(k)} x^k - (1-x) \sum_{1}^{\infty} {}_n \, P_n^{(k)} x^{k+n-1}.$$

Setzt man in der letzten Gleichung nacheinander $k = m$, $m + 1 \cdots m + p$ und summirt die $p + 1$ Reihen rechter Hand in der Art, dass man die $n - 1$ Anfangsglieder abtrennt, so folgt

$$(9) \qquad \varrho_{m,p}(x) = \sum_{m}^{m+p} {}_k \, a^{(k)} x^k - (1 - x) \sum_{1}^{n-1} {}_h \, x^h \sum_{m}^{m+p} {}_k \, P_h^{(k)} x^{k-1}$$

$$- (1 - x) \sum_{n}^{\infty} {}_h \, x^h \sum_{m}^{m+p} {}_k \, P_h^{(k)} x^{k-1}.$$

Der Kürze wegen mögen diese drei Theile bez. mit F, G, H bezeichnet werden.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem dritten Theile H. Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann existiren nach Nr. 1 positive Zahlen μ, ν, so dass für $m > \mu \quad n > \nu$

$$(10) \qquad | R_n^{(m)} | < \varepsilon.$$

Wir haben nun

$$P_h^{(k)} = R_h^{(k)} - R_h^{(k+1)},$$

also

$$\sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} = R_h^{(m)} x^{m-1} - (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} R_h^{(k)} x^{k-2} - R_h^{(m+p+1)} x^{m+p-1}.$$

Denkt man sich in (9) n *fixirt* und zwar so, dass sein Werth grösser als ν ist, so ergiebt sich wegen $0 \leq x < 1$, $h \geq n$ zunächst, falls nur $m > \mu$

$$\left| \sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} \right| < \varepsilon \left\{ x^{m-1} + (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} x^{k-2} + x^{m+p-1} \right\} = 2\varepsilon x^{m-1},$$

und endlich

$$|H| < 2\varepsilon (1-x) x^{m-1} \sum_n^\infty x^h = 2\varepsilon x^{n+m-1};$$

d. i. für $m > \mu$ ist

(11) $$|H| < 2\varepsilon.$$

Da

$$P_h^{(k)} = a^{(k)} - a_0^{(k)} - a_1^{(k)} - \cdots - a_{h-1}^{(k)},$$

so convergiren zufolge der vorausgesetzten Convergenz der Verticalreihen in (I) die unendlichen Reihen

$$\sum_0^\infty P_h^{(k)} \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Setzt man nun

$$P_h^{(k)} + P_h^{(k+1)} + \cdots = Q_h^{(k)},$$

so kann man, da die Zahl n als fest gewählt anzusehen ist, behaupten, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl μ' zugeordnet sei, so dass, falls $k > \mu'$ $|Q_h^{(k)}| < \varepsilon$, mag h irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ sein. Es sei m in (9) nun auch grösser als μ', d. i. $m > \mathsf{M}$, wenn M die grössere der Zahlen μ, μ' bedeutet.

Man hat zunächst

$$P_h^{(k)} = Q_h^{(k)} - Q_h^{(k+1)},$$

$$\sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} = Q_h^{(m)} x^{m-1} - (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} Q_h^{(k)} x^{k-2} - Q_h^{(m+p+1)} x^{m+p-1};$$

somit falls $m > \mathsf{M}$

$$\left| \sum_m^{m+p} P_h^{(k)} x^{k-1} \right| < \varepsilon \left\{ x^{m-1} + (1-x) \sum_{m+1}^{m+p} x^{k-2} + x^{m+p-1} \right\} = 2\varepsilon x^{m-1}.$$

Setzt man hier $h = 0$, so findet man

(12) $$|F| < 2\varepsilon x^{m-1} < 2\varepsilon.$$

Ferner ergiebt sich

$$(13) \qquad |G| < 2\varepsilon(1-x)\, x^{m-1} \sum_1^{n-1} x^h = 2\varepsilon x^m (1-x^{n-1}) < 2\varepsilon.$$

Aus den Relationen (11) — (13) folgt endlich, dass wenn $m > M$

$$|\varrho_{m,p}(x)| < 6\varepsilon \quad (p = 0, 1, 2 \ldots),$$

was für einen der Werthe $0 \leqq x < 1$ auch x annehmen mag. Damit ist der verlangte Nachweis geliefert.

Einen speciellen Fall des allgemeinen Theorems bietet der folgende Satz von Abel dar: „Wenn die unendlichen Reihen $\sum a_m$, $\sum b_n$ convergiren und es convergirt auch die Reihe $\sum d_n$, wo

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

so ist ihr Grenzwerth gleich dem Producte der Grenzwerthe a, b der beiden ersteren Reihen." Denn setzt man in (I) $a_n^{(m)} = a_m b_n$, so ist die Doppelreihe convergent und hat den Grenzwerth ab.

NB. Es ist möglich, dass die Doppelreihe (I) und die Reihe (6) $d_0 + d_1 + d_2 + \cdots$ convergiren *ohne dass irgend eine Horizontalreihe im Schema* (I) *convergirt.* Es sei $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ (14) eine convergente Reihe mit der Summe 0 und $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ (15) eine divergente Reihe, jedoch von der Art, dass die Partialsummen

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_n = t_n$$

sämmtlich ihrem absoluten Betrage nach unter einer Zahl $B > 0$ liegen. Dann convergirt die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $a_n^{(m)} = a_m b_n$ und zwar zum Werthe 0. Zugleich divergiren darin jede Horizontalreihe, wenn $a_m \gtrless 0$. Setzt man z. B. $b_n = (-1)^n$ und bildet

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n,$$

so findet man

$$w_{2k} = a_0 + a_2 + \cdots + a_{2k}, \quad w_{2k+1} = a_1 + a_3 + \cdots a_{2k+1}.$$

Soll nun $\sum d_n$ convergiren, wie wir wünschen, so muss jede der unendlichen Reihen $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$ zum Grenzwerthe Null convergiren. Auf diese Art ergiebt sich das folgende Beispiel für das oben erwähnte Vorkommniss. Es sei $c_0 + c_1 + \cdots$ eine convergente Reihe mit der Summe 0 $\left(\text{z. B. } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \cdots\right)$. An Stelle von (14) setze man die Reihe

$$c_0 + c_0 + c_1 + c_1 + c_2 + c_2 + \cdots$$

mit der Summe 0, an die von (15)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

so hat die Doppelreihe mit dem Gliede $a_m b_n$ den Grenzwerth 0. Eine einfache Rechnung zeigt, dass jetzt $d_{2k} = c_k$, $d_{2k+1} = 0$, so dass die Reihe $d_0 + d_1 + \cdots$ in der That convergirt. Ihr Grenzwerth stimmt noch überein mit dem der Doppelreihe.

7. Aus dem Satze der vorigen Nr. ergiebt sich unmittelbar der folgende: „Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die convergente Doppelreihe (I) bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergent sei und stets *denselben* Grenzwerth a darbiete, besteht in der absoluten Convergenz derselben." Dabei meint man, dass auch bei jeder Anordnung ihrer Glieder sowohl horizontal als auch vertical summirt werden dürfe, d. h. dass alle Horizontal- (Vertical-) Reihen in (I) convergiren, woraus nach Nr. 1 schon folgt, dass die Summe ihrer Grenzwerthe a sei.

Dass die angegebene Bedingung *hinreichend* sei, ist bereits in Nr. 5 bemerkt.

Um ihre *Nothwendigkeit* nachzuweisen, zerlegen wir jedes Glied in seinen reellen und imaginären Theil

$$a_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)} + i\beta_n^{(m)}$$

und bemerken, dass die Doppelreihen mit den Gliedern $\alpha_n^{(m)}$, $\beta_n^{(m)}$ einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen Grenzwerth haben müssen. Nun seien unter den $\alpha_n^{(m)}$ die positiven mit $\gamma_n^{(m)}$, die negativen mit $-\delta_n^{(m)}$ bezeichnet. Würde nur eine der Doppelreihen $\gamma_n^{(m)}$, $-\delta_n^{(m)}$ divergiren, so hätte die Doppelreihe $\alpha_n^{(m)}$ bei jeder Anordnung der Glieder einen unendlichen Grenzwerth. Wollen wir von der absoluten Convergenz der Doppelreihe

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0^{(0)} + \cdots + \alpha_0^{(n)} + \cdots \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \alpha_0^{(m)} + \cdots + \alpha_n^{(m)} + \cdots \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

absehen, so müssen wir also jetzt annehmen, dass jede der eben genannten Doppelreihen einen unendlichen Grenzwerth hat. Betrachten wir nun die unendliche Reihe

$$(16) \qquad \alpha_0^{(0)} + \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(0)} + \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(0)} + \cdots$$

und bezeichnen wir ihre Glieder in dieser Anordnung mit $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_p$, so ist leicht ersichtlich, dass unter den hier bestehenden Voraussetzungen $\lim \eta_p = 0$ bei $\lim p = +\infty$. Man kann daher nach einem Satze von Riemann (Werke p. 221) die Glieder von (16) so anordnen, dass diese Reihe jeden gegebenen endlichen Grenzwerth $\varkappa$ darbietet. Bezeichnen wir die Glieder von (16) in der soeben durchgeführten Anordnung mit $\varkappa_0^{(0)} + \varkappa_0^{(1)} + \varkappa_1^{(0)} + \cdots$ und setzen

$$\varkappa_0^{(n)} + \varkappa_1^{(n-1)} + \cdots + \varkappa_n^{(0)} = \Delta_n,$$

so hat auch die unendliche Reihe $\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots$ den Grenzwerth $\varkappa$ und die Doppelreihe mit Gliede $\varkappa_n^{(m)}$, wenn sie überhaupt convergirt, ebenfalls. Es ist somit die obige Voraussetzung abzuweisen, d. h. die Doppelreihe (VI) muss absolut convergiren. Das Gleiche gilt von der Doppelreihe $\beta_n^{(m)}$ und daher auch von (I) selbst.

Mit dem vorstehenden Satze stimmt überein der in der Einleitung angeführte Satz von Cauchy.

9. Im Anschlusse an einen Satz des Hrn. Weierstrass (Monatsberichte der k. Academie zu Berlin 1890 p. 723) wollen wir noch nachweisen, dass die folgende Doppelreihe convergirt. „Man setze in (I)

(VII) $$a_n^{(m)} = a_{m,n} x_n.$$

Die Horizontalreihen

$$\sum_0^\infty {}^n a_{m,n} x^n \quad (m = 0, 1, 2 \ldots)$$

seien sämmtlich convergent für alle reellen und complexen Werthe von x, welche dem absoluten Betrage nach unter der positiven Zahl R liegen, es convergire ferner die aus ihren Grenzwerthen $P_m(x)$ gebildete Reihe

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_m(x) + \cdots$$

und zwar *gleichmässig* für alle Werthe $|x| < R$; dann *convergirt die Doppelreihe* (VII) *für jeden Werth von x, der dem absoluten Betrage nach kleiner ist als R*".

Wir setzen

(a) $$s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)} = \sum_{m+1}^{m+p} {}^k \sum_0^{n+r} {}^l a_{k,l} x^l + \sum_0^m {}^k \sum_{n+1}^{n+r} {}^l a_{k,l} x^l = G + H,$$

indem wir die beiden Theile rechts bez. mit G und H bezeichnen. Dabei ist

(b) $$G = \sum_{m+1}^{m+p} {}^k P_k(x) - \sum_{m+1}^{m+p} {}^k \sum_{n+r+1}^{\infty} {}^l a_{k,l} x^l = \sum_{m+1}^{m+p} {}^k P_k(x) - \sum_{n+r+1}^{\infty} {}^l x^l \sum_{m+1}^{m+p} {}^k a_{k,l}.$$

Zufolge Voraussetzung entspricht jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl μ, so dass wenn $|x| < R$, für $m > \mu$

(c) $$\left| \sum_{m+1}^{m+p} {}^k P_k(x) \right| < \varepsilon,$$

welchen der Werthe $1, 2 \ldots$ auch p erhalten mag.

Nun sei $|x| = X < R$ und R_1 eine Zahl zwischen X und R.

Man hat dann nach einem bekannten Satze aus (c), wie Hr. Weierstrass a. a. O. bemerkt,

$$\text{(d)} \qquad m > \mu \qquad \left| \sum_{m+1}^{m+p}{}^{k} a_{k,l} \right| < \varepsilon R_1^{-l}$$

und damit nach (b)

$$\text{(e)} \quad m > \mu \quad |G| < \varepsilon + \varepsilon \sum_{n+r+1}^{\infty}{}^{l} \left(\frac{X}{R_1}\right)^l < \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{X}{R_1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R_1}\right).$$

Für den Ausdruck H schreiben wir

$$H = \sum_{n+1}^{n+r}{}^{l} x^l \sum_{0}^{m}{}^{k} a_{k,l}.$$

Zunächst ist nun zu bemerken, dass die Function

$$\text{(f)} \qquad \varphi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{k} P_k(x) = \sum_{0}^{m}{}^{k} P_k(x) + \sum_{m+1}^{\infty}{}^{k} P_k(x)$$

für alle $|x| \leqq R_1$ dem absoluten Betrage nach unter einer Zahl $D > 0$ liegt. Denn ist hier m eine *bestimmte* Zahl $> \mu$, so bildet der erste Theil eine stetige Function von x und hat daher seinem absoluten Betrage nach ein endliches Maximum D_m; so dass zufolge (c)

$$|x| \leqq R_1 \qquad |\varphi(x)| \leqq D_m + \varepsilon.$$

Bezeichnet man die Constante $D_m + \varepsilon$ mit D, so hat man nach (f)

$$|x| \leqq R_1 \qquad |\varphi(x)| \leqq D, \qquad \left| \sum_{0}^{m}{}^{k} P_k(x) \right| \leqq D + \varepsilon \quad (m > \mu).$$

Setzt man

$$\sum_{0}^{m}{}^{k} P_k(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{l} x^l \sum_{0}^{m}{}^{k} a_{k,l},$$

so folgt wie oben für jeden Werth von l

$$m > \mu \qquad \left| \sum_{0}^{m}{}^{k} a_{k,l} \right| \leqq (D + \varepsilon)\, R_1^{-l};$$

somit

$$\text{(g)} \quad |H| \leqq (D + \varepsilon) \sum_{n+1}^{n+r}{}^{l} \left(\frac{X}{R_1}\right)^l < (D + \varepsilon) \left(\frac{X}{R_1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R_1}\right).$$

Fasst man (e) und (g) zusammen, so findet man endlich

$$\left| s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)} \right| < \varepsilon + (D + 2\varepsilon) \left(\frac{X}{R_1}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{X}{R_1}\right) \quad (m > \mu).$$

Da $X < R_1$, so kann man eine positive Zahl ν angeben, so dass der zweite Theil auf der rechten Seite dieser Relation kleiner ist als ε, wenn nur $n > \nu$. Also ist für alle Werthsysteme $m > \mu$ $n > \nu$

$$| s_{n+r}^{(m+p)} - s_n^{(m)} | < 2\varepsilon,$$

d. h. die Doppelreihe (VII) ist convergent, wenn $|x| < R$. Nach Nr. 1 ist $\varphi(x)$ ihr Grenzwerth.

Aus (d) folgt, dass jede der Reihen $\sum_0^\infty {}^k a_{k,l}$ convergirt. Nennt man a_l ihre Summe, so ist der Grenzwerth der Doppelreihe (VII) auch gleich $\sum_0^\infty {}^l a_l x^l$, so dass

$$|x| < R \quad \varphi(x) = \sum_0^\infty {}^l a_l x^l$$

— eine Gleichung, die Hr. Weierstrass zuerst aufgestellt und auf einfachere Weise bewiesen hat.

Innsbruck, im Februar 1884.

Démonstration de certaines inégalités de M. Tchébychef.

Par

A. Markoff à St. Petersbourg.

Dans une note „Sur les valeurs limites des intégrales" (Journal de M. Liouville. 1874) M. Tchébychef a énoncé le théorème suivant.

Théorème:

„Soit $f(z)$ une fonction quelconque de z et $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une des fractions convergentes (réduites) de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

la fonction $f(z)$ conservant constamment le signe $+$ entre les limites de l'intégrale, c'est à dire de $z = a$ jusqu'à $z = b$. Soit encore

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\ldots(x - x_l)\ldots(x - x_n)$$

à condition que

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_l < \ldots < x_n < b.$$

Cela posé, on obtiendra l'inégalité

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz > \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \cdots + \frac{\varphi(x_{l-1})}{\psi'(x_{l-1})} + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)} > \int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz."$$

Dix ans se sont passés depuis l'énoncé de ce théorème et cependant nous n'en rencontrons point de démonstration.

Ayant fait plusieurs efforts vains, je suis parvenu à trouver une démonstration très simple du théorème de M. Tchébychef, tout en y ajoutant les inégalités suivantes:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} < \int_a^{x_k} f(z)\,dz,$$

$$\int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)} < \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz.$$

Cette démonstration fait l'objet de la note présente.

Formules fondamentales.

Remarquons, que

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{\psi(x) - \psi(z)}{x - z} f(z)\,dz, \quad \varphi(x_i) = \int_a^b \frac{\psi(z)}{z - x_i} f(z)\,dz$$

et

$$\frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)} = \int_a^b \frac{\psi(z)}{(z - x_i)\,\psi'(x_i)} f(z)\,dz.$$

Si $\Phi(z)$ désigne une fonction entière de z d'un degré moindre que $2n$, nous aurons

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z) \cdot \Theta(z),$$

en posant

$$\Phi_0(z) = \Phi(x_1) \frac{\psi(z)}{(z - x_1)\,\psi'(x_1)} + \Phi(x_2) \frac{\psi(z)}{(z - x_2)\,\psi'(x_2)} + \cdots$$
$$+ \Phi(x_n) \frac{\psi(z)}{(z - x_n)\,\psi'(x_n)}$$

et $\Theta(z)$ désignant une certaine fonction entière de z d'un degré moindre que $n - 1$.

En même temps:

$$\int_a^b \Phi(z) \cdot f(z) \cdot dz = \Phi(x_1) \cdot \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \Phi(x_2) \cdot \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots$$
$$+ \Phi(x_n) \cdot \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)};$$

en cas particulier $(\Phi(z) = 1)$:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})} + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Reduction des inégalités précédentes à deux inégalités générales.

Il est facile de voir, que toutes les inégalités précédentes se déduisent es deux suivantes:

$$\int_0^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})},$$

$$\int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

En effet en écrivant dans ces dernières formules l au lieu de $k-1$ et k au lieu de $l+1$, on obtiendra:

$$\int_a^{x_l} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_k}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Il résulte de là, qu'ayant égard à l'équation

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})} + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

nous déduisons consécutivement:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz - \int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz$$
$$> \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \cdots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_l}^{b} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_l} f(z)\,dz$$
$$> \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

$$\int_a^{x_k} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_{x_k}^{b} f(z)\,dz$$
$$> \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}$$

et enfin

$$\int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz - \int_a^{x_k} f(z)\,dz$$
$$< \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \cdots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)}.$$

Les cas particuliers les plus simples.

L'équation

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

nous fournit immédiatement les inégalités

$$\int_a^{x_n} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

et

$$\int_{x_1}^b f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Nous exclurons ces cas dans tous les calculs suivants.

Démonstration de l'inégalité:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Soit

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z-x_1)\,\psi'(x_1)} + \frac{\psi(z)}{(z-x_2)\,\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\psi(z)}{(z-x_{k-1})\,\psi'(x_{k-1})}$$

et

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z)\cdot\Theta(z),$$

$\Theta(z)$ étant une certaine fonction entière de z d'un degré $n-2$. Nous aurons alors

$$\int_a^b \Phi(z)\cdot f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Choisissons maintenant $\Theta(z)$ de manière que la dérivée

$$\Phi'(z) = \Phi_0'(z) + \psi'(z)\cdot\Theta(z) + \psi(z)\cdot\Theta'(z)$$

soit zéro pour les valeurs

$$z = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-2},\ x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n.$$

Cette condition se réduit à $n-1$ équations, dont la forme sera

$$\Theta(x_i) = -\frac{\Phi_0'(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

en posant i égal consécutivement à

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k-3,\ k-2,\ k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n.$$

Il est facile de voir, que ces dernières équations déterminent complètement la fonction entière $\Theta(z)$ d'un degré $n-2$; savoir

$$\Theta(z) = -\sum \frac{(x_i - x_{k-1})\,\Phi_0'(x_i)\,\psi(z)}{\{\psi'(x_i)\}^2 (z-x_i)(z-x_{k-1})} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ayant choisi de cette manière la fonction $\Theta(z)$, nous pouvons dire que la fonction

$$\Phi'(z)$$

devient zéro

$$n-1 \text{ fois}$$

pour les valeurs

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$$

et encore

$$n-2 \text{ fois}$$

pour de certaines valeurs de z, qui se trouvent dans les intervalles

$$\begin{array}{llll} \text{de } x_1 \text{ à } x_2\ , & \text{de } x_2 \text{ à } x_3\ , & \ldots, & \text{de } x_{k-2} \text{ à } x_{k-1}, \\ \text{de } x_k \text{ à } x_{k+1}, & \text{de } x_{k+1} \text{ à } x_{k+2}, & \ldots, & \text{de } x_{n-1} \text{ à } x_n\ , \end{array}$$

par une fois dans chacun de ces intervalles; par ce que nous avons

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = \Phi(x_3) = \cdots = \Phi(x_{k-2}) = \Phi(x_{k-1}) = 1$$

et

$$\Phi(x_k) = \Phi(x_{k+1}) = \Phi(x_{k+2}) = \cdots = \Phi(x_{n-1}) = \Phi(x_n) = 0.$$

Le degré de cette fonction entière $\Phi'(z)$ est $2n-3$. Donc toutes ses valeurs-zéro sont énumerées; il n'y en a point, qui soit dans l'intervalle

$$\text{de } x_{k-1} \text{ à } x_k.$$

Outre cela nous avons

$$1 = \Phi(x_{k-1}) > \Phi(x_k) = 0.$$

Parsuite

$$\Phi'(x_{k-1}) < 0,$$

$$\begin{array}{llll} \Phi'(x_k - \varepsilon) < 0, & \Phi'(x_{k+1} - \varepsilon) < 0, & \ldots, & \Phi'(x_n - \varepsilon) < 0, \\ \Phi'(x_k + \varepsilon) > 0, & \Phi'(x_{k+1} + \varepsilon) > 0, & \ldots, & \Phi'(x_n + h) > 0, \\ \Phi'(x_{k-2} + \varepsilon) > 0, & \Phi'(x_{k-3} + \varepsilon) > 0, & \ldots, & \Phi'(x_1 + 1) > 0, \\ \Phi'(x_{k-2} - \varepsilon) < 0, & \Phi'(x_{k-3} - \varepsilon) < 0, & \ldots, & \Phi'(x_1 - h) < 0, \end{array}$$

ε désignant une quantité positive infiniment petite et h une quantité positive arbitraire.

On en conclut, que la fonction

$$\Phi(z)$$

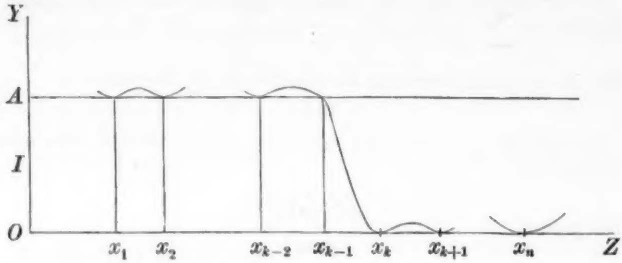
n'est pas moindre que zéro pour toutes les valeurs de z et non moindre que l'unité pour

$$z \leq x_{k-1}.$$

En posant

$$y = \Phi(z),$$

nous pouvons expliquer les changements de la fonction $\Phi(z)$ par une telle figure:



Revenons à notre intégrale

$$\int_a^b \Phi(z) \cdot f(z)\, dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})};$$

il est évident, que nous pouvons écrire consécutivement des inégalités suivantes:

$$\int_a^b \Phi(z)\, f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} \Phi(z) \cdot f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz$$

et

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \cdots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Démonstration de l'inégalité:

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\, dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\varphi'(x_{l+2})} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Soit:

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z - x_{l+1})\,\psi'(x_{l+1})} + \frac{\psi(z)}{(z - x_{l+2})\,\psi'(x_{l+2})} + \cdots + \frac{\psi(z)}{(z - x_n)\,\psi'(x_n)}$$

et

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z) \cdot \Theta(z),$$

$\Theta(z)$ étant une fonction entière de z d'un degré $n - 2$.

Pour déterminer $\Theta(z)$ posons $n - 1$ équations de la forme

$$\Theta(x_i) = -\frac{\Phi_0'(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

pour les valeurs de i

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l,\ l+2,\ l+3,\ \ldots,\ n;$$

de sorte que

$$\Theta(z) = -\sum \frac{(x_i - x_{l+1})\,\Phi'(x_i)\,\psi(z)}{\{\psi'(x_i)\}^2 (z - x_i)(z - x_{l+1})} \quad (1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

En ce cas nous trouvons facilement que la fonction

$$\Phi(z)$$

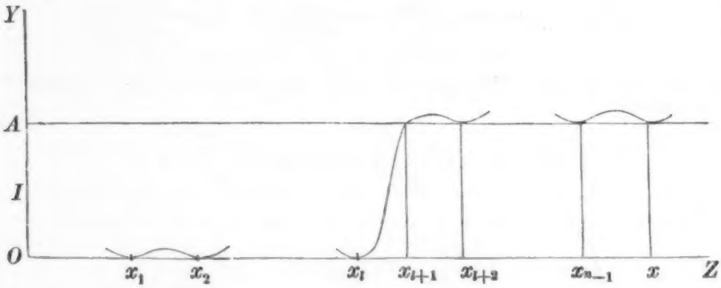
n'est pas moindre que zéro pour toutes les valeurs de z et non moindre que l'unité pour

$$z \geqq x_{l+1}.$$

En posant

$$y = \Phi(z).$$

nous pouvons expliquer les variations de la fonction $\Phi(z)$ par telle figure:



Cela posé, on a

$$\frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \cdots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

$$= \int_a^b \Phi(z) \cdot f(z)\,dz > \int_{x_{l+1}}^b \Phi(z) \cdot f(z)\,dz > \int_{x_{l+1}}^b f(z)\,dz.$$

Remarque.

Dans la démonstration des inégalités de première et seconde éspèce nous étions obligés de répéter les mêmes raisonnements; de sorte que nous avons complétement prouvé les inégalités de M. Tchébychef.

Je prends comme agréable dévoir de présenter ma profonde reconnaissance à M. Possé, qui m'a indiqué le moyen de résoudre cette question dans quelques cas particuliers.

Question de bâton*).

Prenons un bâton ABC:

Soient donnés les longueurs

$$AC = l, \quad AB = x$$

le poids p de AC, son centre de gravité D ($AD = d$) et son moment d'inertie par rapport à D.

Trouver le maximum et minimum du poids de AB.

Résolution.

. Il suffit de déterminer le maximum, car le minimum du poids de AB correspond au maximum du poids de BC.

$$\textit{Cas premier:} \quad x > d + \frac{k}{pd}.$$

Le poids entier p peut être concentré en deux points A et M, où $AM = d + \frac{k}{pd}$:

en A ——— le poids $\frac{pk}{pd^2 + k}$ et en M ——— le poids $\frac{p^2d^2}{pd^2 + k}$.

Donc le maximum cherché est égal à p.

$$\textit{Cas second} \quad d + \frac{k}{pd} > x > d - \frac{k}{p(l-d)}.$$

Concentrons le poids p en trois points A, B, C:

$$\text{en } A \quad \text{le poids } a = \frac{pxl + pd^2 + k - p(x+l)d}{xl},$$

$$\text{en } B \quad \text{le poids } b = \frac{pdl - pd^2 - k}{x(l-x)},$$

$$\text{en } C \quad \text{le poids } c = \frac{pd^2 + k - pdx}{l(l-x)}.$$

Alors:

$$a + b + c = p, \quad bx + cl = pd, \quad bx^2 + cl^2 = pd^2 + k,$$
$$ad^2 + b(x-d)^2 + c(l-d)^2 = k$$

et le poids AB est égal à

$$a + b = p - c = \frac{p(l-d)(l+d-x) - k}{l(l-x)}.$$

---

*) *Tchébychef, Journal de Liouville* 1874: Sur les valeurs limites des intégrales.

Outre celà

$$1+\frac{xz}{l(l-x)}-\frac{z^2}{l(l-x)}\geqq 1 \quad \text{si} \quad 0<z<x,$$

et

$$1+\frac{xz}{l(l-x)}-\frac{z^2}{l(l-x)}\geqq 0 \quad \text{si} \quad x<z<l.$$

Par conséquent

$$\int_0^x f(z)\,dz < \int_0^x f(z)\cdot\left[1+\frac{xz}{l(l-x)}+\frac{z^2}{l(l-x)}\right]dz$$

$$< \int_0^l f(z)\cdot\left[1+\frac{xz}{l(l-x)}-\frac{z^2}{l(l-x)}\right]dz$$

$$=\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)},$$

$f(z)$ étant le poids de l'unité de longueur au point $Z(AZ=z)$. Donc le maximum cherché est égal à:

$$\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l-x}.$$

Cas troisième $x<d-\frac{k}{p(l-d)}$.

Le poids entier p peut être concentré en deux points B et N, où $AN=\xi=d+\frac{k}{p(d-x)}<l$:

en B —— le poids $\frac{kp}{k+p(d-x)^2}$,

en N —— le poids $\frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}$.

Or

$$\int_0^x f(z)\,dz < \int_0^x f(z)\cdot\frac{(z-\xi)^2}{(x-\xi)^2}\,dz$$

$$< \int_0^l f(z)\cdot\frac{(z-\xi)^2}{(x-\xi)^2}\,dz < \frac{p\xi^2-2pd\xi+pd^2+k}{(x-\xi)^2}=\frac{kp}{k+p(d-x)^2}.$$

Donc le maximum cherché est égal à

$$\frac{kp}{k+p(d-x)^2}.$$

St. Petersburg 1884.

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen.

Von

O. Hölder in Leipzig.

Die vorliegende Arbeit handelt von der Beziehung, welche zwischen der *allgemeinen trigonometrischen* Reihe und der Fourier'schen Reihe besteht, insbesondere von dem Satz, dass die Coefficienten einer trigonometrischen Reihe in die Fourier'sche Form gebracht werden können, wenn die Reihe eine von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirbare Function darstellt. Es kommt natürlich auch darauf an, wie der Integralbegriff gefasst wird, damit der genannte Satz allgemein aufgestellt werden kann. Für den speciellen Fall einer stetigen Function ist diese Eigenschaft der trigonometrischen Reihe zuerst von Herrn Ascoli gezeigt worden*). Herr P. du Bois-Reymond hat den in Rede stehenden Satz allgemein bewiesen**), unter der Voraussetzung, dass die Function, welche die Reihe darstellt, von $-\pi$ bis $+\pi$ der Riemann'schen Integrabilitätsbedingung genügt, oder dass die Function nur in vereinzelten Punkten unendlich wird, oder in gewissen unendlich vielen Punkten, z. B. solchen, die nur eine endliche Anzahl von Grenzpunkten besitzen. Auf etwas allgemeinere Weise hat Herr Harnack diesen Satz formulirt***). Es beruht aber die Beweisführung von Herrn Harnack, wie indessen mehrfach und von Herrn Harnack selbst bemerkt worden ist†), auf einem nicht in allen Fällen richtigen Theorem.

---

*) Mathematische Annalen, Bd. 6, p. 231.

**) Abhandlungen der bayerischen Academie, II. Cl. XII. Bd. I. Abth. p. 119.

***) Cf. Mathematische Annalen, Bd. XVII, p. 123, Bd. XIX, p. 235 u. p. 524. Ferner Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. S. t. VI.

†) Cf. Harnack: Mathematische Annalen, Bd. XXIII, p. 287 und Scheeffer: Acta Mathematica, 5, 1, p. 68.

Die ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich mit dem Beweis des folgenden von Herrn P. du Bois-Reymond aufgestellten und bewiesenen Satzes, der mit I bezeichnet werden soll:

I. *Ist $F(x)$ eine von a bis b gegebene und stetige reelle Function, und liegt*

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = f(x)$$

von a bis b durchweg zwischen endlichen Grenzen, ist ferner diese Function $f(x)$ integrirbar, so ist

$$F(x) - \int_c^x d\alpha \int_c^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

von a bis b einer linearen Function gleich.

c bedeutet dabei eine zwischen a und b gelegene Constante. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines bekannten von Herrn Schwarz*) bewiesenen Satzes.

Derselbe Satz wird nun hier nachstehend auf einem neuen Wege bewiesen, der durch das Theorem über den zweiten Differenzenquotienten, das hier den Ausgangspunkt bildet, von Interesse sein dürfte. Es wird das Resultat dann ausgedehnt auf den Fall, wo die Function in gewissen in unendlicher Anzahl vorhandenen Punkten unendlich werden kann. Herr Harnack hat mich dazu veranlasst meine Untersuchung, welche in ihrem grösseren Theil schon vor einem Jahr fertig vorlag, in dieser Richtung auszudehnen. Dann folgt die Anwendung auf die trigonometrische Reihe. Den Schluss der Arbeit bildet eine Bemerkung über eine Bedingung, die nothwendig ist für jede Function, wenn sie in irgend einem Intervall durch eine trigonometrische Reihe dargestellt und in diesem Intervall integrirbar ist. Diese Bedingung ist für *stetige* Functionen tautologisch und betrifft den Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - \alpha) \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\}\, d\alpha.$$

Dieser Grenzwerth hat auch für die Fourier'sche Reihe eine Bedeutung, was mit einer Eigenschaft des Poisson'schen Integrals

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{(1-r^2)\, d\alpha}{1 - 2r\cos(x-\alpha) + r^2}$$

an der Grenze $r = 1$ zusammenhängt.

---

*) Journal für Mathematik, Bd. 72, p. 141.

§ 1.

$$\frac{F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

liegt, wenn $F(x)$ stetig ist, zwischen den Grenzen von

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = f(x) \text{ **im Intervall** } a \dots b.$$

Es werde unter $F(x)$ eine für $a \leqq x \leqq b$ eindeutig gegebene, endliche und stetige Function der reellen Variabeln x verstanden. Ferner sei zur Abkürzung

$$\Delta^2 F(x) = F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)$$

gesetzt. Wofern nun der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$$

auch nicht bestimmt ist, so möge doch vorausgesetzt werden, dass für jeden einzelnen Werth x, wofür

$$a < x < b$$

ist, zwei bestimmte endliche Werthe $f_1(x)$ und $f_2(x)$ als *Unbestimmtheitsgrenzen* des genannten limes existiren. Zu dem Ende ist nur nöthig, dass man zu dem bestimmten festen Werth x eine positive Grösse δ so angeben kann, dass

$$\frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} \quad \text{für} \quad 0 < \varepsilon \leqq \delta$$

zwischen endlichen Grenzen bleibt. Bezeichnet man nämlich mit v_δ die obere, mit u_δ die untere Grenze von $\frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$ für $0 < \varepsilon \leqq \delta$, so wird mit abnehmendem δ das v_δ nie zunehmen, und u_δ nie abnehmen, und es werden demnach die Grössen

$$\lim_{\delta=0} v_\delta = f_1(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\delta=0} u_\delta = f_2(x)$$

vollkommen bestimmt sein. Dies sind aber die Grössen, welche Herr P. du Bois-Reymond die Unbestimmtheitsgrenzen nennt*). Man kann auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = f(x)$$

setzen, indem man sich unter $f(x)$ eine Function denkt, die in jedem Punkte x zwischen zwei gegebenen Werthen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ unbestimmt sein soll.

---

*) Analog wie bei den Reihen, vergl. die citirte Abhandlung p. 125.

Es werde jetzt als zweite Voraussetzung eingeführt, dass auch $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bei veränderlichem x zwischen festen endlichen Grenzen bleiben sollen, und es sei V die obere Grenze von $f_1(x)$ und U die untere Grenze von $f_2(x)$ für $a < x < b$. Man kann dann auch V und U die obere, beziehungsweise untere Grenze von $f(x)$ nennen. Der Satz, auf dem alles Folgende beruht, lautet nun dahin, dass unter den gemachten Voraussetzungen stets

$$U \leqq \frac{F(a) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \leqq V$$

ist, wobei die Ungleichungen natürlich im algebraischen Sinn zu nehmen sind. Der Beweis ist einer bekannten Betrachtung von Herrn Schwarz*) nachgebildet:

Man setze

$$\frac{F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = L$$

und

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a}(F(b) - F(a)) + \frac{C}{2}(x-a)(b-x),$$

worin C irgend eine Constante bedeuten soll, die nach Belieben gewählt werden kann. Nun wird

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{8}(C - L),$$

d. h. $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist $\gtreqless 0$, jenachdem $C \gtreqless L$ ist. Denkt man sich zuerst $C > L$ gewählt, so wird die Function $\varphi(x)$ zwischen a und b wirklich einmal positiv. Da aber ausserdem $\varphi(x)$ von a bis b inclusive stetig ist und an den Grenzen den Werth Null hat, so muss nach einem Satz von Herrn Weierstrass mindestens ein Punkt z vorhanden sein, in welchem $\varphi(x)$ ein Maximum hat, und zwar wird in diesem Fall

$$a < z < b$$

sein, wo das Zeichen $<$ im strengen Sinn zu nehmen ist. Es folgt aber aus der Formel für $\varphi(x)$ die Relation

$$\frac{\varphi(z+\varepsilon) - 2\varphi(z) + \varphi(z-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{F(z+\varepsilon) - 2F(z) + F(z-\varepsilon)}{\varepsilon^2} - C.$$

z ist jetzt als fest zu denken. Wegen des Maximums wird die linke Seite der letzten Relation für alle ε von einer gewissen Kleinheit

*) Vergl. Journal für Mathematik, Bd. 72, p. 141.

niemals positiv sein, woraus folgt, dass die Unbestimmtheitsgrenzen der rechten Seite für $\lim\limits_{s=0}$ nicht positiv sind. D. h. also, es ist

$$f_2(s) \leq f_1(s) \leq C.$$

Nun ist U die untere Grenze von $f_2(x)$ für $a < x < b$, also ist auch $U \leqq f_2(s)$ und somit $U \leq C$. Dies kann also bewiesen werden für die *bestimmte* Grösse U und für *jede* Grösse C, die noch wirklich grösser ist als die *bestimmte* Grösse L. Somit ist

$$U \leq L.$$

Ganz in derselben Weise hätte die Annahme $C < L$ durch Betrachtung eines Minimums auf die Ungleichung

$$V \geq L$$

geführt, womit die Behauptung, dass die Relation

$$U \leqq \frac{F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \leqq V$$

stets erfüllt bleibt, erwiesen ist.

§ 2.

$$F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a)$$

wird in eine Doppelsumme verwandelt, in welcher noch eine beliebige ganze Zahl n auftritt. Wenn $f(x)$ der Riemann'schen Bedingung genügt, verwandelt sich diese Doppelsumme für ein unendlich grosses n in ein Integral.

Es möge jetzt das Intervall $a \ldots b$ durch die Theilpunkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ in $2n$ gleiche Theile getheilt werden. Wenn man zur Abkürzung

$$h = a_\nu - a_{\nu-1} = \frac{b-a}{2n}$$

setzt, so hat man die identischen Relationen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} h \frac{F(a_r + h) - 2F(a_r) + F(a_r - h)}{h^2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{F(a_{2n-\nu} + h) - F(a_{2n-\nu}) - F(a_\nu) + F(a_\nu - h)\}$$

$$= F(b) - 2F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(a).$$

Führt man hier die Voraussetzung ein, dass die in § 1 eingeführte

Function $f(x)$ *im Sinne* Riemanns*) integrirbar ist, so wird sich zeigen lassen, dass die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} h \frac{F(a_r+h)-2F(a_r)+F(a_r-h)}{h^2}$$

für ein unendlich grosses n den Grenzwerth

$$\int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} dy \int_{a+y}^{b-y} dx f(x)$$

besitzt, wie im Folgenden näher ausgeführt werden soll. Natürlich ist die Integration als *successiv* aufzufassen.

§ 3.

Strenger Beweis für die Richtigkeit dieses Grenzübergangs.

Ist $\alpha \ldots \beta$ irgend ein Intervall, so bezeichnet man nach Riemann als *Schwankung* von $f(x)$ im Intervall $\alpha \ldots \beta$ die Differenz der oberen und unteren Grenze von $f(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Dabei soll hier an der Voraussetzung festgehalten werden, dass für jeden Punkt zwei Werthe gegeben sind, zwischen denen der Werth von $f(x)$ beliebig ist. Wenn nun die Schwankung in $\alpha \ldots \beta$ mit $\Delta(\beta, \alpha)$ bezeichnet wird, so wird die Riemann'sche Integrationsbedingung so ausgesprochen: Nachdem eine kleine Grösse δ ganz beliebig festgesetzt ist, kann man ε so klein angeben, dass

$$(c_1-a)\,\Delta(c_1, a) + (c_2-c_1)\,\Delta(c_2, c_1) + \cdots + (b-c_s)\,\Delta(b, c_s) < \delta$$

ist für alle Theilungen

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_s < b$$

des Intervalls $a \cdot\cdot b$, für welche sämmtliche Theile

$$c_1 - a, \quad c_2 - c_1, \ \cdot\cdot\ b - c_s$$

kleiner als ε sind. Es soll im Folgenden der Ausdruck *integrirbar* nur in diesem Sinn angewendet werden, wobei ausdrücklich darauf hingewiesen sein mag, dass diese Definition es schon mit sich bringt, dass $f(x)$ zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sein muss. Alle anderen Integrale sind *uneigentliche* Integrale und werden, wo sie vorkommen, besonders definirt werden. Wenn nun für $f(x)$ die genannte Riemann'sche Bedingung im Intervall $a \ldots b$ statthat, so ist bekanntlich $\int_x^y f(\alpha)\, d\alpha$ für $a \leqq x < y \leqq b$ eine vollkommen bestimmte

*) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, § 5.

Grösse*), und es ist

$$\int_{a_r-h}^{a_r} f(x)\,dx = hA,$$

wofern A eine Grösse bedeutet, die nicht grösser ist als die obere und nicht kleiner als die untere Grenze von $f(x)$ für die Bedingung $a_r - h \leqq x \leqq a_r$. Der Ausdruck

$$\frac{F(a_r+h) - 2F(a_r) + F(a_r-h)}{h^2}$$

kann aber nach § 1 nicht über das Intervall hinausfallen, dessen Endpunkte bestimmt sind durch die obere und untere Grenze von $f(x)$ für $a_r - h < x < a_r + h$. Also ist der absolute Betrag

$$\left| h\,\frac{F(a_r+h) - 2F(a_r) + F(a_r-h)}{h^2} - \int_{a_r-h}^{a_r} f(x)\,dx \right| \leqq h\Delta(a_r),$$

wenn mit $\Delta(a_r)$ die Schwankung von $f(x)$ im Intervall $a_r - h \ldots a_r + h$ bezeichnet wird. Man schliesst daraus, dass folgende Beziehung gilt:

$$\left| \sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} h\,\frac{F(a_r+h) - 2F(a_r) + F(a_r-h)}{h^2} - \int_{a_\nu-h}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx \right| \leqq h \sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} \Delta(a_r).$$

Die rechte Seite zerlege man nun in zwei Theile, in

$$\tfrac{1}{2}\sum 2h\Delta(a_s) \text{ und } \tfrac{1}{2}\sum 2h\Delta(a_t),$$

wo s die Werthe $\nu, \nu+2 \ldots, 2n-\nu$, und t die Werthe $\nu+1$, $\nu+3, \ldots . 2n-\nu-1$ durchläuft. Diese Summen sind jetzt von der obigen Form, die in der Riemann'schen Bedingung auftritt; denn die Intervalle, zu denen z. B. die Schwankungen $\Delta(a_s)$ gehören, überdecken sich nirgends und sind von der Länge $2h$. Wenn also δ beliebig klein gewählt, und dann ε der obigen Bedingung gemäss dazu bestimmt ist, so hat man

$$\sum 2h\Delta(a_s) \leqq \delta \text{ und } \sum 2h\Delta(a_t) \leqq \delta,$$

wofern n so gross ist, dass $2h = \frac{b-a}{n} \leqq \varepsilon$ ist. Denn von den letzten Summen, deren Intervalle zusammen nicht immer das ganze Intervall

---

*) Dass die Riemann'sche Bedingung für die Existenz der Summengrenze nothwendig ist, wofern man die Theilung beliebig nehmen und jeden Theil mit einem beliebigen Werth der Function in der Strecke multipliciren darf, ist klar. Dass sie hinreichend ist, ist keineswegs ohne Beweis klar. Vgl. P. du Bois-Reymond: Journal f. Math. Bd. 79, p. 23. und Peano: Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XVIII.

$a \dots b$ ausmachen, gilt a fortiori, dass sie nicht grösser als δ sind. Somit ist

$$\left| \sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} h \frac{F(a_r+h)-2F(a_r)+F(a_r-h)}{h^2} - \int_{a_\nu-h}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx \right| \leqq \delta,$$

und

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} h \frac{F(a_r+h)-2F(a_r)+F(a_r-h)}{h^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu-h}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx \right| \leqq \frac{b-a}{2}\delta,$$

wo δ immer dieselbe Grösse bedeutet. Man wähle also zuerst δ. Dann muss jedenfalls n über einer gewissen Grenze angenommen werden, damit die letzte Relation gilt. Nachher kann man aber eine noch grössere untere Grenze für n bestimmen, so dass

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu-h}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx \text{ sich von } \int_a^{\frac{b+a}{2}} dz \int_z^{b-z+a} f(x)\,dx$$

beliebig wenig unterscheidet. Offenbar ist nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu-h}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu-h}^{a_\nu} f(x)\,dx.$$

a_ν und $a_{2n-\nu}$ stehen beziehungweise von a und b gleich weit ab. Es geht also

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx$$

nach der Definition des Integrals an der Grenze $n=\infty$ in

$$\int_a^{\frac{b+a}{2}} dz \left\{ \int_z^{b-z+a} f(x)\,dx \right\}$$

über; denn $\int_z^{b-z+a} f(x)\,dx$ ist eine stetige Function von z. Der andere Theil

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h \int_{a_\nu-h}^{a_\nu} f(x)\,dx$$

hat aber einen absoluten Betrag, der kleiner ist als $\frac{b-a}{2} \cdot h \cdot G$, wenn

$f(x)$ dem absoluten Betrage nach immer kleiner als G ist. Man erkennt also, dass wirklich gilt:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h\int_{a_\nu-h}^{a_{2n-\nu}} f(x)\,dx = \int_a^{\frac{b+a}{2}} dz\int_z^{b-z+a} f(x)\,dx,$$

und somit auch

$$\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h\sum_{r=\nu}^{r=2n-\nu} h\,\frac{F(a_r+h)-2F(a_r)+F(a_r-h)}{h^2}\right\} = \int_a^{\frac{b+a}{2}} dz\int_z^{b-z+a} f(x)\,dx.$$

§ 4.

Beweis des Fundamentalsatzes, dass $F(x)-\int_c^x d\alpha\int_c^\alpha d\beta\cdot f(\beta)$ eine lineare Function ist.

Setzt man im letzten Integral $y=z-a$, so verwandelt sich dasselbe in das folgende

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} dy\int_{a+y}^{b-y} dx\cdot f(x),$$

und diese Grösse muss nach § 2 dem Ausdruck

$$F(b)-2F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F(a)$$

gleich sein. Es muss also auch die Gleichung

$$F(y)-2F\left(\frac{x+y}{2}\right)+F(x)=\int_0^{\frac{y-x}{2}} d\alpha\int_{x+\alpha}^{y-\alpha} d\beta\cdot f(\beta)$$

für alle x und y, für welche

$$a \leqq x < y \leqq b$$

ist, erfüllt sein. Setzt man nun

$$\Phi(x)=\int_c^x d\alpha\int_c^\alpha d\beta\cdot f(\beta),$$

wo c irgend eine Grösse zwischen a und b bedeutet, die ein für allemal fixirt werden soll, so erhält man

$$\Phi(y)-\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left\{\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\Phi(x)\right\}=\int_{\frac{x+y}{2}}^{y} d\alpha\int_c^\alpha d\beta\cdot f(\beta)-\int_x^{\frac{x+y}{2}} d\alpha\int_c^\alpha d\beta\cdot f(\beta).$$

Durch Einführung der neuen Integrationsvariabeln

$$\alpha' = -\alpha + y,$$
$$\alpha'' = \alpha - x$$

erhält man statt der rechten Seite der letzten Gleichung

$$-\int_{\frac{y-x}{2}}^{0} d\alpha' \int_{c}^{y-\alpha'} d\beta \cdot f(\beta) - \int_{0}^{\frac{y-x}{2}} d\alpha'' \int_{c}^{x+\alpha''} d\beta \cdot f(\beta) = \int_{0}^{\frac{y-x}{2}} d\alpha \int_{x+\alpha}^{y-\alpha} d\beta \cdot f(\beta).$$

Wofern also eine neue Function $\Psi(x)$ durch die Gleichung

$$\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$$

definirt wird, so genügt diese Function der Bedingung, dass

$$\Psi(y) - 2\Psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \Psi(x) = 0$$

ist für alle x und y, für welche $a \leqq x \leqq y \leqq b$ ist. Jede lineare Function genügt gleichfalls dieser Bedingung. Es bestimmt aber diese Functionalgleichung den Werth der Function in der Mitte eines Intervalls aus den Werthen in den Endpunkten. Construirt man also diejenige lineare Function $\varkappa x + \varkappa'$, welche in a und b mit der Function $\Psi(x)$ übereinstimmt, so werden diese beiden Functionen auch in den Punkten

$$a + \frac{m}{2^n}(b - a)$$

übereinstimmen, wo m und n alle positiven ganzen Zahlen bedeuten, für welche $m < 2^n$ ist. Diese Punkte haben die Eigenschaft, dass in jedem im Intervall $a \ldots b$ enthaltenen Theilintervall solche Punkte vorhanden sind. Da die Functionen $\varkappa x + \varkappa'$ und $\Psi(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ endlich, eindeutig und stetig sind, so ist nothwendig, dass die Gleichung

$$\Psi(x) = \varkappa x + \varkappa'$$

für $a \leqq x \leqq b$ erfüllt ist. Es ist also

$$\Psi(x) = F(x) - \int_{c}^{x} d\alpha \int_{c}^{\alpha} d\beta \cdot f(\beta)$$

von a bis b eine lineare Function.

§ 5.

Die Function $f(x)$ wird nicht mehr durchaus endlich vorausgesetzt. Einführung allgemeinerer Integralfunctionen.

Es wird sich jetzt darum handeln, dieses Resultat zu verallgemeinern und es auf die Fälle auszudehnen, in welchen die Function $f(x)$ nicht mehr durchweg zwischen endlichen Grenzen bleibt, aber doch

im uneigentlichen Sinn von einem Integral gesprochen werden kann. Es möge die Function $F(x)$ wieder als endlich, eindeutig und stetig vorausgesetzt werden für alle x, für welche $a \leqq x \leqq b$ ist. Allein der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = f(x)$$

braucht jetzt nicht mehr in allen Stellen x endlich zu sein; oder wenn auch dies der Fall ist, kann doch $f(x)$ in jeder Nähe einer bestimmten Stelle x beliebig grosse Werthe annehmen. Lässt man den Ausdruck zu, dass unter Umständen die Unbestimmtheitsgrenzen von $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$ in einem Punkt x unendlich gross sind (entweder nur eine, oder beide, $+\infty$ und $-\infty$, oder auch beide $+\infty$ u. s. f.), so kann man sich $f(x)$ in jedem Punkt durch zwei äusserste Werthe gegeben denken. Wir werden nun sagen, $f(x)$ sei *in der Umgebung eines bestimmten Punktes* x_0 *integrirbar*, wenn ein endliches Intervall $x_0 - \tau \,..\, x_0 + \tau$ um x_0 so abgegrenzt werden kann, dass die Function $f(x)$ in diesem Intervall im Sinn von § 3 integrirbar ist. Es bringt dies mit sich, dass $f(x)$ nicht nur in jedem Punkt eines kleinen Intervalls $x_0 - \tau \,..\, x_0 + \tau$ endlich ist, sondern auch in einem solchen ganzen Intervall zwischen endlichen Grenzen bleibt. Man sieht nun leicht, dass der folgende Satz gilt:

Eine Function $f(x)$, die in der Umgebung eines jeden Punktes x integrirbar ist, wenn $\alpha < x < \beta$, ist in jedem Intervall $\alpha' \ldots \beta'$ integrirbar, wenn $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

Wofern nämlich x_0 ein bestimmter Punkt im Innern des Intervalls $\alpha \ldots \beta$ ist, so existirt ein Intervall $x_0 - \tau \ldots x_0 + \tau$, in dem $f(x)$ integrirbar ist. Wofern nun die Integrabilitätsbedingung gilt im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \tau$, so gilt sie eben damit im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \tau'$, wo $\tau' < \tau$. Nach einem allgemeinen Grössensatz existirt also eine Grösse τ_1, welche die Eigenschaft hat, dass die Bedingung in jeder Strecke $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \tau'$ gilt, wofern $\tau' < \tau_1$ ist, und welche zugleich die grösste ist, die diese Eigenschaft besitzt. Wäre nun $x_0 + \tau_1 < \alpha$, so könnte man eine Umgebung dieses Punkts $x_0 + \tau_1$ finden, $x_0 + \tau_1 - \varepsilon$ bis $x_0 + \tau_1 + \varepsilon$, in der $f(x)$ integrirbar wäre, und τ_1 könnte nicht der grösste Werth der genannten Eigenschaft sein. Somit ist $x_0 + \tau_1 = \alpha$. Dieselbe Betrachtung kann man auf der andern Seite von x_0 anstellen, woraus der behauptete Satz unmittelbar folgt. Will man die Integrirbarkeit im ganzen Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ selbst behaupten, so muss man noch hinzufügen, dass $f(x)$ in gewissen Intervallen $\alpha \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon$ und $\beta - \varepsilon \leqq x \leqq \beta$ zwischen endlichen Grenzen bleiben soll.

In einem ganz analogen Sinn werden wir auch sonst von der Umgebung eines Punkts reden. Eine Function ist *in der Umgebung*

eines bestimmten Punkts x_0 constant, wenn um diesen Punkt ein Intervall $x_0 - \tau \,..\, x_0 + \tau$ construirt werden kann, in dem die Function constant ist. Man hat dann ganz analog den Satz:

Eine Function $f(x)$, die in der Umgebung eines jeden Punkts x constant ist, für den $\alpha < x < \beta$, ist für alle diese Punkte derselben Constanten gleich. Kommt noch dazu, dass die Function in α und β stetig ist, so ist sie gleich $f(\alpha) = f(\beta)$.

Ebenso gilt ein analoger Satz, wenn eine Function *in der Umgebung eines jeden Punkts eines Intervalls* linear ist.

Es sei nun eine *Reihe*

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ \ldots\ldots$$

von Punkten des Intervalls $a \,..\, b$ gegeben, die Endpunkte mögen in die Reihe aufgenommen sein. Man bezeichne die Gesammtheit der übrigen Punkte des Intervalls $a \,..\, b$ mit T und nehme an, dass $f(x)$ in der Umgebung eines jeden der Punkte T integrirbar sei. Ferner sei eine von a bis b stetige Function $\mathfrak{F}(x)$ gegeben, welche zu $f(x)$ in der Beziehung steht, dass in der Umgebung eines jeden der Punkte T die Differenz

$$\mathfrak{F}(x) - \int_T^x f(x)\,dx$$

constant ist. Eine zweite Function $\overline{\mathfrak{F}}(x)$, welche mit denselben Eigenschaften gegeben wäre, könnte sich von $\mathfrak{F}(x)$ nur um eine von a bis b constante Grösse unterscheiden. Hiezu ist nur zu zeigen, dass folgender Satz gilt:

Wenn eine von a bis b endliche, eindeutige und stetige Function in der Umgebung eines jeden Punktes T constant ist, so ist sie von a bis b constant.

Die Differenz $\mathfrak{F}(x) - \overline{\mathfrak{F}}(x) = \varphi(x)$ wäre ja eine solche Function. Man bezeichne mit ϱ die Punkte, für welche keine Umgebung existirt in der $\varphi(x)$ constant ist, falls überhaupt solche Punkte existiren. Betrachtet man nun einen solchen Punkt ϱ_0, so sind zwei Fälle denkbar. Erstens: es existiren in jeder Nähe dieses Punkts andere Punkte, die auch zu den ϱ gehören. Zweitens: man kann zwei Intervalle $\varrho_0 - \varepsilon \ldots \varrho_0$ und $\varrho_0 \ldots \varrho_0 + \varepsilon$ finden, in deren Innerem kein ϱ liegt. Dann ist aber nach dem zuletzt angeführten Satz $\varphi(x)$ constant von $\varrho_0 - \varepsilon$ bis ϱ_0 und von ϱ_0 bis $\varrho_0 + \varepsilon$, also wegen der Stetigkeit von $\varrho_0 - \varepsilon$ bis $\varrho_0 + \varepsilon$. Dann wäre ϱ_0 kein Punkt ϱ gegen die Voraussetzung. Es ist also nur der erste Fall möglich; d. h. also: jeder Punkt ϱ ist ein *Grenzpunkt* des Systems der Punkte ϱ. Selbstverständlich ist umgekehrt jeder Grenzpunkt der ϱ selbst ein Punkt ϱ. Falls also überhaupt ein Punkt ϱ existirt, gibt es unendlich viele, und diese bilden

eine *perfecte Menge*. Dies widerspricht aber, wie Herr G. Cantor gezeigt hat, der Annahme, dass sie in einer Reihe angeordnet sind*). Man findet also, dass $\varphi(x)$ in der Umgebung eines *jeden* Punkts constant ist. Dann ist aber $\varphi(x)$ von a bis b constant.

§ 6.

Nachweis dafür, dass auch im Falle des vorigen Paragraphen der Fundamentalsatz besteht, falls noch eine Bedingung hinzukommt.

Wir halten an der Bedeutung der Functionen $F(x)$, $f(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ und an deren gegenseitigen Beziehungen fest und fügen die neue Bedingung hinzu, dass

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(e_\nu + \varepsilon) - 2F(e_\nu) + F(e_\nu - \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

ist für $\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots.$ Es lässt sich dann zeigen, dass die Gleichung

$$F(x) - \int_c^x dx\,\mathfrak{F}(x) = \varkappa x + \varkappa'$$

erfüllt ist, wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ Grössen bedeuten, die für das ganze Intervall $a \leq x \leq b$ einen constanten Werth behalten; c ist wieder irgend ein fester Werth zwischen a und b. Die Differenz

$$F(x) - \int_c^x dx\,\mathfrak{F}(x) = \psi(x)$$

ist nämlich in der Umgebung eines jeden Punktes T einer linearen Function gleich, wie man durch Zusammenfassung des in den beiden letzten Paragraphen Gesagten sofort erkennt. Nun ist aber der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(e_\nu)}{\varepsilon} = 0$$

in jedem Punkte e_ν, für $\nu = 1, 2, 3, \ldots.$ Dieselbe Bedingung gilt aber für die Function $\int_c^x dx\,\mathfrak{F}(x)$ in jedem Punkte, da z. B. in e_ν

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_c^{e_\nu+\varepsilon}\mathfrak{F}(x)dx - 2\int_c^{e_\nu}\mathfrak{F}(x)dx + \int_c^{e_\nu-\varepsilon}\mathfrak{F}(x)dx = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_{e_\nu}^{e_\nu+\varepsilon}\mathfrak{F}(x)dx - \int_{e_\nu-\varepsilon}^{e_\nu}\mathfrak{F}(x)dx\right\}\right.$$

---

*) Die ϱ sind nämlich ein Theil der $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots$ Vergl. G. Cantor: Acta Mathematica 4 : 4, p. 381.

nicht grösser ist als die Schwankung der stetigen Function $\mathfrak{F}(x)$ im im Intervall $e_\nu - \varepsilon \ldots e_\nu + \varepsilon$. Somit gilt auch die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \psi(e_\nu)}{\varepsilon} = 0 \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots.$$

Wir werden also unsere Behauptung erwiesen haben, wenn das folgende Theorem dargethan ist:

Wenn eine von a bis b stetige Function $\psi(x)$ in der Umgebung eines jeden Punktes T einer linearen Function gleich ist, und ausserdem die Bedingung gilt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \psi(e_\nu)}{\varepsilon} = 0 \textit{ für } \nu = 1, 2, 3, \cdots,$$

so ist $\psi(x)$ von a bis b derselben linearen Function gleich.

Zum Beweis betrachte man zuerst einen Punkt ϱ, von dem vorausgesetzt werde, dass sich um denselben herum keine Umgebung construiren lässt, in der $\psi(x)$ linear wäre; es muss dann ϱ in der Reihe $e_1, e_2, \ldots$ auftreten. Es sind nun zwei Fälle denkbar:

1) Man kann um ϱ herum eine Umgebung $\varrho - \delta \,.\,.\, \varrho + \delta$ so construiren, dass $\psi(x)$ einer linearen Function gleich ist in der Umgebung eines jeden einzelnen Punkts x, für den $\varrho - \delta \leqq x < \varrho$ oder $\varrho < x \leqq \varrho + \delta$.

2) Es gibt in jeder Nähe von ϱ Punkte, die von ϱ verschieden sind und dieselbe Eigenschaft besitzen wie ϱ selbst.

Im Fall 1) könnte man nun nach § 5 schliessen, dass $\psi(x)$ von $\varrho - \delta$ bis ϱ einer und derselben linearen Function gleich sein müsste, und dasselbe wäre der Fall für das Intervall $\varrho \ldots\ldots \varrho + \delta$. Wenn nun die Gleichungen gelten:

$$\psi(x) = \varkappa x + \varkappa' \text{ für } \varrho - \delta \leqq x < \varrho,$$

und
$$\psi(x) = \bar{\varkappa} x + \bar{\varkappa}' \text{ für } \varrho < x \leqq \varrho + \delta,$$

so müssen wegen der Stetigkeit die Gleichungen auch noch im Punkt ϱ selbst gelten. Man hat also die Gleichung:

$$\varkappa \varrho + \varkappa' = \bar{\varkappa} \varrho + \bar{\varkappa}'.$$

Die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\psi(\varrho + \varepsilon) - 2\psi(\varrho) + \psi(\varrho - \varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

welche gilt, da ϱ zu den e_ν gehört, ergibt aber die Relation:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\bar{\varkappa}(\varrho + \varepsilon) + \bar{\varkappa}' - (\bar{\varkappa}\varrho + \bar{\varkappa}') - (\varkappa\varrho + \varkappa') + \varkappa(\varrho - \varepsilon) + \varkappa'}{\varepsilon} = \bar{\varkappa} - \varkappa = 0.$$

Also ist auch $\varkappa' = \bar{\varkappa}'$, und es wäre $\psi(x)$ von $\varrho - \delta$ bis $\varrho + \delta$ der-

selben linearen Function gleich*); dies widerspricht aber eben der über ϱ gemachten Voraussetzung. Der Fall 1), der hierauf geführt hat, ist also auszuschliessen.

Bezeichnet man somit mit ϱ alle Punkte, in deren Umgebung $\psi(x)$ keiner linearen Function gleichgesetzt werden kann, so müssen alle ϱ in der Reihe

$$e_1,\ e_2,\ e_3\ \ldots.$$

auftreten und können also in der Ordnung, in welcher sie in der letzten Reihe vorkommen, als eine neue Reihe

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots.$$

aufgefasst werden. Nach dem soeben Entwickelten müsste jeder Punkt ϱ ein Grenzpunkt des Punktsystems der ϱ sein, und umgekehrt ist ganz selbstverständlich, dass für einen Grenzpunkt der Punkte ϱ keine Umgebung existiren kann, in welcher $\psi(x)$ einer linearen Function gleich wäre, d. h. dass jeder Grenzpunkt selbst zu den ϱ gehört. Das Punktsystem der ϱ wäre also eine *perfecte Punktmenge*, was wiederum mit der Reihenform

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots.$$

in Widerspruch steht. Es kann also überhaupt keinen Punkt ϱ geben, in dessen Umgebung $\psi(x)$ nicht linear wäre; denn gäbe es einen, so gäbe es unendlich viele, und wir kämen auf den bezeichneten Widerspruch.

Eine stetige Function $\psi(x)$ aber, die in der Umgebung eines jeden Punkts linear ist, ist im ganzen betreffenden Intervall linear, nach § 5. Es ist also die Gleichung

$$F(x) - \int_a^x dx\,\mathfrak{F}(x) = \varkappa x + \varkappa'$$

für $a \leqq x \leqq b$ erfüllt.

§ 7.

Bemerkungen über die in § 5 eingeführten Integralfunctionen.

Es dürfte hier am Platze sein, eine im Vorhergehenden festgehaltene Beschränkung, die überflüssig scheinen könnte, näher zu begründen. An die Definition, welche von der Beziehung der Functionen $f(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ gegeben worden ist, könnte die Frage angeknüpft werden, ob es denn überhaupt nöthig ist, $f(x)$ in gewissen Intervallen im engeren Sinne integrirbar anzunehmen. Es handelt sich nur um solche Intervalle, wie sie im Vorhergehenden als Umgebungen der

*) Diese letzte Schlussweise wurde zuerst von Heine angewandt: Journal für Mathematik, Bd. 71, p. 359.

Punkte T betrachtet worden sind. Nun könnte man die folgende allgemeinere Festsetzung treffen:

Es sei $\mathfrak{F}(x)$ von α bis β stetig, ferner sei z. B. der limes

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathfrak{F}(x)-\mathfrak{F}(x-\varepsilon)}{\varepsilon} = \varphi(x)$$

in jedem einzelnen Punkt x endlich, wenn auch unbestimmt; er hat dann nach § 1 bestimmte Unbestimmtheitsgrenzen. Nun soll die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ im Intervall $\alpha \ldots \beta$ integrirbar sein, und es soll das bestimmte Integral aus dieser Differenz erstreckt über jedes in $\alpha \ldots \beta$ enthaltene Theilintervall den Werth Null haben. Das Wort integrirbar ist immer wieder im engeren Sinn zu nehmen. Da die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ nicht vollkommen bestimmt sind, so setze man fest, dass unter der Differenz eine Function verstanden werden soll, welche beliebig gedacht ist zwischen zwei bestimmten Grenzen, zwischen dem Maximum und Minimum von $z - y$, wo z und y den Bedingungen

$$f_2(x) \leqq z \leqq f_1(x), \quad \varphi_2(x) \leqq y \leqq \varphi_1(x)$$

genügen. Dabei sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die äussersten für $f(x)$ in x gegebenen Werthe, und $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ die Unbestimmtheitsgrenzen von

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathfrak{F}(x)-\mathfrak{F}(x-\varepsilon)}{\varepsilon};$$

dies alles bei festgedachtem x.

Eine solche Festsetzung reicht hier nicht aus. Zunächst mag daran erinnert werden, dass die Beweisführung des § 3 wesentlich auf der Voraussetzung beruhte, dass dort $f(x)$ der Riemann'schen Bedingung genügte. Man könnte nun setzen

$$F(x) - \int_c^x \mathfrak{F}(x)\,dx = \psi(x)$$

und daraus schliessen wollen, dass die Function

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \psi(x)}{\varepsilon^2}$$

integrirbar sei, und dass dieselbe integrirt über jedes Intervall den Werth Null gebe. Dies ist aber ein unrichtiger Schluss. Es ist nämlich für ein bestimmtes x, welches x_0 genannt werden soll:

$$\Delta^2 \psi(x_0) = \Delta^2 F(x_0) - \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \mathfrak{F}(\alpha)\,d\alpha + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \mathfrak{F}(\alpha)\,d\alpha.$$

Der Definition gemäss ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x_0)}{\varepsilon^2} = f(x_0).$$

Um den andern Theil zu schätzen, setze man

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \mathfrak{F}(\alpha)\,d\alpha - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \mathfrak{F}(\alpha)\,d\alpha = \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \left\{\mathfrak{F}(\alpha) - \mathfrak{F}(\alpha-\varepsilon)\right\} d\alpha.$$

Nun liegt allerdings die Grösse

$$\mathfrak{F}(\alpha) - \mathfrak{F}(\alpha - \varepsilon)$$

unter dem letzten Integral zwischen den äussersten Grenzen von

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathfrak{F}(x) - \mathfrak{F}(x-\varepsilon)}{\varepsilon} = \varphi(x),$$

wofern man sich x als im Intervall $\alpha \ldots \alpha - \varepsilon$ beliebig denkt. Es folgt aber daraus nur, dass die Grösse

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \left\{\mathfrak{F}(\alpha) - \mathfrak{F}(\alpha-\varepsilon)\right\} d\alpha$$

zwischen denjenigen Grenzen enthalten ist, zwischen denen $\varphi(x)$ liegt für $x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon$, dass also

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \left\{\mathfrak{F}(\alpha) - \mathfrak{F}(\alpha-\varepsilon)\right\} d\alpha$$

jedenfalls zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen von

$$\lim_{x=x_0} \varphi(x) = \lim_{x=x_0}\left(\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathfrak{F}(x) - \mathfrak{F}(x-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

liegt. Es ist somit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \psi(x_0)}{\varepsilon^2}$$

in dem oben angegebenen Sinn in der Differenz

$$f(x_0) - \lim_{x=x_0} \varphi(x),$$

aber nicht nothwendig in der Differenz

$$f(x_0) - \varphi(x_0)$$

enthalten. Aber die Annahme, dass die Function

$$f(x) - \lim_{y=x} \varphi(y)$$

integrirbar sein und über jedes Intervall ein Integral gleich Null ergeben soll, würde die Integrirbarkeit von $\varphi(x)$ selbst und somit auch die von $f(x)$ mit sich bringen.

§ 8.

Die trigonometrische Reihe und der Satz über das Verschwinden der Coefficienten mit unendlich grossem Stellenzeiger.

Der Satz, der in den vorangehenden Paragraphen ausführlich behandelt worden ist, bildet die hauptsächlichste Schwierigkeit bei dem

Beweis dafür, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe unter noch näher anzugebenden Bedingungen in die Fourier'sche Form gebracht werden können. Da nur in diesem Theil des Beweises ein neuer Weg beabsichtigt war, so genügt es, das Weitere anzudeuten.

Setzt man den Werth der beliebigen trigonometrischen Reihe gleich einer Function $f(x)$,

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}[a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)] = f(x),$$

so heisst dies, dass die Function $f(x)$ in jedem *einzelnen* Punkt x durch die beiden Unbestimmtheitsgrenzen von

$$\lim_{n=\infty}\left\{a_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\{a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\}\right. \text{ — bei festem } x \text{ —}$$

gegeben sein soll. Wenn nun $f(x)$ in einem Intervall *integrirbar* ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0.$$

Herr G. Cantor hat nämlich gezeigt*), dass die Coefficienten einer trigonometrischen Reihe zuletzt unendlich klein werden, wenn die Reihe in jedem Punkt eines Intervalls convergirt. Herr Harnack hat diesen Satz dahin verallgemeinert**), dass

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0$$

ist, wenn man zu jeder Grösse δ ein Intervall finden kann, für welches in jedem Punkt das *Divergenzmass* der Reihe $< \delta$ ist. Das Divergenzmass im Punkt x ist die Differenz der Unbestimmtheitsgrenzen der Reihe in x, also die Differenz der beiden äussersten Werthe von $f(x)$ in x. Wenn nun $f(x)$ in einem Intervall integrirbar ist, so ist leicht zu sehen, dass man zu jeder Grösse δ ein Intervall $z - \varepsilon \ldots z + \varepsilon$ finden kann, so dass das Divergenzmass $< \delta$ ist in jedem Punkt dieses Intervalls. Es möge gestattet sein, den in Rede stehenden Beweis seinem allgemeinen Gedankengange nach zu reproduciren: Offenbar ist nun auch

$$\lim_{n=\infty} | a_n \cos n(z+\alpha) + b_n \sin n(z+\alpha) | < \delta,$$
$$\lim_{n=\infty} | a_n \cos n(z-\alpha) + b_n \sin n(z-\alpha) | < \delta$$

für jeden einzelnen Werth α, für welchen $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ ist. Dabei brauchen die genannten Grenzwerthe natürlich nicht nothwendig bestimmt zu

*) Journal für Mathematik, Bd. 72, p. 130.

**) Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. S. t. VI.

sein. Nimmt man die Summe und die Differenz der beiden letzten Ausdrücke, so erhält man

$$\lim_{n=\infty} |(a_n \cos nz + b_n \sin nz) \cos n\alpha| < \delta$$

und

$$\lim_{n=\infty} |(a_n \sin nz - b_n \cos nz) \sin n\alpha| < \delta.$$

Multiplicirt man nun von den beiden letzten Ausdrücken den ersten mit $\cos nz \sin n\alpha$, den zweiten mit $\sin nz \cos n\alpha$, so ergibt sich durch Addition, dass

$$\lim_{n=\infty} |a_n \sin(2n\alpha)| < 4\delta \quad \text{für } 0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon.$$

Auf vollkommen entsprechendem Wege findet man die Relation

$$\lim_{n=\infty} |b_n \sin(2n\alpha)| < 4\delta.$$

Nun ist es aber nicht richtig, hieraus direct zu schliessen, dass

$$\lim_{n=\infty} |a_n \sin(2n\alpha)| = \lim_{n=\infty} |b_n \sin(2n\alpha)| = 0$$

ist für jedes einzelne α einer gewissen Strecke. Was bis jetzt gezeigt ist, ist nur das Folgende: Nachdem man eine gewisse Grösse δ willkürlich gewählt hat, kann stets eine gleichfalls positive Grösse ε so bestimmt werden, dass

$$\lim_{n=\infty} |a_n \sin(2n\alpha)| < 4\delta \text{ und } \lim_{n=\infty} |b_n \sin(2n\alpha)| < 4\delta$$

für jedes einzelne α, für welches $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ ist. Wählt man δ kleiner und kleiner, so wäre es doch denkbar, dass dementsprechend auch ε immer kleiner angenommen werden müsste.

Es wird nun an der angeführten Stelle weiter so geschlossen: Wäre nicht $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, so könnte eine positive Grösse δ' gefunden werden und dazu eine *unendliche*, aus den $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ausgehobene Reihe

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\ldots$$

von der Beschaffenheit, dass alle absoluten Beträge $|a_{n_1}|, |a_{n_2}|, \ldots$ grösser als δ' wären. Eine Grösse $\delta'' < \delta'$ wird nun gewählt und festgehalten. Es wird alsdann mittelst des Verfahrens von Herrn G. Cantor in einem beliebig klein gewählten Intervall $0 \ldots \varrho$ eine positive Grösse β construirt, für welche die Glieder der Reihe

$$\sin(n_1'\beta), \quad \sin(n_2'\beta), \quad \sin(n_3'\beta), \ldots$$

sämmtlich grösser als $\frac{\delta''}{\delta'}$ sind. Dabei ist

$$n_1', n_2', n_3', \ldots\ldots$$

eine nach einem bestimmten Gesetz aus der Reihe

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots$$

ausgehobene *nicht abbrechende* Reihe. Es wären also in der Reihe

$$a_{n_1'} \sin(n_1'\beta),\ a_{n_2'} \sin(n_2'\beta),\ a_{n_3'} \sin(n_3'\beta), \ldots$$

alle Glieder $> \delta''$, und somit die obere Unbestimmtheitsgrenze von

$$\lim_{n=\infty} | a_n \sin(n\beta) |$$

jedenfalls $\geqq \delta''$. Dies widerspricht aber dem früher Gefundenen. Denn nimmt man die willkürliche Grösse δ so an, dass 4δ kleiner ist als der feste Werth δ'', so muss nach dem Früheren zu δ eine Grösse ε gehören, so dass die Relation

$$\lim_{n=\infty} | a_n \sin(2n\alpha) | < 4\delta < \delta''$$

für jedes α erfüllt ist, wofür $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ ist; und nun kann in einem Intervall $0 \ldots \varrho$, das kleiner ist als 2ε, jedenfalls keine Grösse β gefunden werden, welche die Eigenschaft hat, dass $\lim\limits_{n=\infty} | a_n \sin n\beta | \geqq \delta''$ ist. Also ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, und ebenso $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$.

§ 9.

Anwendung des Fundamentalsatzes auf die trigonometrische Reihe; Ansatz zur Coefficientenbestimmung.

Es sei nun wieder eine *Reihe*

$$e_1, e_2, e_3, \ldots$$

von Punkten in dem Intervall $-\pi \ldots +\pi$ gegeben, und man bezeichne die andern Punkte des Intervalls $-\pi \ldots +\pi$ mit T. Von der Function

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\}$$

setze man voraus, dass sie in der Umgebung eines jeden Punktes T integrirbar sei. Ausserdem soll eine gegebene Function $\mathfrak{F}(x)$ von $-\pi \ldots +\pi$ endlich, eindeutig und stetig sein und zu $f(x)$ in der im § 5 näher bezeichneten Beziehung eines uneigentlichen Integrals stehen. Nun definirt man mit Riemann eine neue Function $F(x)$ durch die Gleichung

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 x^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu \cos(\nu x) + \beta_\nu \sin(\nu x)}{\nu^2}.$$

Weil die Relationen gelten

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0,$$

so können die bekannten Sätze*) von Riemann zur Anwendung

*) Riemann's Werke p. 232 ff.

kommen. $F(x)$ ist eine stetige Function, und es ist der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

für jeden einzelnen Werth von x; in jedem Punkt, in welchem die trigonometrische Reihe convergirt — solche Punkte giebt es unter den gemachten Voraussetzungen in jedem Intervall — ist auch der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

endlich und bestimmt und zwar gleich $f(x)$. Diesen letzten Satz hat Herr P. du Bois-Reymond folgendermassen verallgemeinert*): Wenn die Reihe an einer bestimmten Stelle zwar nicht convergirt, aber doch zwischen endlichen Grenzen schwankt, und die Unbestimmtheitsgrenzen derselben mit $V(x)$ und $U(x)$ bezeichnet werden, so ist die Grösse

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

auch endlich und jedenfalls in dem Intervall

$$\frac{V(x)+U(x)}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)[V(x) - U(x)]$$

$$\ldots\ldots \frac{V(x)+U(x)}{2} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)[V(x) - U(x)]$$

enthalten. Es erhellt daraus sofort, dass in einem Intervall, in welchem $f(x)$ integrirbar ist, auch die durch die Unbestimmtheitsgrenzen von $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$ definirte Function integrirbar ist**), und dass beide Functionen zwischen denselben Grenzen dasselbe Integral geben. Man schliesst nun aus dem Resultat von § 6, dass auch hier die Relation gelten muss

$$F(x) - \int_c^x \mathfrak{F}(x)\,dx = \varkappa x + \varkappa',$$

wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ constant sind für $-\pi \leqq x \leqq +\pi$. Dabei ist c irgend eine zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Constante. Die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ sind nun auch ausserhalb des Intervalls $-\pi \ldots +\pi$ definirt; sie wiederholen sich periodisch. Definirt man auch $\mathfrak{F}(x)$ für alle reellen Werthe von x durch die Bestimmung, dass

$$\mathfrak{F}(x + 2m\pi) = \mathfrak{F}(x) + m\,(\mathfrak{F}(\pi) - \mathfrak{F}(-\pi))$$

*) In der citirten Abhandlung der bayr. Akd. p. 133.

**) In den 7 ersten Paragraphen war $f(x)$ durch $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$ definirt; hier bedeutet $f(x)$ die Function, welche durch die Reihe definirt wird.

sein soll für alle ganzen positiven und negativen m, so ist $\mathfrak{F}(x)$ durchaus stetig und $F(x)$, $f(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ stehen nun in jedem noch so grossen Intervall in derselben Beziehung wie vorhin im Intervall $-\pi \ldots +\pi$. Die Gleichung

$$F(x) - \int_c^x \mathfrak{F}(x)\,dx = \varkappa x + \varkappa'$$

gilt also bei denselben $\varkappa$ und $\varkappa'$ für alle reellen Werthe von x, woraus auch hervorgeht, dass die Function

$$\int_c^x \mathfrak{F}(x)\,dx + \varkappa x + \varkappa' - \frac{1}{2} a_0 x^2 = F(x) - \frac{1}{2} a_0 x^2$$

die Periode 2π besitzt. Dasselbe gilt also auch von ihrem Differentialquotienten:

$$\mathfrak{F}(x) + \varkappa - a_0 x.$$

Setzt man nun hierin einmal $x = +\pi$ und einmal $x = -\pi$, so gibt die Vergleichung sofort

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\mathfrak{F}(\pi) - \mathfrak{F}(-\pi)\right\}.$$

Aus der Reihe für $F(x)$ erhält man auf die bekannte Weise die Relationen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{F(x) - \frac{1}{2} a_0 x^2\right\} \cos nx\,dx = -\frac{a_n}{n^2}\pi$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{F(x) - \frac{1}{2} a_0 x^2\right\} \sin nx\,dx = -\frac{b_n}{n^2}\pi,$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Man ersetzt nun in den letzten Formeln $F(x)$ durch $\int_c^x \mathfrak{F}(x)dx + \varkappa x + \varkappa'$ und integrirt partiell, indem man in der allgemeinen Formel

$$\int_a^b U \frac{dV}{dx}\,dx = (UV)_a^b - \int_a^b V \frac{dU}{dx}\,dx$$

die Function

$$U = F(x) - \frac{1}{2} a_0 x^2 = \int_c^x \mathfrak{F}(x)dx + \varkappa x + \varkappa' - \frac{1}{2} a_0 x^2$$

setzt. Man darf ohne Weiteres partiell integriren, da $\mathfrak{F}(x)$ stetig ist, und die Glieder, welche vor das Integralzeichen treten müssten, heben

sich weg wegen der Periodicität von U und von V. Man hat dann nach der partiellen Integration die neuen Relationen

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\{\mathfrak{F}(x) + \varkappa - a_0 x\} \sin nx\,dx = \frac{a_n}{n}\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\{\mathfrak{F}(x) + \varkappa - a_0 x\} \cos nx\,dx = -\frac{b_n}{n}\pi.$$

§ 10.

Weitere Bemerkungen über Integrale.

Ehe noch einmal partiell integrirt wird, muss eine Bemerkung eingeschaltet werden. $\mathfrak{F}(x)$ ist kein Integral von $f(x)$ im gewöhnlichen, eigentlichen Sinn. Das Produkt zweier im engeren Sinn integrirbaren Functionen ist stets auch selbst integrirbar. Hier aber tritt die Frage auf, ob, wenn $f(x)$ eine uneigentliche Integralfunction $\mathfrak{F}(x)$ besitzt, dasselbe auch von $f(x)\sin nx$ und $f(x)\cos nx$ gesagt werden kann. Hat man z. B. zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, von denen die eine $\varphi(x)$ im ganzen Intervall $a \dots b$ eigentlich integrirbar vorausgesetzt werde, und gilt von der anderen dasselbe in den Intervallen $a \dots x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon \dots b$ bei beliebig kleinem ε, so handelt es sich um die Existenz der Grenzen

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{x_0-\varepsilon}\varphi(x)\psi(x)\,dx \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon=0}\int_{x_0+\varepsilon}^{b}\varphi(x)\psi(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, dass die Grössen

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{x_0-\varepsilon}\psi(x)\,dx \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon=0}\int_{x_0+\varepsilon}^{b}\psi(x)\,dx$$

endlich und bestimmt sind. Wofern nun die beiden letzten Integrale *absolut* convergiren, ist es erlaubt auf die Convergenz der beiden ersten zu schliessen. Wenn aber nur *bedingte* Convergenz statthat, ist dies nicht immer richtig, wovon man sich sehr leicht überzeugt. Fügt man aber die Bedingung hinzu, dass $\varphi(x)$ in zwei kleinen Intervallen $x_0 - \alpha \dots x_0$ und $x_0 \dots x_0 + \alpha$ entweder nicht abnimmt, oder nicht zunimmt, so bleibt die Behauptung richtig, und man kann die Convergenz von

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{x_0-\varepsilon}\varphi(x)\psi(x)\,dx \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon=0}\int_{x_0+\varepsilon}^{b}\varphi(x)\psi(x)\,dx$$

mit Hilfe des *zweiten* Mittelwerthsatzes beweisen. Im vorliegenden

Fall ist $\varphi(x) = \cos nx$ oder $= \sin nx$, die Bedingung ist also erfüllt. Wenn somit für $f(x)$ nur einzelne Punkte in endlicher Anzahl auszuschliessen sind, in deren Umgebung $f(x)$ nicht integrirbar ist, so darf man von der Function $\mathfrak{F}(x)$ auf das Vorhandensein eines uneigentlichen Integrals von $f(x)\cos nx$ schliessen. Man kann nun auch auf den Fall übergehen, wo diese singulären Punkte in unendlicher Anzahl vorhanden sind, sich aber nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich verdichten. Auf diesem Weg könnte man noch weiter gehen*). Bei den *allgemeinen* Voraussetzungen, die hier über $f(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ gemacht worden sind, muss noch ausdrücklich eine Reihe

$$\mathfrak{C}_1(x),\ \mathfrak{C}_2(x),\ \mathfrak{C}_3(x),\ \ldots,$$
$$\mathfrak{S}_1(x),\ \mathfrak{S}_2(x),\ \mathfrak{S}_3(x),\ \ldots$$

von Functionen als gegeben vorausgesetzt werden, welche beziehungsweise für

$$f(x)\cos x,\quad f(x)\cos(2x),\quad f(x)\cos(3x),\ \ldots,$$
$$f(x)\sin x,\quad f(x)\sin(2x),\quad f(x)\sin(3x),\ \ldots$$

dieselbe Bedeutung haben, wie $\mathfrak{F}(x)$ für $f(x)$.

§ 11.

Durchführung der Coefficientenbestimmung.

Man geht nun zurück zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\mathfrak{F}(x) - a_0 x\}\sin nx\,dx &= \frac{a_n}{n}\pi,\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\{\mathfrak{F}(x) - a_0 x\}\cos nx\,dx &= -\frac{b_n}{n}\pi\end{aligned}\right\}\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

am Schlusse von § 9. Die Constante $\varkappa$ ist weggelassen, da man weiss, dass

---

*) Es ist zu bemerken, dass in diesen Fällen wohl die Convergenz von

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

erwiesen werden kann, aber *nicht* — im Fall bedingter Convergenz — die Relation

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\, dx = 0$$

ist. Es ist wieder zu bemerken, dass die Function

$$\mathfrak{F}(x) - a_0 x = -\varkappa + \frac{d}{dx}\left\{F(x) - \frac{1}{2} a_0 x^2\right\}$$

die Periode 2π hat. In einem Intervall $a \dots b$ nun, in welchem $f(x)$ im engeren Sinn des Worts integrirbar ist, gilt jedenfalls*) die Gleichung

$$(\dagger) \qquad \int_a^b \{\mathfrak{F}(x) - a_0 x\} \sin nx\, dx$$

$$= -\left(\mathfrak{F}(x) - a_0 x\right)\frac{\cos nx}{n}\Big)_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \{f(x) - a_0\} \cos nx\, dx.$$

Definirt man jetzt eine Function $\varphi(x)$ durch die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{x} \{\mathfrak{F}(x) - a_0 x\} \sin nx\, dx$$

$$= -\left((\mathfrak{F}(x) - a_0 x)\frac{\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{x} + \frac{1}{n}\{\mathfrak{C}_n(x) - \mathfrak{C}_n(-\pi)\}$$

$$-\frac{a_0}{n}\int_{-\pi}^{x} \cos nx\, dx + \varphi(x),$$

so ist $\varphi(x)$ von $-\pi$ bis $+\pi$ endlich, eindeutig und stetig, und es ist $\varphi(-\pi) = 0$. Dabei bedeutet $\mathfrak{C}_n(x)$ die erwähnte Function, das uneigentliche Integral von $f(x) \cos nx$. Bedenkt man noch, dass in einem Intervall $a \dots b$, in welchem $f(x)$ eigentlich integrirbar ist, die Gleichung

$$\mathfrak{C}_n(b) - \mathfrak{C}_n(a) = \int_a^b f(x) \cos nx\, dx$$

gilt, so erkennt man aus der zwischen den Grenzen a und b giltigen Integralformel($\dagger$), dass in einem solchen Intervall $\varphi(x)$ sich nicht ändert. $\varphi(x)$ ist also constant in der Umgebung eines jeden der früher mit T bezeichneten Punkte. Somit ist nach § 5 die Function $\varphi(x)$ von $-\pi$ bis $+\pi$ constant und somit gleich $\varphi(-\pi) = 0$. Für $x = +\pi$ ergiebt sich, dass

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{\mathfrak{F}(x) - a_0 x\} \sin nx\, dx = \frac{1}{n}\{\mathfrak{C}_n(\pi) - \mathfrak{C}_n(-\pi)\};$$

*) Vergl. P. du Bois-Reymond, in der mehrfach citirten Arbeit, p. 129.

das erste Glied rechts hebt sich weg wegen der Periodicität. Man erhält also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{\mathfrak{C}_n(\pi) - \mathfrak{C}_n(-\pi)\right\},$$

und ebenso

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{\mathfrak{S}_n(\pi) - \mathfrak{S}_n(-\pi)\right\}.$$

Die Grösse

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{\mathfrak{F}(\pi) - \mathfrak{F}(-\pi)\right\}$$

war schon früher bestimmt.

Es kann also jetzt der P. du Bois-Reymond'sche Satz folgendermassen gefasst werden:

Es sei eine Reihe $e_1, e_2, e_3, \ldots$ von Punkten im Intervall $-\pi \ldots +\pi$ gegeben, und es werden die andern Punkte dieses Intervalls mit T bezeichnet. Ferner sei die Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x\right\}$$

in der Umgebung eines jeden Punktes T integrirbar. Wofern nun noch eine Folge von Functionen

$$\mathfrak{F}(x),\ \mathfrak{C}_1(x),\ \mathfrak{C}_2(x),\ \mathfrak{C}_3(x),\ \ldots,$$
$$\mathfrak{S}_1(x),\ \mathfrak{S}_2(x),\ \mathfrak{S}_3(x),\ \ldots$$

gegeben ist, die von $-\pi$ bis $+\pi$ endlich, eindeutig und stetig sind und in dem bezeichneten Sinn als Integralfunctionen beziehungsweise von

$$f(x),\ f(x)\cos x,\ f(x)\cos 2x,\ f(x)\cos 3x,\ \ldots,$$
$$f(x)\sin x,\ f(x)\sin 2x,\ f(x)\sin 3x,\ \ldots$$

gelten können, so gelten die Relationen:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{\mathfrak{F}(\pi) - \mathfrak{F}(-\pi)\right\},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{\mathfrak{C}_n(\pi) - \mathfrak{C}_n(-\pi)\right\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{\mathfrak{S}_n(\pi) - \mathfrak{S}_n(-\pi)\right\}$$

für

$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für den Beweis war die Voraussetzung wesentlich, dass die $e_1, e_2, e_3, \ldots$ in Reihenform gegeben waren. Wie man jetzt weiss*), giebt es Punktsysteme, die in eine endliche Zahl von Intervallen mit beliebig kleiner Intervallsumme eingeschlossen werden können, und

*) Vergl. G. Cantor: Acta Mathematica, 4, 4, p. 390.

deren Punkte nicht sämmtlich in eine Reihe geordnet werden können. Andererseits aber scheint die blosse Bedingung der Reihenform für das System $e_1, e_2, \ldots$ auch zugleich weiter zu sein als die andere Bedingung. Es ist aber dies im vorliegenden Fall nur scheinbar. Die $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sind eben diejenigen Punkte, von denen man nicht weiss, ob die Function in ihrer Umgebung integrirbar ist. Nennt man singuläre Punkte solche, um welche herum keine Umgebung construirt werden kann, in welcher die Function integrirbar ist, so können die singulären Punkte, welche einen Theil der $e_1, e_2, \ldots$ bilden, auch in einer Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ angeordnet werden. Ein Grenzpunkt der Punkte ϱ ist aber sicher ein singulärer Punkt, muss also selbst in der Reihe vorkommen. Eine Reihe solcher Punkte aber hat nach einem Satz von Herrn G. Cantor*) die Eigenschaft, in eine endliche Zahl von Intervallen mit beliebig kleiner Intervallsumme eingeschlossen werden zu können. Die Functionen, deren — in diesem Sinn — singuläre Punkte in eine Reihe geordnet werden können, sind also unter denen begriffen, deren singuläre Punkte der andern Bedingung genügen.

§ 12.

Ueber eine nothwendige Functionalbedingung. Das Verhalten einer beliebigen trigonometrischen Reihe an einer Sprungstelle, in der sie convergirt.

Aus den vorstehenden Entwicklungen ergiebt sich leicht eine Eigenschaft der trigonometrischen Reihe. Wird nämlich jetzt von der Function

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \{a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\}$$

nur vorausgesetzt, dass sie in einem Intervall integrirbar ist, so ist in diesem Intervall die Gleichung

$$F(x) = \int_c^x d\alpha \int_c^\alpha d\beta\, f(\beta) + \varkappa x + \varkappa'$$

erfüllt, und also auch

$$\frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 \int_c^x d\alpha \int_c^\alpha d\beta\, f(\beta)}{\varepsilon^2},$$

indem man durchaus an den Bezeichnungen von § 9 festhält. Vorausgesetzt nun, dass im Innern des Intervalls die Reihe für einen bestimmten Punkt x convergirt, ist der Grenzwerth

*) Mathematische Annalen, Bd. XXI, p. 54.

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(z)}{\varepsilon^2}$$

endlich und bestimmt und gleich $f(z)$, wie Riemann gezeigt hat. Somit ist auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \int\limits_c^z d\alpha \int\limits_c^\alpha d\beta\, f(\beta)}{\varepsilon^2} = f(z),$$

welche Gleichung für stetige Functionen eine Identität ist, aber nicht für jede integrirbare Function erfüllt ist. Durch die in § 4 an $\Phi(y) - 2\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \Phi(x)$ gemachte Umformung ersieht man, dass die Relation gilt

$$\Delta^2 \int\limits_c^z d\alpha \int\limits_c^\alpha d\beta\, f(\beta) = \int\limits_0^\varepsilon d\alpha \int\limits_{z-\varepsilon+\alpha}^{z+\varepsilon-\alpha} d\beta\, f(\beta) = \int\limits_0^\varepsilon d\alpha \int\limits_0^{\varepsilon-\alpha} \{f(z+\beta) + f(z-\beta)\}\, d\beta.$$

Durch Einführung der neuen Variabeln $\alpha' = \varepsilon - \alpha$ verwandelt sich dies in den Ausdruck:

$$\int\limits_0^\varepsilon d\alpha' \int\limits_0^{\alpha'} d\beta \{f(z+\beta) + f(z-\beta)\} = \int\limits_0^\varepsilon (\varepsilon - \alpha')\{f(z+\alpha') + f(z-\alpha')\}\, d\alpha'.$$

Es gelten diese Umformungen für integrirbare Functionen.

Man hat also den Satz:

Wenn eine trigonometrische Reihe in einem bestimmten Intervall eine integrirbare Function $f(x)$ ergiebt, und z ist ein bestimmter Punkt im Innern des Intervalls, für den die Reihe convergirt, so ist auch der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_0^\varepsilon (\varepsilon - \alpha)\{f(z+\alpha) + f(z-\alpha)\}\, d\alpha$$

bestimmt und zwar gleich dem Werth, gegen den die Reihe im Punkt z selbst convergirt.

Diese Bedingung, welche bis jetzt nicht bemerkt worden zu sein scheint, ist darum merkwürdig, weil sie *nothwendig* ist. Es steht also der Werth der Reihe in einem Punkt z in einer Beziehung zu den Werthen an den Nachbarstellen. In den speciellen Fällen, in welchen die Grössen, welche nach Dirichlet mit $f(z+0)$ und $f(z-0)$ bezeichnet werden, vorhanden sind, ergiebt der letzte Satz die Gleichung

$$f(z) = \frac{f(z+0) + f(z-0)}{2}.$$

Dieses Verhalten ist bekannt genug, aber nur für solche Fälle bewiesen*), wo die Reihe in die Fourier'sche Form gebracht werden kann. Hier wurde nur die Integrirbarkeit der Reihe in einem kleinen Intervall um z herum vorausgesetzt. Es kommt aber in der That die erwähnte Eigenschaft an einer *solchen* Sprungstelle *allen* trigonometrischen Reihen zu. Zum Beweis setze man wieder

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\}\cdot$$

Die vorausgesetzte Eigenschaft der Reihe, in z eine *Sprungstelle* zu haben und in dieser Stelle ausserdem zu *convergiren*, drückt sich darin aus, dass die Grössen

$$f(z),\quad \lim_{\varepsilon=0} f(z+\varepsilon),\quad \lim_{\varepsilon=0} f(z-\varepsilon)$$

endlich und bestimmt sind. Nun bringt dies offenbar mit sich, dass $f(x)$ in einem den Punkt z umgebenden Intervall zwischen endlichen Grenzen bleibt. Es braucht aber die Reihe für keinen von z verschiedenen Punkt zu convergiren, es müssen nur die Unbestimmtheitsgrenzen einander und dem Werth $f(z-0)$ immer näher rücken, wenn $z-x$ positiv kleiner und kleiner wird, und entsprechend auf der andern Seite von z. Man kann also zu jeder Grösse δ ein Intervall finden, in welchem das Divergenzmass für jeden einzelnen Punkt $< \delta$ ist. Dies und nur dies wurde aber bei dem Beweis dafür, dass

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0$$

ist, verwendet. Man kann also den Riemann'schen Satz anwenden. Nun ist, wenn

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 x^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \{a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\}$$

gesetzt wird, folgende Gleichung erfüllt:

$$\lim_{\varepsilon=0} \left\{4\, \frac{F(z+2\varepsilon)-2F(z)+F(z-2\varepsilon)}{4\varepsilon^2} - 2\, \frac{F(z+\varepsilon)-2F(z)+F(z-\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right\}$$
$$= 4f(z) - 2f(z) = 2f(z).$$

Die Grösse unter dem Zeichen limes erhält aber bei anderer Anordnung die Form

$$\frac{F(z+2\varepsilon)-2F(z+\varepsilon)+F(z)}{\varepsilon^2} + \frac{F(z)-2F(z-\varepsilon)+F(z-2\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

Die Grösse

---

*) Cf. Ascoli: Mathematische Annalen, Bd. VI, p. 239 und Prym: Journal für Mathematik, Bd. 73, p. 357.

$$\frac{F(z+2\varepsilon)-2F(z+\varepsilon)+F(z)}{\varepsilon^2}$$

liegt nun nach § 1 zwischen den äussersten Grenzen von

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha^2} \quad \text{für} \quad z<x<z+2\varepsilon.$$

Nach der in § 8 erwähnten, von Herrn P. du Bois-Reymond gegebenen Verallgemeinerung des Riemann'schen Satzes besteht aber zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen von

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

und den äussersten Werthen von $f(x)$ in demselben festen Punkt x eine Beziehung. Weil nun

$$\lim_{\beta=0} f(z+\beta)=f(z+0)$$

ist, so lässt diese Beziehung auch erkennen, dass zu jeder Grösse δ eine Grösse ε so bestimmt werden kann, dass die Beziehung

$$f(z+0)-\delta<\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha^2}<f(z+0)+\delta$$

für jedes einzelne x gilt, für welches $z<x\leqq z+2\varepsilon$ ist. Und nun folgt die Relation

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{F(z+2\varepsilon)-2F(z+\varepsilon)+F(z)}{\varepsilon^2}=f(z+0).$$

Es ist aber zu bemerken, dass ohne den Satz des § 1 dieser Schluss keine bindende Kraft hätte. Ebenso ist auch

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{F(z)-2F(z-\varepsilon)+F(z-2\varepsilon)}{\varepsilon^2}=f(z-0).$$

Es ist damit der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{\frac{F(z+2\varepsilon)-2F(z+\varepsilon)+F(z)}{\varepsilon^2}+\frac{F(z)-2F(z-\varepsilon)+F(z-2\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right\}$$

auf zwei verschiedene Weisen bestimmt, und man erhält durch Vergleichung die Relation

$$f(z)=\frac{1}{2}\left\{f(z+0)+f(z-0)\right\}.$$

§ 13.

Ueber eine Eigenschaft des Poisson'schen Integrals. Folgerung daraus für die Fourier'sche Reihe.

Der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - \alpha) \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \, d\alpha$$

hat auch eine Bedeutung für das Poisson'sche Integral*)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{(1-r^2)\, d\alpha}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2},$$

und es folgt daraus ein Satz für die Fourier'sche Reihe, welcher dem im vorigen Paragraphen für die trigonometrische Reihe gefundenen parallel geht. Man setze $f(x)$ von $-\pi$ bis $+\pi$ als eigentlich integrirbar voraus, so gilt der folgende Satz:

Von den beiden Grössen

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r=1} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{(1-r^2)\, d\alpha}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2}$$

und

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - \alpha) \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\, dx\}$$

ist die erste nothwendig endlich und bestimmt für jedes einzelne x, für welches es die zweite ist, und es sind dann beide Grössen einander gleich.

Zum Beweis führe man erst die Abkürzung

$$w(\alpha) = f(x+\alpha) + f(x-\alpha)$$

ein, und man erhält:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{(1-r^2)\, d\alpha}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2} = \int_0^{\pi} w(\beta) \frac{(1-r^2)\, d\beta}{1 - 2r\cos\beta + r^2},$$

indem vorausgesetzt wird — was erlaubt ist —, dass $f(x)$ die Periode 2π besitze. r ist positiv und kleiner als 1. Setzt man nun

---

*) Cf. Schwarz: Journal für Mathematik, Bd. 74, p. 218 und Prym ebendaselbst Bd. 73, p. 340; ferner P. du Bois-Reymond: Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. III; 1879 und C. Neumann in den Berichten der sächs. Gesellschaft d. W. vom Jahr 1880.

$$\psi(r,\beta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\beta+r^2},$$

$$\psi'(r,\beta) = \frac{\partial\psi(r,\beta)}{\partial\beta} = -\frac{(1-r^2)\,2r\sin\beta}{(1-2r\cos\beta+r^2)^2},$$

$$\psi''(r,\beta) = \frac{\partial^2\psi(r,\beta)}{\partial\beta^2} = \frac{4r-(1+r^2)\cos\beta-2r\cos^2\beta}{(1-2r\cos\beta+r^2)^3}\,2r(1-r^2),$$

so sind diese Grössen für jedes positive $r < 1$ durchweg stetige Functionen von β. Durch zweimalige partielle Integration bekommt man

$$\int\limits_0^a w(\beta)\psi(r,\beta)d\beta$$

$$=\psi(r,a)\int\limits_0^a w(\beta)d\beta-\psi'(r,a)\int\limits_0^a d\alpha\int\limits_0^\alpha d\beta w\beta+\int\limits_0^a d\alpha\,\psi''(r,\alpha)\int\limits_0^\alpha d\beta\int\limits_0^\beta d\gamma\, w(\gamma),$$

wo a eine kleine positive Grösse bedeutet, die man sich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ zu denken hat. Die drei Glieder der rechten Seite der letzten Gleichung sollen mit (I), (II), (III) bezeichnet werden. Hält man die Grösse a, welche nicht null ist, fest, so haben (I) und (II) an der Grenze $r = 1$ den limes Null; denn es ist $\cos a < 1$, also

$$\lim_{r=1}\psi(r,a) = \lim_{r=1}\psi'(r,a) = 0.$$

Es handelt sich um (III). Nach Voraussetzung ist nun der Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^\varepsilon(\varepsilon-\alpha)\,w(\alpha)d\alpha = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^\varepsilon d\alpha\int\limits_0^\alpha d\beta w(\beta) = g,$$

also auch

$$\int\limits_0^\alpha d\beta\int\limits_0^\beta d\gamma\, w(\gamma) = g\alpha^2 + \tau\alpha^2,$$

wobei

$$\lim_{\alpha=0}\tau = 0$$

ist. Führt man dies in (III) ein, so spaltet sich (III) in

$$g\int\limits_0^a \alpha^2\psi''(r,\alpha)d\alpha + \int\limits_0^a \tau\alpha^2\psi''(r,\alpha)d\alpha,$$

welche Ausdrücke beziehungsweise (IV) und (V) heissen mögen.

Bei der Schätzung von (V) kommt das Vorzeichen von $\psi''(r,\alpha)$ in Betracht. Dieses Vorzeichen hängt ab von dem Zeichen des Ausdrucks

$$4r-(1+r^2)\cos\alpha-2r\cos^2\alpha,$$

welcher beständig wachsend die Werthe von $-(1-r)^2$ bis $4r$ durch-

läuft, wenn bei festgehaltenem r das Argument α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst. Es giebt also einen einzigen Werth ξ, für den

$$0 < \xi < \frac{\pi}{2}$$

und

$$4r - (1 + r^2)\cos\xi - 2r\cos^2\xi = 0$$

ist. ξ ist eine eindeutige Function von r oder von $1 - r = \sigma$. Es ist ferner

$$\psi''(r, \alpha) < 0 \text{ für } 0 \leqq \alpha < \xi,$$

und

$$\psi''(r, \alpha) > 0 \text{ für } \xi < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Die Grösse ξ wird mit $\sigma = 1 - r$ unendlich klein. Setzt man nämlich fest, dass in der Formel

$$4r - (1 + r^2)\cos\alpha - 2r\cos^2\alpha$$

für α gelten soll

$$\varepsilon \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2},$$

wo ε beliebig klein angenommen ist, so kann man zu diesem ε stets eine solche Umgebung $1 - \Delta \dots 1$ des Punktes 1 für r finden, dass für solche r der Ausdruck

$$4r - (1 + r^2)\cos\alpha - 2r\cos^2\alpha$$

positiv ist; denn er ist nicht kleiner als

$$4r - (1 + r^2)\cos\varepsilon - 2r\cos^2\varepsilon,$$

wovon der $\lim\limits_{r=1}$ bei festgehaltenem ε positiv wird. D. h. also, wenn r im Intervall $1 - \Delta \leqq r < 1$ gewählt wird, fällt ξ nothwendig in die Strecke $0 \dots \varepsilon$. Es ist also in der That der Grenzwerth

$$\lim_{\sigma=0} \xi = 0.$$

Entwickelt man jetzt die Gleichung

$$4r - (1 + r^2)\cos\xi - 2r\cos^2\xi = 0$$

nach ξ und $\sigma = 1 - r$, so ergibt sich

$$0 = -\sigma^2 + 3\xi^2 + \sigma\xi^2\overline{\mathfrak{P}}(\sigma, \xi^2) + \xi^4\mathfrak{P}(\xi^2),$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ gewöhnliche Potenzreihen mit ganzen nicht negativen Potenzexponenten bedeuten. Nachdem man nun mit ξ^2 dividirt hat, erhält man an der Grenze $\sigma = 0$:

$$0 = -\lim_{\sigma=0}\frac{\sigma^2}{\xi^2} + 3.$$

Es ist also

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}(1 + e),$$

wobei wir mit e eine gleichzeitig mit σ verschwindende Grösse bezeichnen.

Durch Einsetzung dieses Resultats in die Ausdrücke für $\psi(r, \beta)$ und $\psi'(r, \beta)$ erhält man, wenn e_1, e_2 analoge Bedeutung haben, wie e,

$$\xi\,\psi\,(1-\sigma, \xi) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+e_1),$$
$$\xi^2\psi'(1-\sigma, \xi) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+e_2).$$

Diese Betrachtungen waren nöthig, um das Integral

$$\text{(V)} \qquad \int_0^a \tau\,\alpha^2\psi''(r, \alpha)\,d\alpha$$

beurtheilen zu können. Wir nehmen stets σ relativ zu a so klein an, dass ξ in das Intervall $0 \ldots a$ fällt. Es ist dann $\alpha^2\psi''(r, \alpha)$ negativ von $0 \ldots \xi$ und positiv von $\xi \ldots a$. Bedeutet nun ϱ_a das Maximum des absoluten Betrags von τ für $0 < \alpha \leq a$, so ist ϱ_a eine nur von a abhängige*), nicht negative Grösse, für die

$$\lim_{a=0} \varrho_a = 0$$

ist, und man hat die Gleichung

$$\int_0^a \tau\,\alpha^2\psi''(r, \alpha)\,d\alpha = \Theta\varrho_a\left\{-\int_0^\xi \alpha^2\psi''(r, \alpha)\,d\alpha + \int_\xi^a \alpha^2\psi''(r, \alpha)\,d\alpha\right\},$$

wobei der gewöhnliche Mittelwerthssatz angewandt ist, und für die Grösse Θ gilt:

$$-1 \leq \Theta \leq +1.$$

Die Grösse in der letzten Klammer, deren beide Theile positiv sind, werde zur Abkürzung mit $\Phi(a, \sigma)$ bezeichnet, so dass also auch

$$\Phi(a, \sigma) = \int_0^a \alpha^2\psi''(1-\sigma, \alpha)\,d\alpha - 2\int_0^\xi \alpha^2\psi''(1-\sigma, \alpha)\,d\alpha$$

ist. Integrirt man zweimal partiell, so erhält man

$$\int_0^a \alpha^2\psi''(1-\sigma,\alpha)\,d\alpha = a^2\psi'(1-\sigma,a) - 2a\psi(1-\sigma,a) + 2\int_0^a \psi(1-\sigma,\alpha)\,d\alpha.$$

Hält man a fest, welches positiv ist, so ist

$$\lim_{\sigma=0} \psi'(1-\sigma, a) = \lim_{\sigma=0} \psi(1-\sigma, a) = 0,$$

und, wie man weiss**),

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^a \psi(1-\sigma, \alpha)\,d\alpha = \pi.$$

---

*) Nach seiner Definition hängt τ nur von α ab.

**) Vergl. die genannten Untersuchungen über das Poisson'sche Integral.

Also ist

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^a \alpha^2 \psi''(1-\sigma, \alpha) d\alpha = 2\pi.$$

Ferner erhält man wiederum durch zweimalige partielle Integration:

$$-\int_0^\xi \alpha^2 \psi''(1-\sigma,\alpha) d\alpha = -\xi^2 \psi'(1-\sigma,\xi) + 2\xi\psi(1-\sigma,\xi) - 2\int_0^\xi \psi(1-\sigma,\alpha) d\alpha.$$

Die durch diesen Ausdruck dargestellte Grösse hängt lediglich von σ ab. Man weiss von der linken Seite, dass sie positiv ist. Indem nun ψ stets positiv ist, erkennt man aus der rechten Seite, dass sie kleiner ist als

$$-\xi^2\psi'(1-\sigma,\xi) + 2\xi\psi(1-\sigma,\xi),$$

welch letzteres für ein unendlich kleines σ die Grenze $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ besitzt.

Fasst man diese Resultate zusammen, so bekommt man im Hinblick auf den letzten Ausdruck von $\Phi(a, \sigma)$:

Wenn man sich für a einen beliebig kleinen positiven Werth fixirt denkt, so kann stets eine hinreichend kleine Grösse angegeben werden, so dass für alle σ unter dieser Grösse die Relation gilt:

$$\Phi(a, \sigma) < 2\pi + 3\sqrt{3}.$$

Nun ist aber nach den voranstehenden Entwicklungen

$$\int_0^\pi w(\beta)\psi(r,\beta)d\beta = \int_a^\pi w(\beta)\psi(r,\beta)d\beta + \psi(r,a)\int_0^a w(\beta)d\beta$$

$$-\psi'(r,a)\int_0^a d\alpha \int_0^\alpha d\beta \cdot w(\beta) + g\int_0^a \alpha^2\psi''(r,\alpha)d\alpha + \Theta \cdot \varrho_a \cdot \Phi(a,\sigma).$$

Jetzt macht man zuerst durch die Wahl von a die Grösse ϱ_a so klein als man will; nachher kann man, indem man den Werth von a festhält, für $\sigma = 1 - r$ eine Grenze bestimmen, die so klein ist, dass unter derselben

$$\Phi(a, \sigma) < 2\pi + 3\sqrt{3}$$

ist, und zugleich die Grössen

$$\int_a^\pi w(\beta)\psi(r,\beta)d\beta^{*)}, \quad \psi(r,a)\int_0^a w(\beta)d\beta, \quad \psi'(r,a)\int_0^a d\alpha \int_0^\alpha d\beta \cdot w(\beta)$$

---

*) Dass der $\lim_{r=1}$ dieser Grösse bei festgehaltenem $a > 0$ gleich Null ist, kann hier als bekannt vorausgesetzt werden. Wir verweisen auf die am Anfang dieses Paragraphen citirten Abhandlungen.

und

$$\int_0^\alpha \alpha^2 \psi''(r, \alpha)\, d\alpha - 2\pi$$

beliebig klein sind. Auf diese Weise kann man erreichen, dass

$$\int_0^\pi w(\beta)\psi(r, \beta)\, d\beta - 2\pi g$$

so klein wird, als man nur will. Es ist somit

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r=1} \int_0^\pi w(\beta)\psi(r, \beta)\, d\beta = g.$$

Bekanntlich ist nun für $r < 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{(1-r^2)\, d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-x)+r^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} r^\nu \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos(\nu(\alpha-x))\, d\alpha.$$

Wir müssen jetzt an einen Satz von Abel erinnern. Ist nämlich

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \mathfrak{P}(x)$$

eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius 1, und ist $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ eine convergente Reihe mit der Summe s, so ist $\lim_{x=1} \mathfrak{P}(x)$ endlich und bestimmt und gleich s; dabei denke man sich x reell. Wendet man diesen Satz auf den vorliegenden Fall an, so erhält man:

Wenn $f(x)$ eine von $-\pi$ bis $+\pi$ im engeren Sinn integrirbare Function ist, so sind die Grössen

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon (\varepsilon - \alpha)\,\{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\}\, d\alpha$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos(\nu(\alpha - x))\, d\alpha$$

für jeden einzelnen Werth x, für den sie beide endlich und bestimmt sind, auch einander gleich.

Dieser Satz geht dem in § 11 gegebenen parallel, ohne jedoch mit demselben identisch zu sein.

Stuttgart, 1883 und Leipzig, Mai 1884.

Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Zweiter Theil*).

Lehrsätze über die Integrale der Differentialquotienten.

§ 1.

Die integrirbare Function.

Lehrsätze. Wenn die Function $f(x)$ in einem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser als eine beliebig gegebene Grösse σ sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

nach einem bestimmten Grenzwerthe, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, während die Summe $\sum_{p=1}^{p=n} \delta_p$ stets gleich $b - a$ und $a + \delta_1 = x_1,\ x_1 + \delta_2 = x_2,\ \ldots,\ x_{n-1} + \delta_n = b$ ist. (Riemann, Ges. Werke, pag. 227).

Dieser Grenzwerth ist unabhängig von den Brüchen ε, der Wahl der Theilintervalle und der Art, wie bei fortgesetzter Theilung jede Intervallgrösse nach 0 convergirt. (du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 79; vergl. auch meine „Elemente der Differential- u. Integralrechnung", Leipzig 1881, pag. 253 ff.).

Als Grösse der Schwankung der Function an einer Stelle bezeichnet man die positive Differenz der extremen Werthe innerhalb des Werthevorrathes der Function an dieser Stelle und in ihrer unmittelbaren, zu beiden Seiten befindlichen Umgebung.

*) Der erste Theil ist im XXIII. Bande der Math. Annalen erschienen. Ich citire denselben im Folgenden mit Th. I.

Definition. Der Grenzwerth der Summe S heisst das Integral der Function $f(x)$, gebildet für das Intervall von a bis b, und $f(x)$ selbst heisst eine in diesem Intervalle integrirbare Function.

Folgerung: Eine Function, welche in einem Intervalle integrirbar ist, ist auch in jedem Theile desselben integrirbar.

Definition. Ein Punktsystem, welches die Eigenschaft hat, dass sich sämmtliche Punkte des Systemes in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen lassen, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann, mag dabei auch die Anzahl der erforderlichen Intervalle über jeden Betrag hinaus wachsen, heisst ein System mit der Intervallsumme Null oder auch ein *discretes* System von Punkten*).

Jedes Punktsystem von *einer* Dimension besitzt eine bestimmte unveränderliche Minimalgrenze für die Summe der das System einschliessenden linearen Intervalle. Diese Grenze ist unabhängig von der Art, wie man bei fortgesetzter Verkleinerung der einschliessenden Intervalle diese letzteren bestimmt. (Stolz, Math. Annalen, Bd. XXIII).

Eine Function, welche in einem Intervalle durchaus endlich ist, aber derart unstetig wird, dass die Gesammtheit aller Stellen, an denen die Schwankungen grösser als eine bestimmte Zahl σ bleiben, stets nur ein discretes System von Punkten bilden, heisst eine punktirte unstetige Function.

Folgerung. Functionen, welche in einem Intervalle punktirt unstetig sind, sind auch in diesem Intervalle integrirbar, sowie umgekehrt, jede integrirbare (überall endliche) Function entweder eine durchaus stetige, oder eine punktirt unstetige sein muss. (Hankel, Math. Annalen, Bd. XX).

Definition. Zwei überall endliche Functionen heissen in einem Intervalle „im allgemeinen gleich", wenn ihre Differenz nur in discreten Punkten dem Betrage nach grösser wird als eine endliche Zahl σ.

---

*) Da es durchaus wünschenswerth ist, in der Integralrechnung eine kurze Bezeichnung für dieses Punktsystem zu haben, so glaube ich an der von mir einmal eingeführten Bezeichnung „discret" festhalten zu dürfen. Dieselbe bleibt bei allen Arten der Zusammensetzung, die solch ein Punktsystem aufweisen kann, doch immer dadurch motivirt, dass das discrete Punktsystem im engeren Sinne des Wortes den einfachsten Fall der Intervallsumme Null darstellt, und dass für die Integralprobleme das discrete System im weiteren Sinne in der That durchaus dieselbe Bedeutung hat wie ein System von einzelnen Punkten. Die Bezeichnung „integrirbares Punktsystem", welche Herr du Bois Reymond in seiner Functionentheorie benutzt, erscheint mir weniger gut, erstlich weil das Punktsystem nicht integrirt wird, sodann weil eine integrirbare Function Unstetigkeiten besitzen kann in Punkten, die kein integrirbares System mehr bilden. Will man aber die Bildung der Intervallsumme als eine Integration betrachten, so ist jedes Punktsystem ein integrirbares, da jedes eine bestimmte Intervallsumme besitzt.

Folgerung. Ist von zwei im allgemeinen gleichen, überall endlichen Functionen die eine integrirbar, so ist auch die andere integrirbar, und beide liefern dasselbe Integral.

Lehrsatz 1. Bei einer punktirt unstetigen Function lässt sich nach Ausschluss gewisser Punkte durch Intervalle von beliebig kleiner Gesammtlänge ε eine obere Grenze für Δx fixiren, so dass bei allen Werthen von x, die nicht zu den ausgeschlossenen gehören, die Schwankungen der Function innerhalb des Intervalles von x bis $x + \Delta x$ gleich oder kleiner sind als eine beliebige Zahl σ, so dass also auch

$$\text{abs}\,[f(x + \Theta \Delta x) - f(x)] \leqq \sigma$$

ist, wenn $0 \leqq \Theta \leqq 1$ ist.

Beweis. Nachdem man die Stellen, an denen die Schwankungen grösser bleiben als $\frac{\sigma}{3}$ durch eine endliche Anzahl von Intervallen mit der Gesammtlänge ε eingeschlossen hat, betrachte man den Verlauf der Function innerhalb einer continuirlichen Strecke, die zwischen zwei dieser Intervalle liegt. Dieselbe sei mit $x_1 x_2$ bezeichnet. — An der Anfangsstelle x_1 bestimme man die Länge h_1 derart, dass

$$\text{abs}\,[f(x_1 + \Theta h_1) - f(x_1)] \leqq \frac{\sigma}{3}$$

wird; alsdann unterscheiden sich auch zwei Functionswerthe im Innern dieses Intervalles von einander höchstens um $\frac{2\sigma}{3}$. An der Stelle $x_1 + h_1$ bestimme man das Intervall h_2 so, dass

$$\text{abs}\,[f(x_1 + h_1 + \Theta h_2) - f(x_1 + h_1)] \leqq \frac{\sigma}{3}$$

wird, u. s. w. an der Stelle $x_1 + h_1 + h_2$ das Intervall h_3. Fährt man so fort, so muss man durch eine endliche Anzahl von Intervallen den Punkt x_2 erreichen. Denn es ist nicht denkbar, dass der Process in unendlicher Folge nach einem mittleren Punkte x_μ oder dem Endpunkte x_2 convergirt, weil an jedem Punkte ein endliches Intervall h auch rückwärts angebbar ist, so dass sich in diesem Intervalle zwei Functionswerthe höchstens um $\frac{\sigma}{3}$ unterscheiden. Der kleinste unter den ermittelten Werthen von h befriedigt nun für jeden Punkt x des Intervalles $x_1 x_2$ die gestellte Forderung. (An der Grenze x_1 ist h nur positiv, an der Grenze x_2 nur negativ zu nehmen). Fixirt man nun den kleinsten Werth h, der sich überhaupt bei den verschiedenen Intervallen $x_1 x_2$ ergiebt, deren Anzahl eine endliche ist, so hat man damit die Forderung des Satzes erfüllt.

Man kann σ beliebig verkleinern, und ebenso ε nach null convergiren lassen.

§ 2.

Definition des Integrales einer Function, welche unendlich wird.

Die Function $f(x)$ wird in einem Intervalle von a bis b an einzelnen oder unendlich vielen Punkten unendlich, wenn es entweder Stellen giebt, an denen die Function punktuell einen Werth besitzt, dessen Betrag grösser ist als jede angebbare Zahl, oder auch Stellen, in deren Umgebung der Betrag der Function jede angebbare Grenze überschreitet. Es werde angenommen, dass diese Stellen nur eine discrete Menge bilden. Alsdann schliesse man dieselben in eine endliche Anzahl von Intervallen ein, und construire eine Function $f_1(x)$, welche innerhalb dieser Intervalle den Werth null, ausserhalb derselben den Werth $f(x)$ hat. Bildet man nun $\int_a^x f_1(x)\,dx$, und convergirt dieses Integral, wenn man die Summe der einschliessenden Intervalle in irgendwelcher Weise beliebig klein werden lässt, immer nach einer bestimmten (von x abhängigen) Grenze, so heisst dieser Grenzwerth das Integral der Function $f(x)$ im Intervalle von a bis x.

Man erkennt, dass bei dieser Definition punktuell hebbare Unendlichkeiten gar keinen Einfluss auf den Werth des Integrales haben, so dass im folgenden dieser Fall gar nicht zu berücksichtigen ist. Dagegen bleibt eine Stelle, in deren Umgebung die Functionswerthe über jeden Betrag hinaus wachsen, eine singuläre, auch wenn man an der Unendlichkeitsstelle selbst der Function einen endlichen Werth beilegt; denn die Schwankungen sind nach wie vor unendlich.

Folgerung. Zwei Functionen, von denen jede nur in discreten Punkten unendlich wird, und die übrigens im allgemeinen einander gleich sind, besitzen, falls eine von ihnen integrirbar ist, zwischen denselben Grenzen auch dasselbe Integral. Denn ihre Differenz ist eine Function, welche im allgemeinen null, und nur in discreten Punkten unendlich oder grösser ist als eine bestimmte Zahl σ; das Integral derselben ist demnach null.

Auch für integrirbare Functionen, die unendlich werden, besteht der Satz, der für überall endliche, integrirbare Functionen als bekannt vorausgesetzt wird:

Lehrsatz 1. Das Integral ist eine stetige Function seiner oberen Grenze, wenn diese als variabel betrachtet wird.

Beweis. Ist

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

so ist

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f_1(x)\,dx + \int_x^{x+h} [f(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Der Voraussetzung nach kann man nun zuerst die Punkte, welche die Unendlichkeitsstellen bilden, in eine endliche Anzahl von Intervallen derart einschliessen, dass der Betrag des Integrales

$$\int_x^{x+h} [f(x) - f_1(x)]\,dx$$

unabhängig von h kleiner wird als eine beliebig kleine Zahl δ_1; denn es ist der Definition nach

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \lim \int_x^{x+h} f_1(x)\,dx$$

und da die Gesammtheit *aller* im Intervalle von a bis b befindlicher Unendlichkeitsstellen in Intervalle eingeschlossen werden kann, so dass

$$\int_a^b [f(x) - f_1(x)]\,dx$$

dem Betrage nach kleiner wird als δ_1, und kleiner als δ_1 bleibt, wenn man die einschliessenden Intervalle irgendwie verkleinert, so folgt, dass auch bei jedem Theilintegrale der Betrag von

$$\int_x^{x+h} [f(x) - f_1(x)]\,dx$$

kleiner bleibt als δ_1, weil man die Intervalle, welche nicht in der Strecke von x bis $x+h$ liegen, sämmtlich zuerst für sich allein nach 0 convergiren lassen kann. Sodann besitzt die Function $f_1(x)$ im Intervalle von x bis $x+h$ einen endlichen Maximalwerth, und man kann h so klein wählen, dass

$$\int_x^{x+h} f_1(x)\,dx$$

dem Betrage nach kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse δ_2, und bei abnehmenden Werthen von h auch kleiner bleibt als δ_2. Demnach ist

$$\text{abs}\,[F(x+h) - F(x)] < \delta_1 + \delta_2$$

und da die Grösse δ_1 von vornherein beliebig klein gemacht werden kann, während δ_2 durch Wahl von h beliebig klein wird, so ist die Function vorwärts genommen stetig. Ebenso beweist man, dass sie rückwärts genommen stetig ist.

Desgleichen besteht auch der eben bereits angewandte Satz: Ist

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x),$$

so ist:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Denn es ist:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x)\,dx - \int_a^{x_1} f(x)\,dx,$$

weil

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx = \int_a^{x_2} f_1(x)\,dx - \int_a^{x_1} f_1(x)\,dx.$$

Lehrsatz 2. Jede Function $F(x)$, welche ein Integral ist, hat die Eigenschaft, dass der Grenzwerth der Summe:

$$[F(y_1) - F(x_1)] + [F(y_3) - F(y_2)] + [F(y_5) - F(y_4)] + \cdots + [F(x_2) - F(y_n)]$$

gleich $F(x_2) - F(x_1)$ wird, wenn man die Theilpunkte $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ im Innern der Strecke x_1 bis x_2 schliesslich derart vertheilt, dass die Summe

$$y_1y_2 + y_3y_4 + y_5y_6 + \cdots + y_{n-1}y_n$$

nach 0 convergirt, mag auch die Anzahl der Strecken über jede Grenze hinaus wachsen.

Beweis. Ist $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ und $f(x)$ durchaus endlich, so ist, wenn k den grössten Betrag bezeichnet, den $f(x)$ überhaupt annimmt, die Summe

$$[F(y_1) - F(y_2)] + [F(y_3) - F(y_4)] + \cdots + [F(y_{n-1}) - F(y_n)]$$

dem Betrage nach immer kleiner als $k(y_1y_2 + y_3y_4 + \cdots + y_{n-1}y_n)$. Sie convergirt also nach null, wenn die Summe der Theilintervalle null wird.

Wird aber innerhalb der Strecken $y_1y_2, y_3y_4, \ldots$ die Function $f(x)$ unendlich, so kann man zufolge der Integrirbarkeit, diese, die Unendlichkeitspunkte einschliessenden, Strecken so klein wählen, dass die Summe der Integrale:

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx + \int_{y_3}^{y_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(x)\,dx$$

$$= [F(y_2) - F(y_1)] + [F(y_4) - F(y_3)] + \cdots + [F(y_n) - F(y_{n-1})]$$

beliebig klein wird.

Lehrsatz 3. Kennt man eine stetige Function $F(x)$, welche in jedem Theilintervalle $x'x''$ der Strecke a bis x, in welchem $f(x)$ überall endlich und integrirbar ist, die Gleichung befriedigt:

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx,$$

so ist, auch wenn $f(x)$ im Intervalle von a bis x unendlich wird,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$$

falls die Unendlichkeitspunkte der Function $f(x)$ eine discrete Punktmenge bilden, die zugleich reductibel ist.*)

Beweis. Schliesst man die Unendlichkeitspunkte der Function $f(x)$ in eine Reihe von Intervallen ein, $y_1 y_2$, $y_3 y_4$, ..., $y_{n-1} y_n$, deren Summe beliebig klein ist, so ist gemäss der früheren Bezeichnung:

$$\begin{aligned}\int_a^x f_1(x)\,dx &= [F(y_1) - F(a)] + [F(y_3) - F(y_2)] + \cdots + [F(x) - F(y_n)] \\ &= [F(x) \;- F(a)] + [F(y_1) - F(y_2)] + \cdots + [F(y_{n-1}) - F(y_n)].\end{aligned}$$

Sind erstlich die Unendlichkeitspunkte in endlicher Anzahl vorhanden, so convergirt die rechte Seite, wenn man die einschliessenden Intervalle beliebig verkleinert, weil $F(x)$ stetig ist, nach dem Werthe $F(x) - F(a)$, es ist also

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Sodann erkennt man weiter: ist die Anzahl der Unendlichkeitsstellen unendlich, so liefern alle die Stellen, welche isolirt gelegen sind, schliesslich keinen Beitrag zu der rechten Seite. Daraus folgt: Bestimmt man die Ableitung der Punktmenge, welche durch die Unendlichkeitsstellen gebildet wird, so sind alle die Punkte, die nicht zu dieser Ableitung gehören, unwesentlich; es bleiben auf der rechten Seite nur solche Intervalle nach, welche Grenzpunkte des Systems einschliessen. Von diesen Grenzpunkten sind aber wiederum diejenigen unwesentlich, welche isolirt gelegen sind. Mithin sind, falls die Punkte der Menge sich durch einen endlichen Ableitungsprocess wegheben,

*) Durch diesen Satz ist die Uebereinstimmung meiner Definition des Integrales einer Function, welche unendlich wird, mit derjenigen ausgesprochen, welche Herr Hölder in der vorstehenden Abhandlung (§ 5) zur Grundlage wählt; diese letztere beschränkt sich auf die Annahme, dass die Unendlichkeitspunkte eine „abzählbare" Menge bilden, und weil zu dieser Menge stets auch ihre Ableitung gehört (pag. 207), so ist sie zugleich auch eine reducibele (Cantor, Acta math. B. 2. pag. 409). Im folgenden werde ich die genannte Abhandlung, welche ich während des Druckes der meinigen durch Güte des Herrn Verfassers kennen lernte, noch an einigen Stellen zum Vergleich heranziehen.

sämmtliche Punkte auf den Werth der rechten Seite ohne Einfluss. Wenn aber der Ableitungsprocess unbegrenzt fortsetzbar ist und nach einer bestimmten Punktmenge convergirt, so werden für die rechte Seite nur diejenigen Intervalle von Bedeutung, welche die Punkte dieser abgeleiteten gleichfalls discreten Menge enthalten. Führt man für diese den nämlichen Process aus, und gelangt man dabei schliesslich bei einmaliger oder mehrmaliger Wiederholung zu einem System isolirter Punkte, was sich zuletzt vollständig aufhebt, so hat man nach der Definition von Hrn. Cantor eine reductibele Menge, und sämmtliche Punkte sind sonach auf den Werth der rechten Seite ohne Einfluss; d. h. bilden die Unendlichkeitspunkte eine reductibele Menge, und ist eine stetige Function mit der vorausgesetzten Eigenschaft bekannt, so kann man aus der Existenz dieser Function auf die Integrirbarkeit von $f(x)$ schliessen und zugleich die obige Gleichung allgemein ansetzen.

Bemerkung. Nimmt man die Integrirbarkeit der Function $f(x)$ auch in den Intervallen, welche Unendlichkeitspunkte enthalten, mit unter die Voraussetzungen auf, so ergiebt sich ein directerer Beweis aus meiner Note über die Abbildung einer stetigen und unstetigen Mannigfaltigkeit. Denn die Differenz

$$\int_a^x f(x)\,dx - F(x)$$

stellt eine stetige Function dar, welche längs ganzer Intervalle constant ist und nur in Punkten einer reductibelen Menge sich ändert. Solch eine Function kann nur eine Constante sein. (Math. Annalen Bd. XXIII, pag. 285).

Zusatz. Bilden die Unendlichkeitspunkte zwar ein discretes System, aber ein solches, das zugleich ein System ohne Isolationen in sich enthält (Th. I, pag. 245), also irreductibel ist, so lässt sich aus der obigen Gleichung nicht schliessen, dass allgemein

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

wird, falls man nicht weiss, dass $F(x)$ eine Integralfunction ist, für welche also

$$\lim \{[F(y_1) - F(y_2)] + [F(y_3) - F(y_4)] + \cdots + [F(y_{n-1}) - F(y_n)]\}$$

gleich null wird. Ja selbst, wenn man weiss, dass $f(x)$ eine integrabele Function ist, und dass für alle Theilintervalle, welche keine Unendlichkeitsstellen enthalten, zwischen dem Integrale von $f(x)$ und der Function $F(x)$ die Gleichung besteht:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\, dx = F(x'') - F(x'),$$

so darf man nicht ohne weiteres $\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a)$ setzen, falls im Intervalle von a bis x die Stellen, an denen die Ableitung der Function $F(x)$ unendlich wird, ein irreductibeles System bilden. *Denn es giebt stetige, nicht constante Functionen, deren Differentialquotient im allgemeinen gleich null ist, und nur in discreten Punkten, welche ein System ohne Isolationen bilden, unendlich wird.*

Auf diese Functionen muss ich um des Einflusses willen, den dieselben auf die Formulirung der Fundamentalsätze in der Integralrechnung haben, an dieser Stelle etwas näher eingehen.

Ich will zunächst an einem Beispiele angeben, wie man solche stetige Functionen von durchaus treppenförmiger Form, die doch an keiner Stelle eine plötzliche Werthänderung haben, geometrisch sich vorzustellen und mit beliebiger Annäherung zu construiren hat. Das Intervall von 0 bis 1 theile man etwa in 4 gleiche Theile und construire oberhalb der Strecke von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ die Horizontallinie mit der Ordinate $\frac{1}{2}$, oberhalb der Strecke von $\frac{3}{4}$ bis 1 die Horizontallinie mit der Ordinate 1. Ueber den Theilstrecken 0 bis $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ ziehe man die beiden schrägen Geraden, welche die erst genannte Horizontallinie mit der Abscissenaxe, und die beiden Horizontallinien unter einander verbinden. Dies ist das erste angenäherte Bild der Function. Jedes der beiden Intervalle, in welchen eine schräge Gerade vorkommt, theile man wiederum in vier gleiche Theile. Im Intervalle $\frac{3}{16}$ bis $\frac{4}{16}$ ziehe man die Horizontallinie mit der Höhe $\frac{1}{2}$, im Intervall $\frac{1}{16}$ bis $\frac{2}{16}$ die Horizontallinie mit der Höhe $\frac{1}{4}$; die Intervalle von 0 bis $\frac{1}{16}$ und $\frac{2}{16}$ bis $\frac{3}{16}$ überbrücke man durch schräge Verbindungslinien. Der analoge Process ist in den anderen Intervallen von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ mit den Horizontallinien von der Höhe 1 und $\frac{3}{4}$ auszuführen; so erhält man ein zweites genaueres Bild der Function. Nun giebt es 4 Intervalle, in welchen schräge Gerade vorkommen; dieselben erstrecken sich von

$$0 \text{ bis } \frac{1}{16}, \quad \frac{2}{16} \text{ bis } \frac{3}{16}, \quad 0 + \frac{1}{2} \text{ bis } \frac{1}{16} + \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{16} + \frac{1}{2} \text{ bis } \frac{3}{16} + \frac{1}{2}.$$

Die Summe dieser Intervallängen ist $\frac{1}{4}$ und der Richtungscoefficient, der schrägen Geraden ist gleich 4. Setzt man nun diesen Process fort, indem man jedes dieser Intervalle in vier gleiche Theile theilt, so erhält man 8 Intervalle, in welchen noch schräge Gerade vorkommen. Die Summe derselben beträgt $\frac{1}{8}$, und der Richtungscoefficient der schrägen Geraden ist 8. Ausserdem erhält man Intervalle, in welchen die Function den constanten Werth $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ besitzt. Es ist nun leicht einzusehen, dass man durch unbegrenzte Fortsetzung des nämlichen Processes zu einer Function gelangt, welche alle Werthe zwischen 0 und 1, die von der Form $\frac{a}{2^n}$ sind, wobei n jede ganze positive Zahl ist, innerhalb ganzer Intervallstrecken besitzt. Der Werth 1 erstreckt sich vom Werthe $x = 1$ an rückwärts über ein Intervall von der Länge:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$$

ebenso der Werth $\frac{1}{2}$ vom Werthe $x = \frac{1}{2}$ an rückwärts über ein Intervall von der Länge $\frac{1}{3}$. Die Werthe $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ gehören zu Intervallen, von denen jedes die Länge $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{12}$ hat; die Werthe $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ gehören zu den Intervallen von denen jedes gleich $\frac{1}{3 \cdot 4^2}$ ist. Allgemein: jeder Werth von der Form $\frac{a}{2^n}$ wobei a eine ungerade ganze Zahl ist, gehört zu einem Intervalle von der Länge

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

Die Gesammtsumme aller Intervalle, für welche die Function definirt ist, wird demnach:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 4^2} + \frac{8}{3 \cdot 4^3} + \frac{16}{3 \cdot 4^4} + \cdots = \frac{2}{3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 4^2} + \cdots = 1$$

d. h. sie wird schliesslich gleich dem ganzen Intervalle. Daraus folgt, dass alle die Stellen, an denen die Function nicht durch einen Werth von der Form $\frac{a}{2^n}$ definirt ist, schliesslich nur eine discrete Menge bilden können. Diese Stellen sind aber definirbar als Grenzen der Endpunkte der construirten Intervalle. Legt man an denselben der Function denjenigen Werth jedesmal bei, der sich als Grenzwerth aus der Aufeinanderfolge der Werthe $f(x)$ ergiebt, wenn x irgend eine Werthreihe durchläuft, welche nach dem betrachteten Punkte convergirt, und für welche die Functionswerthe bekannt sind, so hat man

eine Function construirt, welche mit wachsenden Werthen von x nur wächst, und an jeder Stelle der Stetigkeitsbedingung genügt. Die Function nimmt sonach alle Werthe zwischen 0 und 1 an, aber alle Werthe, die nicht von der Form $\frac{a}{2^n}$ sind, nur an Stellen, die eine discrete Menge bilden. An den Endpunkten der construirten Intervalle, sowie an den Grenzpunkten derselben ist der vor- oder rückwärts gebildete Differentialquotient unendlich gross, denn der Richtungscoefficient der eingetragenen schrägen Geraden wächst schliesslich über jede Grenze, während in allen Intervallen der Differentialquotient durchaus null ist. Für die explicite analytische Darstellung dieser Function, die auch für jeden Werth des Argumentes x durch eine convergente Fourier'sche Reihe gegeben werden könnte, weil die Function stetig ist und nicht oscillirt, erhält man die nämliche Form, in welcher Herr Cantor ein Beispiel dieser Functionen veröffentlicht hat, auf die er bei seinen Untersuchungen über die Mächtigkeit perfecter Mengen gleichfalls geführt worden ist (Acta Math. B. IV). Dasselbe lautet: Durch den Ausdruck

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots \frac{c_\varrho}{3^\varrho} + \cdots,$$

wird, wenn man den Grössen c_ϱ die Werthe 0 oder 2 beilegt und die Reihe sowohl endlich, wie unendlich sein lässt, eine perfecte Menge im Intervalle von 0 bis 1 definirt. Vermittelst derselben ist eine abzählbare Menge von Theilintervallen bestimmt, vom Punkte a_ν bis zum Punkte b_ν, wenn man den Punkt a_ν so definirt, dass man von einem gewissen Werthe $\varrho = \mu$ an die Grösse c_μ gleich 0 setzt, und alle weiteren c gleich 2, und den Punkt b_ν so, dass c_μ gleich 2 ist und alle weiteren c null sind. Es ist dann

$$a_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^{\mu+1}} + \frac{2}{3^{\mu+2}} + \cdots = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{1}{3^\mu}$$

$$b_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^\mu}$$

Zwischen den Punkten a_ν und b_ν liegt kein Punkt der Menge z mehr. Ausser den Punkten a_ν und b_ν enthält aber diese Menge noch ein System von Punkten g, welche von a_ν und b_ν verschieden sind und zugleich die Grenzpunkte dieser sind. Die Summe aller Intervalle $b_\nu - a_\nu$ ist gleich

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = 1,$$

d. h. die gesammte Menge z ist eine discrete. Man definire nun ein zweites Werthsystem ebenfalls zwischen 0 und 1 durch die Gleichung:

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_\varrho}{2^\varrho} + \cdots\right]$$

wobei die c_ϱ die Werthe 0 oder 2 haben. Jedem Werthe von z entspricht der gleichartig gebildete Werth von y; dann sind die beiden Werthe von y, welche den Werthen $z = a_\nu$ und $z = b_\nu$ entsprechen, einander gleich; denn es ist

$$\frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}} + \frac{2}{2^{\mu+1}} + \frac{2}{2^{\mu+1}} + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}} + \frac{2}{2^\mu}\right].$$

Diesen Werth bezeichne man mit φ_ν. Man definire nun für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ die Function $\varphi(x)$ so, dass für $x = z$ $\varphi(x) = y$ ist, und für $a_\nu < x < b_\nu$ $\varphi(x) = \varphi_\nu$ wird, so hat man wiederum eine stetige Function, deren Ableitung an allen Stellen, mit Ausnahme der discreten Menge z, vor- und rückwärts gebildet, den Werth null hat.

Für das erst genannte Beispiel gilt im wesentlichen dieselbe Definition, wenn man

$$z = \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{4^2} + \frac{c_3}{4^3} + \cdots + \frac{c_\varrho}{4^\varrho} + \cdots$$

und wiederum die Coefficienten c gleich 0 oder 2 setzt.

Anmerkung. Solche Punktsysteme, die sich in Intervalle von beliebig kleiner Summe einschliessen lassen, und bei denen zugleich jeder Punkt des Systems Grenzpunkt ist, habe ich zuerst im 19. Bande der Annalen pag. 239 vermittelst einer allgemeinen Theilungsmethode nachgewiesen. Daselbst ist auch gezeigt, dass es Punktsysteme giebt, bei welchen die Intervallsumme von 0 verschieden ist, und die doch in keinem Intervalle überall dicht sind. Beide Arten von Punktmengen lassen sich eindeutig auf einander beziehen.

Aus der Existenz von stetigen Functionen dieser Art ergeben sich nun die Folgerungen:

Erstlich. Es besteht nicht mehr der Satz: Wenn zwei Functionen integrirbare Ableitungen besitzen, die im allgemeinen einander gleich sind, also nur in discreten Punkten um mehr als σ sich von einander unterscheiden, so sind die beiden Functionen bis auf eine additive Constante einander gleich. Denn ist $F(x)$ eine stetige Function mit der integrirbaren Ableitung $f(x)$, so hat die Function $F(x) + \varphi(x)$, wenn $\varphi(x)$ eine Function der besprochenen Art bedeutet, zur Ableitung ebenfalls die Function $f(x)$, mit Ausnahme des discreten Punktsystems, in welchem die Ableitung von $\varphi(x)$ von null verschieden ist. Der Satz bleibt vielmehr, wie im folgenden Paragraphen

gezeigt werden soll, nur dann allgemein gültig, wenn die Ableitungen der beiden Functionen durchaus endlich sind. Der Beweis, mit dem ich früher (Math. Annal. B. 19. Lehrsatz 3 bis 5) auch die Fälle des unendlich Werdens zu umfassen suchte, basirte auf der Annahme, dass eine in jedem kleinste Theile unstetige Menge sich nicht eindeutig auf eine stetige so abbilden lasse, dass zweien Elementen a_1 und a_2 der unstetigen Menge, für welche $a_2 > a_1$ ist, auch immer zwei Elemente a_1' und a_2' der stetigen entsprechen, für welche $a_2' > a_1'$ ist, eine Annahme, die ich in einer späteren Note (B. 23, pag. 285) wiederlegen musste. Durch die besonderen Functionen, deren Existenz ich bereits vor der Ausarbeitung dieser letzteren Note erkannt habe, wird vielmehr gerade solch eine Abbildung herbeigeführt.*)

Zweitens. Kennt man eine stetige Function $F(x)$ mit der integrirbaren Ableitung $F'(x)$, so ist für jedes Intervall, in welchem $F'(x)$ endlich ist, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird,

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Dagegen darf man nicht mehr schliessen, dass für ein Intervall von a bis x, in welchem Unendlichkeitspunkte der Function $F'(x)$ in discreter Menge ohne Isolationen liegen, auch

$$\int_{a}^{x} F'(x)dx = F(x) - F(a)$$

ist.

Zusätze. 1. Für die behandelten Functionen ist der Umstand wesentlich, dass die Unendlichkeitspunkte der Ableitung ein System ohne Isolationen und von der zweiten Mächtigkeit bilden; es ist nicht möglich, solche Functionen, in denen die Ableitung überall mit Ausnahme discreter Punkte null ist, herzustellen, wenn die Unendlichkeitspunkte isolirt sind und nur eine Menge von der ersten Mächtigkeit bilden. Es folgt dies aus dem Lehrsatz 3 im § 2. Th. I mit seinem Folgesatze, sowie aus meiner oben citirten Note über die Abbildung einer unstetigen Mannigfaltigkeit auf eine stetige.

2. Die Unendlichkeitspunkte der Ableitung für eine monotone Function dieser Art können in keinem noch so kleinem Intervalle überall dicht sein, wie aus meiner Note über die besondere Art der Abbildung stetiger und unstetiger Mannigfaltigkeiten hervorgeht. Dagegen würde es auch möglich sein, stetige Functionen herzustellen,

*) Im Eingang der genannten Note ist die Aussage: „die discontinuirliche Mannigfaltigkeit darf *keine isolirten Punkte* enthalten" nicht correct; es muss statt dessen heissen: „*nicht zwei aufeinander folgende getrennte Punkte*", wie es im Beweise selbst schon ausgesprochen ist.

die nicht, wie die hier eingeführten, monoton sind; aber auch für diese Functionen können die Ausnahmestellen nicht eine Menge von der ersten Mächtigkeit bilden, weil sich auch hier eine eindeutige Abbildung einer stetigen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige von der besprochenen Art herstellen lässt.

3. Für diese Functionen ist noch charakteristisch, dass

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

nicht gleich null wird bei allen Werthen von x, woraus hervorgeht, dass der Satz von Rolle (Th. I, § 2. Lehrs. 6) hier keine Anwendung findet, so dass also in der That nur die Werthe 0 und ∞ für die Differentialquotienten vorzukommen brauchen.

4. Bemerkenswerth ist noch die Frage nach der Curvenlänge dieser Functionen. Betrachtet man das zuerst gegebene Beispiel einer Function, die, während x von 0 bis 1 variirt, die Werthe von 0 bis 1 annimmt, und dabei alle Werthe von der Form $\frac{a}{2^n}$ in Intervallen von der Länge $\frac{1}{3\,.\,4^{n-1}}$ besitzt, so erkennt man, dass die gewöhnliche Integralbestimmung der Curvenlänge zu einem unrichtigen Resultat führt. Werden nämlich die singulären, discreten Stellen der Function in Intervalle eingeschlossen, deren Summe ε beliebig klein ist, und wird für alle übrigen Intervalle

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

gebildet, so wird die Summe dieser Integrale, da $\frac{dy}{dx}=0$ ist, gleich $1-\varepsilon$. Lässt man ε nach null convergiren, so convergirt dieser Werth nach 1, die Curvenlänge wäre demnach ebenso gross, wie ihre Projection auf die x-Axe. Betrachtet man dagegen die Länge der Function in ihrer allmäligen Erzeugung, so erhält man folgendes Resultat. Nach der ersten Construction ist die Länge der gebrochenen Linie: $l=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, nach der zweiten ist $l=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$, allgemein: hat man in z Intervallen schräge Gerade, wobei z eine Potenz von 2 ist, so ist die Länge solch eines Intervalles gleich $\frac{1}{z^2}$, der Richtungscoefficient der Geraden gleich z, und ihre Länge gleich $\frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2}$. Demnach wird die Curvenlänge

$$l=1-\frac{1}{z}+z\frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2}=\frac{z-1}{z}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}.$$

Lässt man z unendlich werden, so convergirt diese Länge nach dem Werthe 2.*)

Definition für ein unendliches Intervall. Ist die Function $f(x)$ definirt für ein Intervall von a bis ∞, so bedeutet $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ den Grenzwerth, welchem sich das Integral $\int\limits_a^w f(x)\,dx$ annähert, wenn man die obere Grenze w unbeschränkt wachsen lässt. Wird die Function im Intervalle von a bis w auch unendlich, so sind zwei Grenzprocesse auszuführen. Man kann dieselben vereinigen, wenn man das Intervall durch die reciproke Substitution auf ein endliches zurückführt. Aus derselben erkennt man, dass eine unzweideutige Definition des Integrales

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{w=\infty}\ \lim_{f_1=f}\int\limits_a^w f_1(x)\,dx = \lim_{f_1=f}\ \lim_{w=\infty}\int\limits_a^w f_1(x)\,dx$$

gewonnen wird, sobald die Function $f_1(x)$, welche die Function $f(x)$ darstellt, mit Ausnahme gewisser beliebig kleiner Intervalle, in denen die Unendlichkeitsstellen liegen, die Eigenschaft hat, dass

$$\int\limits_w^{w'} f_1(x)\,dx$$

beliebig klein gemacht werden kann, lediglich durch Wahl einer unteren Grenze w bei noch so grossen Werthen von w', und bei noch so kleiner Wahl der Intervallsumme für alle Unendlichkeitsstellen der Function $f(x)$ innerhalb des Intervalls ww'.

Anhang. Der oben angeführte Beweis (Math. Annal. B. 19, pag. 240) verliert nur seine Gültigkeit, wenn man allgemein ein discretes System von Ausnahmepunkten zu betrachten hat, da dieses auch die Mächtigkeit der stetigen Zahlenreihe besitzen kann. Dagegen bleibt er vollkommen bestehen, wenn man annimmt, dass die Ausnahmepunkte nur eine „abzählbare" Menge im engeren Sinne bilden, d. h. eine Menge, welche von der *ersten* Mächtigkeit ist. Alsdann sind dort die folgenden Sätze bewiesen.

1. *Wenn für eine stetige Function $f(x)$ an jeder Stelle eines Intervalles mit Ausnahme einer abzählbaren Menge eine obere Grenze für Δx angegeben werden kann, so dass $f(x+\Delta x) - f(x)$ nicht negativ (resp. positiv) wird, so ist $f(x+\Delta x) - f(x)$ an keiner Stelle negativ (resp. positiv), wie klein auch immer $\Delta x > 0$ gewählt wird.*

---

*) Die Fälle, in denen die Integralregel der Rectification versagt, sind, wie ich nach Vollendung der obigen Bemerkung ersehen habe, zum Gegenstande einer allgemeinen Untersuchung von Herrn Scheeffer (Acta Math. B. V, 1) neuerdings gemacht worden.

2. *Weiss man von einer in einem Intervall durchweg stetigen Function, dass sie überall mit Ausnahme einer abzählbaren Menge constant sein muss, so ist die Function im ganzen Intervalle constant, d. h. sie hat ausnahmslos an allen Stellen denselben Werth.*
3. *Wenn sich bei einer stetigen Function $f(x)$ an jeder Stelle des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ mit Ausnahme einer abzählbaren Menge eine obere Grenze für Δx angeben lässt, so dass*

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

kleiner als eine beliebig kleine Grösse δ wird, so ist die Function $f(x)$ in dem ganzen Intervalle constant.

§ 3.

Das Integral des ersten Differentialquotienten.

Lehrsatz 1. Der vor- oder rückwärts gebildete Differentialquotient des Integrales $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ ist im allgemeinen gleich dem Werthe der Function $f(x)$. Die Stellen, an denen er unendlich wird, oder sich von diesem Werthe um mehr als eine endliche Grösse σ unterscheidet, bilden eine discrete Menge (Math. Annal. B. 19. Lehrs. 8).

Beweis. Alle Stellen, an denen die Schwankungen der integrirbaren Function $f(x)$ unendlich oder grösser als eine endliche Zahl σ sind, schliesse man in Intervalle ein, deren Summe beliebig klein ist. Alsdann folgt für alle übrigen Punkte aus der Gleichung

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(x)\,dx$$

erstens: Ist in der Umgebung der Stelle x vorwärts genommen die Function $f(x)$ stetig, so wird

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x+0) = f(x)$$

zweitens: Ist $\lim\limits_{h=0} f(x+h)$ zwar bestimmt, aber von $f(x)$ verschieden, so muss die Differenz kleiner sein als σ, und es wird

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x+0) = f(x) \pm (< \sigma)$$

drittens: Wird $\lim\limits_{h=0} f(x+h)$ unbestimmt, so müssen doch die Schwankungen schliesslich gleich oder kleiner sein als σ. Ist dann G die obere Grenze der Functionswerthe im Intervalle von x bis $x+h$, g die untere, so ist:

$$G > \frac{F(x+h) - F(x)}{h} > g.$$

Convergirt h nach 0, so braucht der Quotient keinen bestimmten Grenzwerth zu erhalten; er bleibt aber immer zwischen den Grenzen G und g eingeschlossen, und diese selbst convergiren — die erste, indem sie entweder constant bleibt oder nur abnimmt, die andere, indem sie entweder constant bleibt oder nur wächst — nach bestimmten Grenzen G' und g', deren Differenz kleiner ist, als σ. Es liegt also $\lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, mag es nun bestimmt sein oder nicht, zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen von $f(x)$, deren Differenz gleich oder oder kleiner als σ ist. (Sollte der Werth von $f(x)$ ausserhalb der Unbestimmtheitsgrenzen G' und g' definirt sein, so können doch die extremen Werthunterschiede nicht grösser sein als σ, denn sonst gehörte diese Stelle zu den gleich anfangs ausgeschlossenen). Die Punkte an denen der Unterschied zwischen $F'(x)$ und $f(x)$ grösser werden kann als σ, oder an denen der Differentialquotient unendlich wird, sind die ausgeschlossenen discreten. Der Differentialquotient wird nicht unendlich, sobald $f(x)$ durchaus endlich ist.

Der Begriff der Unbestimmtheitsgrenzen ist zuerst von Herrn du Bois-Reymond präcisirt worden.

Zusätze. Für den rückwärts gebildeten Differentialquotienten, sowie für den mittleren: $\lim \frac{F(x+\Delta x)-F(x-\Delta x)}{2\Delta x}$ und jeden allgemeinen: $\lim \frac{F(x+\Delta x)-F(x+\Delta' x)}{\Delta x - \Delta' x}$ gilt derselbe Satz.

Da die Stellen, an denen die Werthe $f(x+0)$ und $f(x-0)$ um mehr als σ von einander differiren, sowie auch die Stellen, an denen die Unbestimmtheitsgrenzen G' und g' im Intervalle von x bis $x+h$, und G'' und g'' im Intervalle von x bis $x-h$ sich in ihren extremen Werthen schliesslich um mehr als σ unterscheiden, ferner auch die Stellen, an denen $f(x+0)$ oder $f(x-0)$ einzeln oder beide unendlich werden, stets nur discrete sind, so erkennt man, dass sich der vorwärts gebildete Differentialquotient des Integrales von dem rückwärts gebildeten, oder von jedem allgemeinen nur in Punkten einer discreten Menge um mehr als σ unterscheidet, und dass jeder derselben nur in discreten Punkten unendlich wird. Diese Differentialquotienten liefern daher auch umgekehrt alle wieder dasselbe Integral.

Lehrsatz 2. Ist für eine stetige Function $f(x)$, nach Ausschluss von Punkten durch Intervalle von endlicher Zahl mit der Gesammtlänge ε, an jeder Stelle x ein und derselbe Werth von Δx ausreichend, um die Ungleichung

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < \delta$$

zu erfüllen, wobei δ schliesslich unbegrenzt klein wird, ist ferner

$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ durchaus endlich, und convergirt ε mit Δx nach null, so ist die Function $f(x)$ eine Constante.

Beweis. Man bilde

$$\int_0^b f(x+\alpha)\,d\alpha = \varphi(x)$$

wobei x und $x+b$ zwei beliebige Stellen innerhalb des Intervalls bedeuten, für welches $f(x)$ definirt ist, so ist $\varphi(x)$ eine stetige Function, und

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \int_0^b \frac{f(x+\Delta x+\alpha)-f(x+\alpha)}{\Delta x}\,d\alpha.$$

Da nun $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ überall mit Ausnahme der ausgeschlossenen Punkte kleiner wird als δ durch Wahl von Δx, so wird, wenn K den grössten Betrag bezeichnet, den $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ im Innern der Intervalle mit der Gesammtlänge ε annimmt,

$$\operatorname{abs}\left[\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right] < \delta b + K\varepsilon.$$

Lässt man δ mit Δx nach null convergiren, und ebenso ε, so bleibt dabei K endlich, weil jeder Werth K zu dem Werthevorrath von $\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ gehören muss (Th. I, § 2, Lehrs. 5) und dieser Werthevorrath der Voraussetzung nach endlich ist. Demnach wird bei jedem Werthe von x

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = 0.$$

Mithin ist $\varphi(x)$ in Bezug auf x eine constante Grösse, die nur noch mit b variiren kann (Th. I, § 2, Lehrs. 7). Setzt man

$$\int_0^b f(x+\alpha)\,d\alpha = \Phi(b) - \Phi(0),$$

so folgt, wenn man b nach 0 convergiren lässt, da $f(x+\alpha)$ eine stetige Function von α sein sollte, dass auch

$$\lim_{b=0} \frac{1}{b}\int_0^b f(x+\alpha)\,d\alpha = \lim \frac{\Phi(b)-\Phi(0)}{b} = f(x)$$

eine bestimmte von x unabhängige Constante sein muss.

Diese Beweismethode der Integralbildung ist von Herrn du Bois-Reymond (Abhandl. der k. bayerisch. Akad. II. Classe B. 12) angewandt worden. Sie lässt sich im vorliegenden Falle auch durch

eine directe Summation der Ungleichungen $f(x+\Delta x)-f(x)<\delta\Delta x$ ersetzen.

Bemerkung. Da es sich hier um eine „im allgemeinen" gleichmässige Convergenz des Differenzenquotienten handelt, so gilt der Satz ohne weiteres für den allgemeinen ersten Differentialquotienten. Uebrigens genügt es auch anzunehmen, dass nach Ausschluss discreter Punkte an jeder anderen Stelle $\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < \delta$ wird. Die gleichmässige Convergenz ist dann nach Th. I, § 2, Lehrsatz 5 eine daraus abzuleitende Folgerung.

Lehrsatz 3. Besitzt eine stetige Function $F(x)$ einen überall endlichen integrirbaren vorwärts gebildeten Differentialquotienten $f(x)$, so ist umgekehrt das Integral dieser Function von $F(x)$ nur um eine Constante unterschieden.

Beweis. Man setze:

$$\int_a^x f(x)\,dx - F(x) = \varphi(x),$$

so ist:

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx - \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Der Werth der Differenzenquotienten $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ ist unter dem Werthevorrath der Function $f(x)$ im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ enthalten (Th. I, § 2, Satz 5). Alle die Stellen x, an denen die Schwankungen dieses Werthevorrathes innerhalb eines Intervalles von der Länge x bis $x+\Delta x$ grösser sind als eine bestimmte beliebig kleine Zahl δ, schliesse man in Intervalle ein, deren Summe mit ε bezeichnet sei; so convergirt, da $f(x)$ integrirbar ist, ε nach 0, wenn man Δx zu 0 werden lässt. An allen Stellen, welche nicht zu den ausgeschlossenen gehören, sind die Werthe der Quotienten $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ um weniger als δ von dem Werthe des Integrales $\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx$ unterschieden. Mithin hat $\varphi(x)$ die Eigenschaft, dass nach Ausschluss von Punkten, deren Intervallsumme beliebig klein wird,

$$\lim\left[\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right] < \delta$$

wird. Ausserdem ist dieser Quotient durchaus endlich. Sonach ist, wie im vorigen Satze mit der zugehörigen Bemerkung bewiesen wurde, $\varphi(x)$ constant, d. h.

$$\int_a^x f(x)\,dx - F(x) = \text{Const}; \quad \text{oder} \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Zusatz 1. Wird die Ableitung der Function $F(x)$ auch unendlich, bilden aber die Unendlichkeitspunkte eine reductibele Menge, so kann man nach dem Lehrsatze 3 im § 2 ohne weiteres schliessen, dass auch dann noch die Gleichung

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

besteht. Bilden aber die Unendlichkeitspunkte ein System ohne Isolationen, so muss man nach den weiteren Entwickelungen, die an diesen Satz geknüpft wurden, noch voraussetzen, dass für die Function $F(x)$ immer

$$\lim\,[F(y_1) - F(y_2)] + [F(y_3) - F(y_4)] + \cdots [F(y_{n-1}) - F(y_n)] = 0$$

wird, wenn sämmtliche Strecken y_1y_2, $y_3y_4, \ldots y_{n-1}y_n$, sowie ihre Summe nach null convergiren.

Zusatz 2. Bedeutet $f(x)$ den rückwärts gebildeten Differentialquotienten der Function $F(x)$ oder den mittleren, so gilt unter den gleichen Voraussetzungen auch derselbe Satz. Denn auf Grund der Sätze im § 3 des ersten Theiles lässt sich der nämliche Beweis durchführen.

Zusatz 3. Bedeutet $f(x)$ den allgemein gebildeten Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta x = 0\ \Delta' = 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x+\Delta' x)}{\Delta x - \Delta' x} \quad \text{oder} \quad \lim_{\Delta x = 0\ \varepsilon = 0} \frac{F(x+\varepsilon+\Delta x) - F(x+\varepsilon)}{\Delta x}$$

so ist der Satz auf Grund des Lehrsatzes 9 (Th. I, § 2), sowie der am Schlusse des § 3, Th. I, gemachten Bemerkung ebenfalls beweisbar, wenigstens für den Fall, dass die Grössen Δx, $\Delta' x$, oder ε, stetig sind und unveränderliche Vorzeichen besitzen.

Lehrsatz 4. Besitzt eine stetige Function $F(x)$ einen überall endlichen integrirbaren vorwärts gebildeten Differentialquotienten $f(x)$, so besitzt sie auch einen integrirbaren rückwärts gebildeten, und ebenso ist der mittlere, sowie der allgemeine Differentialquotient integrirbar. Alle diese Functionen liefern zwischen denselben Grenzen a und x auch dasselbe Integral nämlich $F(x) - F(a)$.

Beweis. Ist der vorwärts gebildete Differentialquotient $f(x)$ und folglich

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$$

so ist:

$$\frac{F(x-\Delta x)-F(x)}{-\Delta x}=-\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x-\Delta x}f(x)dx=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x-\Delta x}^{x}f(x)dx$$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x+\Delta' x)}{\Delta x-\Delta' x}=\frac{1}{\Delta x-\Delta' x}\int\limits_{x+\Delta' x}^{x+\Delta x}f(x)dx.$$

Da der Werth des Differenzenquotienten $\frac{F(x-\Delta x)-F(x)}{-\Delta x}$ unter dem Werthevorrath der Function $f(x)$ im Intervalle von x bis $x-\Delta x$ enthalten ist, so ist auch der Grenzwerth dieses Quotienten nur in Punkten einer discreten Menge um mehr als σ von $f(x)$ unterschieden. Desgleichen wird, wenn man Δx und $\Delta' x$ in irgend welcher Weise stetig nach null convergiren lässt, da mit Ausnahme discreter Punkte der Werthevorrath der Function $f(x)$ im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ und x bis $x+\Delta' x$ schliesslich nur Schwankungen erleidet, die kleiner sind als eine beliebig kleine endliche Zahl σ

$$\lim\frac{F(x+\Delta x)-F(x+\Delta' x)}{\Delta x-\Delta' x}=f(x)\pm(<\sigma),$$

woraus das Behauptete folgt. Sämmtliche Differentialquotienten bleiben, wenn $f(x)$ endlich ist, ebenfalls endlich. Uebrigens ist der Satz auch schon in der Bemerkung zum 1. Lehrsatz vollständig enthalten.

Zusatz 1. Wird der vorwärts gebildete Differentialquotient unendlich, aber nur in Punkten einer reductibelen Menge, so bleibt der Satz ohne weiteres bestehen. Im allgemeinsten Falle muss man, um schliessen zu können, dass alle Integrale den Werth $F(x)-F(a)$ haben, noch hinzufügen, dass $F(x)$ eine Integralfunction ist.

Zusatz 2. Auf Grund der Zusätze 2 und 3 des vorigen Lehrsatzes kann man den analogen Satz auch beweisen, wenn $f(x)$ den rückwärts gebildeten, oder den mittleren, oder auch den allgemeinen Differentialquotienten von $F(x)$ bedeutet.

Mit Hülfe der vorstehenden Sätze kann man einsehen, unter welchen Bedingungen *der Satz von der theilweisen Integration* Gültigkeit hat, welcher im folgenden zur Anwendung kommen wird, und den wir um des Einflusses der Unendlichkeitspunkte willen prüfen müssen. Es sei zu bilden

$$\int\limits_a^x f(x)\varphi(x)dx.$$

Die Function $\varphi(x)$ sei durchaus endlich und integrirbar, ferner sei $f(x)$ eine Integralfunction, d. h. sie besitze eine Ableitung $f'(x)$, die integrirbar ist, mag diese auch in discreten Punkten unendlich werden, so dass

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\,dx$$

ist; $f(x)$ ist also stetig. Setzt man nun

$$f(x) \int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x),$$

so ist auch $F(x)$ eine stetige Function, und es wird

$$f'(x) \int_a^x \varphi(x)\,dx + f(x)\varphi(x) = F'(x).$$

Ist nun diese abgeleitete Function ebenfalls integrirbar und ihr Integral gleich $F(x)$, so folgt:

$$\int_a^x dx f'(x) \int_a^x \varphi(x)\,dx + \int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx = F(x) - F(a) = f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

oder

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx - \int_a^x dx f'(x) \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

Die Integrirbarkeit von $F'(x)$ ist eine Folge der Integrirbarkeit von $f'(x)$, sobald $f'(x)$ durchaus endlich ist, oder nur in Punkten einer reductibelen Menge unendlich wird. (§ 2, Lehrs. 3.) Aber auch, wenn die stetige Function $\int^x \varphi(x)\,dx$ keinen Wechsel der Zu- und Abnahme erleidet, oder auch nur, was auf dasselbe hinauskommt, nicht unendlich oft oscillirt, folgt aus der Integrirbarkeit von $f'(x)$, auch wenn diese Function in irreductibelen Punkten unendlich wird, die Integrirbarkeit von $F'(x)$. Denn es ist, wenn man die Unendlichkeitspunkte von $f'(x)$ in Intervalle eingeschlossen hat, $y_1 y_2,\ y_3 y_4,\ \dots\ y_{n-1} y_n$, deren Summe gleich oder kleiner ist als ε:

$$\begin{aligned}&[F(y_2) - F(y_1)] + [F(y_4) - F(y_3)] + \cdots + [F(y_n) - F(y_{n-1})]\\ &= [f(y_2)\Phi(y_2) - f(y_1)\Phi(y_1)] + [f(y_4)\Phi(y_4) - f(y_3)\Phi(y_3)] + \cdots\\ &\qquad + [f(y_n)\Phi(y_n) - f(y_{n-1})\Phi(y_{n-1})],\end{aligned}$$

wobei $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx$ ist. Wenn nun die Function $\varphi(x)$ durchaus zunimmt (oder abnimmt), so ist

$$\begin{aligned}
\Phi(y_2) &= \Phi(y_1) \quad + \delta_1 \\
\Phi(y_4) &= \Phi(y_3) \quad + \delta_2 \\
\Phi(y_6) &= \Phi(y_5) \quad + \delta_3 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Phi(y_n) &= \Phi(y_{n-1}) + \delta_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

also die obige Summe gleich:

$$\Phi(y_1)\,[f(y_2)-f(y_1)]+\Phi(y_3)\,[f(y_4)-f(y_3)]+\cdots+\Phi(y_{n-1})[f(y_n)-f(y_{n-1})]$$
$$+\delta_1 f(y_2)+\delta_2 f(y_4)+\cdots+\delta_{\frac{n}{2}} f(y_n).$$

Der erste Theil dieser Summe ist, da $\Phi(y_1)$, $\Phi(y_3)\cdots\Phi(y_{n-1})$ eine Reihe von zunehmenden endlichen Grössen bezeichnen, und da die Summen:

$$[f(y_2)-f(y_1)],\quad [f(y_2)-f(y_1)]+[f(y_4)-f(y_3)],$$
$$[f(y_2)-f(y_1)]+[f(y_4)-f(y_3)]+[f(y_6)-f(y_5)],\cdots$$

unabhängig von ihrer Gliederzahl durch Wahl von ε kleiner gemacht werden können, als eine beliebig kleine Zahl δ, nach einem Abelschen Satze, dem zweiten Mittelwerthsatze, selbst eine beliebig kleine Grösse. Desgleichen ist

$$\delta_1 f(y_2)+\delta_2 f(y_4)+\delta_3 f(y_6)+\cdots+\delta_{\frac{n}{2}} f(y_n)$$

weil die Grössen δ alle von einerlei Zeichen sind, dem Betrage nach nicht grösser als das Product der Summe $\left(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\frac{n}{2}}\right)$ mit dem grössten Werthe, den die Function $f(x)$ überhaupt annimmt. Diese Summe aber wird, da $\Phi(x)$ eine Integralfunction ist, beliebig klein.

§ 4.

Das zweifache Integral des zweiten Differentialquotienten.

Lehrsatz 1. Der vorwärts gebildete zweite Differentialquotient des Integrales:

$$F(x)=\int_a^x dx\int_a^x f(x)\,dx=\int_a^x (x-z)f(z)\,dz+(x-a)\int_a^a f(z)\,dz$$

in welchem $f(x)$ eine integrirbare Function bedeutet, ist im allgemeinen gleich $f(x)$. Die Stellen, an denen er unendlich wird, oder sich von diesem Werthe um mehr als eine beliebige endliche Grösse σ unterscheidet, bilden eine discrete Menge.

Beweis. Alle Stellen, an denen $f(x)$ unendlich wird, oder in deren vorwärts genommener Umgebung die Schwankungen von $f(x)$ grösser bleiben als eine bestimmte Zahl σ, schliesse man in Intervalle ein,

deren Summe ε beliebig klein wird. Alsdann folgt für alle übrigen Punkte aus der Gleichung:

$$\frac{F(x+2\Delta x)-2F(x+\Delta x)+F(x)}{\Delta x^2}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} f(x+\Delta x+z)dz-\frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x}[f(x+\Delta x+z)-f(x+z)]dz$$

$$=\frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x}[f(x+\Delta x+z)+f(x+\Delta x-z)](\Delta x-z)dz$$

erstens: Ist in der Umgebung der Stelle x, vorwärts genommen, die Function $f(x)$ stetig, so wird

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta^2 x}=f(x+0)=f(x)$$

zweitens: Ist $\lim f(x+h)$ für $h=0$ zwar bestimmt, aber von $f(x)$ verschieden, so muss die Differenz kleiner sein als σ, und es ist:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}=f(x+0)=f(x)\pm(<\sigma),$$

drittens: Ist $\lim f(x+h)$ unbestimmt, so sind die Schwankungen doch kleiner als σ, und es ist, wenn G den Maximalwerth der Function $f(x)$ im Intervalle von x bis $x+2\Delta x$, g den Minimalwerth bezeichnet,

$$G>\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}>g$$

also ist

$$\lim G>\lim\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}>\lim g$$

und der Unterschied dieser beiden Grenzen ist kleiner als σ.

Der Differentialquotient wird nicht unendlich, sobald $f(x)$ durchaus endlich ist. Für den rückwärts gebildeten Quotienten, sowie für den mittleren;

$$\frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$=\frac{\Delta_m^2 F(x)}{\Delta x^2}=\frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x}[f(x+z)+f(x-z)](\Delta x-z)dz$$

gilt derselbe Satz.

Diese Differentialquotienten können sich auch nur in discreten Punkten um mehr als σ von einander unterscheiden.

Lehrsatz 2. Ist für eine stetige Function $f(x)$, nach Ausschluss von Punkten durch Intervalle von endlicher Anzahl mit der Gesammtlänge ε, an jeder Stelle x ein und derselbe Werth von Δx ausreichend, um die Ungleichung

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} < \delta$$

zu erfüllen, wobei δ schliesslich beliebig klein wird, ist ferner der Werthevorrath des Quotienten $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta^2 x}$ durchaus endlich, und convergirt ε mit Δx nach null, so ist $f(x)$ eine lineare Function oder constant.

Beweis. Man bilde:

$$\int_0^b f(x+\alpha)\,d\alpha = \varphi(x)$$

so ist

$$\frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \int_0^b \frac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{\Delta x^2}\,d\alpha.$$

Da nun $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ überall mit Ausnahme der ausgeschlossenen Punkte kleiner wird als δ durch Wahl von Δx, so wird, wenn K den grössten Betrag bezeichnet, den $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ im Innern der Intervalle mit der Gesammtlänge ε annimmt,

$$\text{abs}\,\frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} < \delta b + \varepsilon K.$$

Lässt man δ mit Δx nach 0 convergiren, und ebenso ε, so wird weil K endlich bleibt,

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = 0,$$

bei jedem Werthe von x. Ferner ist auch

$$\lim \frac{\Delta^+ \varphi(x) + \Delta^- \varphi(x)}{\Delta x} = \lim \int_0^b \frac{\Delta^+ f(x+\alpha) + \Delta^- f(x+\alpha)}{\Delta x}\,d\alpha = 0.$$

Denn da der Werthevorrath des Quotienten $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ nur Werthe enthält, die kleiner sind als K, so ist auch

$$\text{abs}\,\frac{\Delta^+ f(x) + \Delta^- f(x)}{\Delta x} < K\Delta x.$$

Mithin ist nach Lehrsatz 7 des § 4 Th. I $\varphi(x)$ eine lineare Function von x. Es besteht also die Gleichung

$$\int_0^b f(x+\alpha)\,d\alpha = C_1 x + C_2$$

in welcher die Grössen C_1 und C_2 von x unabhängig, Functionen von b sind.

Da $f(x)$ eine stetige Function sein soll, so wird auch

$$\lim_{b=0} \frac{1}{b} \int_0^b f(x+\alpha)\, d\alpha = f(x) = x \lim \frac{C_1}{b} + \lim \frac{C_2}{b}$$

also eine lineare Function mit constanten Coefficienten.

Auch hier könnte der Beweis durch eine directe Summation der gegebenen Ungleichungen geführt werden, doch lässt er sich in der vorstehenden Form kürzer formuliren*).

Bemerkungen. Anstatt zu sagen, der Werthevorrath von $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ bleibt endlich, kann man auch die Bedingung einführen, dass $\lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ überall endlich ist, und dass $\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x}$ allenthalben gleich Null wird. Auf Grund des Satzes 5, § 4, Th. I kann man dann schliessen, dass der Werthevorrath endlich bleibt.

Ebenso ist die Bedingung, dass an allen Punkten x, welche nicht zu den ausgeschlossenen gehören, ein und derselbe Werth von Δx ausreichend ist, um die Ungleichung $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} < \delta$ zu bestimmen, von selbst erfüllt, sobald $\lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} < \delta$ wird an allen diesen Punkten, und $\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x}$ allenthalben gleich Null ist.

Zusatz. Derselbe Satz gilt auch für den rückwärts genommenen Quotienten $\frac{\Delta_-^2 f(x)}{\Delta x^2}$. Für den mittleren genügt es, die Bedingung auszusprechen, dass $\lim \frac{\Delta_m^2 f(x)}{\Delta x^2}$ kleiner als δ wird, überall bis auf discrete Punkte, und dass dieser Grenzwerth allenthalben endlich ist. Alsdann bestehen bereits auf Grund des Satzes 5, § 5, Th. I die erforderlichen Eigenschaften, um nach der obigen Methode zu erkennen, dass für die Function $\varphi(x)$ allenthalben $\lim \frac{\Delta_m^2 \varphi(x)}{\Delta x^2}$ gleich Null wird, dass also nach Satz 7, § 5, Th. I $\varphi(x)$ eine lineare Function ist.

Lehrsatz 3. Besitzt eine stetige Function $F(x)$ einen überall endlichen integrirbaren vorwärts gebildeten zweiten Differentialquotienten $f(x)$, ist ferner $\lim \frac{\Delta^+ F(x) + \Delta^- F(x)}{\Delta x}$ allenthalben gleich Null, so ist das zweifache Integral von $f(x)$:

$$\int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx$$

von $F(x)$ nur um eine lineare Function unterschieden.

---

*) Durch die Methode der Summation ist der analoge Satz in der Abhandlung des Herrn Hölder (§ 3) bewiesen.

Beweis. Man bilde

$$\varphi(x) = F(x) - \int_a^x dx \int_a^x f(x)\,dx$$

so wird

$$\frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x} [f(x+\Delta x+z) + f(x+\Delta x-z)](\Delta x - z)\,dz.$$

Alle die Stellen, an denen die Schwankungen der Function $f(x)$ innerhalb eines beliebig kleinen Intervalles $2\Delta x$ schliesslich grösser bleiben als eine beliebig kleine Zahl δ, schliesse man in Intervalle ein, deren Summe ε beliebig klein gemacht werden kann. Die stetige Function $\varphi(x)$ hat nun folgende Eigenschaften.

Erstens ist der Werthevorrath von $\frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2}$ durchaus endlich; denn es ist der Werthevorrath von $f(x)$ und folglich auch von $\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ durchaus endlich. Würde nämlich $\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ nicht durchaus endlich sein, so könnte auch $f(x)$ nicht endlich bleiben (Th. I, § 4, Satz 5).

Zweitens.

$$\text{Lim}\, \frac{\Delta^+ \varphi(x) + \Delta^- \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta^+ F(x) + \Delta^- F(x)}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} [f(x+z) + f(x-z)]\,(\Delta x - z)\,dz$$

ist bei jedem Werth von x gleich Null.

Drittens. An allen Stellen, welche nicht zu den ausgeschlossenen discreten gehören, wird $\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} < \delta$. Der Quotient $\frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ ist nämlich, weil $\lim \frac{\Delta^+ F + \Delta^- F}{\Delta x}$ allenthalben gleich Null wird, innerhalb der Werthe gelegen, welche $f(x)$ im Intervalle von x bis $x + 2\Delta x$ annimmt; (Th. I, § 4, Satz 5) und die Schwankungen dieser Werthe werden kleiner als δ.

Diese Bedingungen sind nach dem vorigen Satze hinreichend, um zu schliessen, dass $\varphi(x)$ eine lineare Function ist, d. h. es ist

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\,dx + Cx + C'.$$

Zusatz 1. Ist die Function $f(x)$ nicht überall endlich, jedoch integrirbar, so umschliesse man die Unendlichkeitsstellen mit Intervallen, deren Summe beliebig klein ist. In allen anderen Intervallen ist alsdann die Differenz zwischen der Function $F(x)$ und dem zweifachen Integrale eine lineare Function. Mithin ist in jedem dieser Intervalle die Ableitung

$$F'(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C \quad \text{oder} \quad F'(x) - F'(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Hier bedeutet a bis x ein Intervall, in welchem kein Unendlichkeitspunkt gelegen ist. Bilden nun die Unendlichkeitspunkte von $f(x)$ eine reductibele Menge, und weiss man, dass die Function $F'(x)$ durchaus stetig ist, so kann man schliessen (Lehrs. 3, § 2), dass in jedem Intervalle, auch in einem solchen, welches Unendlichkeitspunkte enthält,

$$F'(x) - F'(a) = \int_a^x f(x)\,dx$$

also:

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\,dx + F'(a)(x-a) + F(a)$$

ist. Um zu schliessen, dass $F'(x)$ stetig ist, genügt es hierbei zu wissen, dass

$$\lim \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

wird, bei jedem Werthe von x. Denn diese Bedingung besagt, dass an jeder Stelle, an welcher $F'(x+0)$ und $F'(x-0)$ einen bestimmten Werth haben, diese Werthe nicht von einander verschieden sind; es werden also sprungweise Werthänderungen der Function $F'(x)$ jedenfalls ausgeschlossen. Betrachtet man nun zunächst einen isolirten Punkt c, an welchem $f(x)$ unendlich wird, so ist in unmittelbarer Umgebung desselben:

$$F'(c-\delta) = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + C, \quad (a < c - \delta),$$

$$F'(c+\delta) = \int_{a_1}^{c+\delta} f(x)\,dx + C', \quad (a_1 > c + \delta),$$

und folglich:

$$F'(c-0) = \int_a^c f(x)\,dx + C, \qquad F'(c+0) = \int_{a_1}^c f(x)\,dx + C'.$$

Da nun

$$F'(c+0) = F'(c-0)$$

sein soll, so ist

$$\int_a^c f(x)\,dx + C = \int_{a_1}^c f(x)\,dx + C',$$

also

$$C' = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + C.$$

Daraus folgt, dass auch für alle Punkte eines Intervalles, *in* welchem *ein* Unendlichkeitspunkt gelegen ist, die Relation gilt:

$$F'(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Mithin kommen isolirte Punkte des Systems nicht mehr in Betracht, und es sind nur noch die Intervalle zu betrachten, welche die Grenzpunkte des Systems der Unendlichkeitspunkte umschliessen. Also reducirt sich die Gesammtheit der singulären Stellen auf die Punkte, welche die Ableitung der ursprünglichen Menge bilden. Von dieser fallen aber wiederum die isolirten Punkte fort, und so werden schliesslich alle Stellen unwesentlich, wenn die Punktmenge eine endliche Anzahl von Ableitungen besitzt. Convergirt aber der Ableitungsprocess nach nach einer bestimmten Punktmenge, so ist nur diese noch zu betrachten, und reducirt sich diese Menge durch einen oder durch mehrere, endliche oder unendliche Ableitungsprocesse auf 0, so sind alle Punkte unwesentlich und die Function $F'(x)$ nicht nur durchaus stetig, sondern zugleich auch

$$F'(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Auch hier lässt sich der Beweis noch einfacher führen, wenn man die Stetigkeit der Function $F'(x)$ von vornherein als bekannt voraussetzt, auf Grund meiner früher genannten Note über Abbildung stetiger und unstetiger Mannigfaltigkeiten*).

Zusatz 2. Anders verhält es sich, wenn die Unendlichkeitsstellen des zweiten Differentialquotienten ein System ohne Isolationen bilden. Um dieses einzusehen, denke man sich eine der im § 2 näher besprochenen stetigen Functionen als Function $\psi(x)$ gegeben, und setze:

$$F(x) = \int_a^x \psi(x)\,dx.$$

Der zweite Differentialquotient $f(x) = \psi'(x)$ dieser Function is alsdann überall gleich null, mit Ausnahme der besonderen Stellen, die ein discretes System ohne Isolationen bilden, und an denen er unendlich wird. Auch ist überall der Grenzwerth von

*) Ein anderer Beweis ist in dem Satze des Herrn Hölder (pag. 194) enthalten.

$$\frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x}\psi(x)\,dx+\int_x^{x-\Delta x}\psi(x)\,dx\right]$$

für $\Delta x = 0$ ebenfalls null. Der zweite Differentialquotient $f(x)$ ist eine integrirbare Function, weil er bis auf discrete Punkte den Werth null hat. Das zweifache Integral desselben ist gleich null; es unterscheidet sich also von $F(x)$ nicht um eine lineare Function.

In diesem Falle reicht es also nicht aus zu wissen, dass die erste Ableitung $F'(x) = \psi(x)$ durchaus stetig ist, oder dass $\lim \frac{\Delta^+ F(x) + \Delta^- F(x)}{\Delta x}$ allenthalben gleich null ist. Es muss noch ausserdem bekannt sein, dass $F'(x)$ eine Integralfunction ist.

Zusatz 3. Derselbe Satz gilt auch, wenn $f(x)$ den rückwärts gebildeten zweiten Differentialquotienten bedeutet. Für den mittleren genügen die Formulirungen:

Besitzt eine stetige Function $F(x)$ einen überall endlichen, integrirbaren zweiten mittleren Differentialquotienten $f(x)$, so ist das zweifache Integral der Function $f(x)$ von $F(x)$ nur um eine lineare Function unterschieden.

Wird $f(x)$ unendlich in Punkten einer reductibelen Menge, so ist noch die Bedingung $\lim \frac{\Delta^+ F(x) + \Delta^- F(x)}{\Delta x}$ nothwendig und ausreichend.

Bilden die Unendlichkeitspunkte ein System ohne Isolationen, so muss $F'(x)$ überdies den Bedingungen einer Integralfunction genügen*).

Lehrsatz 4. Besitzt eine stetige Function $F(x)$ einen überall endlichen, integrirbaren vorwärts gebildeten zweiten Differentialquo-

*) Dieser Satz über den mittleren zweiten Differentialquotienten bildet die Grundlage für die Beweise der beiden Sätze in der Theorie der trigonometrischen Reihen:

Erstens: Zwei trigonometrische Reihen mit verschiedenen Coefficienten können nicht *im allgemeinen* einander gleich sein; d. h. ihre Differenz kann nicht nur in discreten Punkten um eine endliche Grösse von 0 verschieden oder unendlich gross sein. *Zweitens:* Jede trigonometrische Reihe, welche eine integrirbare Function definirt, ist eine Fourier'sche. Die Beweise, welche ich früher für diese Sätze zu geben suchte (Band XIX) sind nur ausreichend, wenn man annimmt, dass die Stellen, an denen die Differenz der beiden Reihen von null verschieden ist, oder die Stellen, an denen die Schwankungen der integrirbaren Function von null verschieden sind, insgesammt eine discrete Menge bilden. Bei dem vorstehenden Beweise des grundlegenden Satzes habe ich die frühere Beweismethode des Herrn du Bois Reymond theilweise benutzt. Aber es muss hervorgehoben werden, dass auch jetzt noch die Beweise für die genannten Sätze nur unter der Voraussetzung geführt sind, dass die Unendlichkeitsstellen eine reductibele, oder was auf dasselbe hinauskommt eine „abzählbare“ Menge bilden, also noch nicht völlig abgeschlossen sind. Es scheint nach alledem nicht unmöglich, dass es trigonometrische Reihen giebt, welche im allgemeinen den Werth null haben, und nur in Punkten einer discreten Menge unendlich werden.

tienten $f(x)$, und ist $\lim \frac{\Delta^+ F(x) + \Delta^- F(x)}{\Delta x} = 0$, so besitzt sie auch einen integrirbaren rückwärts gebildeten, und einen integrirbaren mittleren Differentialquotienten. Alle diese Functionen liefern zwischen denselben Grenzen auch dasselbe zweifache Integral, welches bis auf eine lineare Function gleich $F(x)$ ist.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt die Gleichung:

$$F(x) = \int_a^x f(z)\,(x - z)\,dz + Cx + C'$$

und aus dieser:

$$\frac{F(x - 2\Delta x) - 2F(x - \Delta x) + F(x)}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \int_0^{\Delta x} [f(x - \Delta x + z) + f(x - \Delta x - z)]\,(\Delta x - z)\,dz,$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - 2F(x) + F(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \int_0^{\Delta x} [f(x + z) + f(x - z)]\,(\Delta x - z)\,dz.$$

Lässt man $\Delta(x)$ stetig nach null convergiren, und beachtet dabei, dass alle die Stellen, an denen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser sind als σ, eine discrete Menge bilden, so erkennt man, dass die Grenzwerthe der Quotienten „im allgemeinen" gleich $f(x)$ sind. Sie liefern daher auch dasselbe Integral wie diese Function, und bleiben durchaus endlich, wenn $f(x)$ endlich ist.

Zusatz. Wird der vorwärts gebildete Differentialquotient unendlich, aber nur in Punkten einer reductibelen Menge, so bleibt unter der Voraussetzung der Integrirbarkeit von $f(x)$ der Satz ohne weiteres bestehen. Im allgemeinsten Falle muss noch bekannt sein, dass $F'(x)$ eine Integralfunction ist.

§ 5.

Das n-fache Integral des $n$ten Differentialquotienten.

Für das n-fache Integral einer integrirbaren Function $f(x)$ besteht nach dem Satze der theilweisen Integration die Gleichung:

$$\int_{a_1}^x dx \int_{a_2}^x dx \int_{a_3}^x dx \cdots \int_{a_n}^x f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n-1!} \int_{a_n}^x f(z)\,(x - z)^{n-1}\,dz + C_1 x^{n-2} + C_2 x^{n-3} + \cdots + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

Die Constanten C kann man entweder unmittelbar bei der successiven theilweisen Integration ermitteln, oder auch indem man schliesslich wiederholt nach x differentiirt, und für x jedesmal die Werthe $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ einsetzt. Zusammen mit der directen Gleichung für $x = a_1$ erhält man $n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der Constanten. Für das folgende ist der Grenzwerth des $n$ten Differenzenquotienten des Integrales zu bilden, wobei die lineare Function $n-2$ter Ordnung nicht in Betracht kommt.

Die directe Bildung des $n$ten Differenzenquotienten in Form eines einfachen Integrales führt zu complicirteren Formen, deren allgemeines Gesetz sich zwar feststellen lässt; doch sind sie für das folgende nicht nothwendig. Denn da für das n-fache Integral, welches als Function von x mit $F(x)$ bezeichnet sei, sich successive die Ableitungen $F'(x), F''(x), \ldots, F^{n-1}(x)$ bilden lassen, welche, abgesehen von den Differentialquotienten der ganzen Function $n-2$ter Ordnung bezüglich gleich

$$\frac{1}{n-2!}\int_{a_n}^{x} f(z)(x-z)^{n-2}dz, \quad \frac{1}{n-3!}\int_{a_n}^{x} f(z)(x-z)^{n-3}dz, \ldots, \quad \int_{a_n}^{x} f(z)dz$$

also selbst stetige Functionen sind, so kann der $n$te Differentialquotient nach Lehrsatz 6, § 6, Th. I durch directe Differentiation der $n-1$ten Ableitung bestimmt werden. Es ist

$$\frac{\Delta^{n-1}F(x+\Delta x)-\Delta^{n-1}F(x)}{\Delta x^n} = \frac{F^{n-1}(x+\Delta x+(n-1)\Theta\Delta x)-F^{n-1}(x+(n-1)\Theta\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x+(n-1)\Theta\Delta x}^{x+\Delta x+(n-1)\Theta\Delta x} f(z)\,dz.$$

Dieser Gleichung kann man unmittelbar den Satz entnehmen:

Lehrsatz 1. Der vorwärts gebildete $n$te Differentialquotient des n-fachen Integrales einer integrirbaren Function $f(x)$ ist im allgemeinen gleich $f(x)$. Die Stellen, an denen er unendlich wird, oder sich von diesem Werthe um mehr als eine endliche Grösse σ unterscheidet, bilden eine discrete Menge.

Sodann leitet man ebenso wie in den früheren Paragraphen den Hilfssatz ab:

Lehrsatz 2. Ist für eine stetige Function $f(x)$ nach Ausschluss von Punkten durch Intervalle von endlicher Anzahl mit der Gesammtlänge ε an jeder Stelle x ein und derselbe Werth von Δx ausreichend, um die Ungleichung

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} < \delta$$

zu erfüllen, wobei δ schliesslich unbegrenzt klein wird, ist ferner der Werthevorrath des Quotienten durchaus endlich, und convergirt ε mit Δx nach null, so ist $f(x)$ eine ganze rationale Function von $n - 1$ter oder niederer Ordnung.

Beweis. Man bilde

$$\varphi(x) = \int_0^b f(x + \alpha)\, d\alpha,$$

so ergeben sich für die stetige Function $\varphi(x)$ die beiden Eigenschaften:

Erstens:

$$\lim \frac{\Delta^n \varphi(x)}{\Delta x^n} = 0$$

für jeden Werth von x. Denn es ist

$$\frac{\Delta^n \varphi(x)}{\Delta x^n} = \int_0^b \frac{\Delta^n f(x + \alpha)}{\Delta x^n}\, d\alpha < \delta b + K\varepsilon$$

und δ und ε convergiren nach null, während b und K endlich bleiben.

Zweitens: Der Werthevorrath von $\frac{\Delta^n \varphi(x)}{\Delta x^n}$ ist durchaus endlich.

Daraus folgt nach Satz 4, § 6, Th. I, dass $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von $n - 1$ter oder niederer Ordnung ist; also

$$\int_0^b f(x + \alpha)\, d\alpha = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_{n-1} x + C_n.$$

Die Coefficienten $C_1, \ldots, C_n$ werden Functionen von b sein, können aber nicht mehr von x abhängen; sie verschwinden sämmtlich für $b = 0$. Bildet man

$$\lim_{b=0} \frac{1}{b} \int_0^b f(x + \alpha)\, d\alpha = f(x),$$

so müssen, da $f(x)$ eine bestimmte stetige Function ist, die Coefficienten der rationalen Function

$$f(x) = \lim_{b=0} \frac{C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_{n-1} x + C_n}{b}$$

bestimmte von x unabhängige Grenzwerthe annehmen.

Bemerkung. Die Bedingung, dass nach Ausschluss discreter Punkte ein und derselbe Werth von Δx hinreichend ist, um die Ungleichung $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} < \delta$ zu bestimmen, ist von selbst erfüllt, sobald $\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} < \delta$

wird an allen Punkten mit Ausnahme der discreten Menge, und der Werthevorrath von $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ allenthalben endlich bleibt. (Th. I, § 6, Satz 5).

Lehrsatz 3. Besitzt eine stetige Function $F(x)$ einen überall endlichen, integrirbaren $n$ten Differentialquotienten $f(x)$, definirt durch den Grenzwerth von $\lim \frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n}$, ist ferner der Werthevorrath des $n$ten Differenzenquotienten von $F(x)$ durchaus endlich, so ist das n-fache Integral von $f(x)$, oder auch das Integral

$$\frac{1}{n-1!}\int_a^x f(z)\,(x-z)^{n-1}\,dz$$

von $F(x)$ nur um eine ganze rationale Function $n-1$ter oder niederer Ordnung unterschieden.

Beweis. Man bilde

$$\varphi(x) = \frac{1}{n-1!}\int_a^x f(z)\,(x-z)^{n-1}\,dz - F(x),$$

so hat die stetige Function $\varphi(x)$ folgende Eigenschaften:

1. Der Werthevorrath von $\frac{\Delta^n \varphi(x)}{\Delta x^n}$ ist durchaus endlich; denn es ist

$$\frac{\Delta^n \varphi(x)}{\Delta x^n} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x+\Theta(n-1)\Delta x}^{x+\Delta x+\Theta(n-1)\Delta x} f(z)\,dz - \frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n}.$$

Auf der rechten Seite bleibt der Differenzenquotient des Integrales durchaus endlich, weil $f(x)$ endlich ist, und das zweite Glied ist der Voraussetzung nach endlich.

2. Nach Ausschluss discreter Punkte durch Intervalle von beliebig kleiner Summe ε wird an allen anderen Punkten

$$\lim \frac{\Delta^n \varphi(x)}{\Delta x^n} < \delta.$$

Denn da $f(x)$ eine integrirbare Function ist, so bilden alle die Stellen, in deren vorwärts genommener Umgebung die Schwankungen grösser bleiben als δ, nur eine discrete Menge, und da $f(x)$ der $n$te Differentialquotient von $F(x)$ ist, so liegt $\lim \frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n}$ jedenfalls innerhalb des Werthevorrathes der Function $f(x)$ an der Stelle x. Mithin ist $\varphi(x)$ nach dem vorigen Satze und seiner Bemerkung eine ganze rationale Function von $n-1$ter oder niederer Ordnung. Also

$$F(x) = \frac{1}{\overline{n-1}!}\int_a^x f(z)(x-z)^{n-1}\,dz + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n.$$

Zusatz 1. Ist $f(x)$ stetig und convergirt $\frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n}$ gleichmässig nach dem Werthe $f(x)$, wozu die Stetigkeit von $f(x)$ erforderlich ist, so folgt nach Lehrsatz 1, § 6, Th. I unmittelbar, dass $F(x)$ bis auf eine ganze rationale Function $n-1$ter oder niederer Ordnung gleich dem n-fachen Integrale von $f(x)$ ist.

Zusatz 2. Ist die integrirbare Function $f(x)$ nicht überall endlich, so umschliesse man die Unendlichkeitsstellen mit Intervallen, deren Summe beliebig klein ist. In allen anderen Intervallen ist alsdann die Differenz zwischen der Function $F(x)$ und dem Integrale eine rationale Function. Mithin ist in jedem dieser Intervalle

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\overline{n-2}!}\int_a^x f(z)\,(x-z)^{n-2}\,dz + (n-1)\,C_1 x^{n-2} \\ &\qquad + (n-2)\,C_2 x^{n-3} + \cdots + C_{n-1}, \\ F''(x) &= \frac{1}{\overline{n-3}!}\int_a^x f(z)(x-z)^{n-3}dz + (n-1)(n-2)C_1 x^{n-3} \\ &\qquad + (n-2)(n-3)C_2 x^{n-4} + \cdots + 2C_{n-2}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{n-1}(x) &= \int_a^x f(z)\,dz + (n-1)!\,C_1. \end{aligned}$$

Hier bedeutet a bis x ein Intervall, in welchem kein Unendlichkeitspunkt gelegen ist und die Ableitungen der Function $F(x)$ können in diesen Intervallen sowohl durch successive Differentiation als auch durch die Grenzwerthe der Differenzenquotienten definirt werden. Bilden nun die Unendlichkeitspunkte von $f(x)$ eine reductibele Menge und weiss man, dass die Function $F^{n-1}(x)$ durchaus stetig ist, so kann man schliessen, dass in jedem Intervalle, auch in einem solchen, welches Unendlichkeitspunkte enthält,

$$F^{n-1}(x) = \int_a^x f(z)\,dz + (n-1)!\,C_1$$

ist. Hieraus folgt dann durch successive Integration die Gleichung für $F(x)$, so bald man weiss, dass der Werthevorrath von $\frac{\Delta^{n-1}F(x)}{\Delta x^{n-1}}$ durchaus endlich ist. Diese letztere Bedingung ist nach dem vorigen Lehrsatze erforderlich.

Für die Stetigkeit der Function $F^{n-1}(x)$ ist es wieder ausreichend, dass

$$\lim\left(\frac{\Delta_+^{n-1}F(x)}{\Delta x^{n-1}}-\frac{\Delta_-^{n-1}F(x)}{(-\Delta x)^{n-1}}\right)=0$$

wird. Mithin ist bewiesen:

Wird für eine stetige Function $F(x)$ der $n$te Differentialquotient $\lim\frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n}=f(x)$ auch unendlich in Punkten einer reductibelen Menge, doch so, dass er integrirbar bleibt, ist ferner

$$\lim\left(\frac{\Delta_+^{n-1}F(x)}{\Delta x^{n-1}}-\frac{\Delta_-^{n-1}F(x)}{(-\Delta x)^{n-1}}\right)=0$$

bei jedem Werthe von x, und ist der Werthevorrath von $\frac{\Delta^{n-1}F(x)}{\Delta x^{n-1}}$ durchaus endlich, so ist $F(x)$ gleich dem n-fachen Integrale von $f(x)$ bis auf eine ganze rationale Function von $n-1$ter oder niederer Ordnung.

Für $n=2$ fällt die letzte Bedingung deshalb fort, weil aus der Gleichung

$$\lim\left(\frac{\Delta_+F(x)-\Delta_-F(x)}{\Delta x}\right)=0$$

und der Endlichkeit des Integrales $\int^x f(x)\,dx=F'(x)$ geschlossen werden kann, dass der Werthevorrath von $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ durchaus endlich ist.

Zusatz 3. Bilden die Unendlichkeitspunkte von $f(x)$ ein discretes System ohne Isolationen, so genügt es nicht zu wissen, dass

$$\lim\frac{\Delta^{n-1}F(x)}{\Delta x^{n-1}}=F^{n-1}(x)$$

stetig ist; es muss überdies den Bedingungen einer Integralfunction genügen.

In diesem letzten Paragraphen habe ich die Bedingungen nur für den vorwärts gebildeten $n$ten Differentialquotienten formulirt; für den rückwärts gebildeten gelten sie aber auch ohne weiteres. Mittlere Differentialquotienten lassen sich hier in mannigfacher Weise definiren, und für diese werden sich die Bedingungen möglicherweise in etwas anderer Form aussprechen lassen. Ich halte es aber nicht für nöthig hierauf einzugehen, da man bisher nicht, wie bei dem ersten und zweiten Quotienten, durch bestimmte Probleme dazu Veranlassung hat.

Dresden, September 1883 und April 1884.

Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie.

Von

Oskar Simony in Wien.

(Mit 11 lithograph. Tafeln.)

II.*)

Untersuchung jener Erscheinungen, welche bei einem unverdrehten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden, längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.

Ein unverdrehter biegsamer Ring lässt sich durch einen längs dessen Mittellinie in sich selbst zurücklaufenden Schnitt im Allgemeinen auf *zweifache* Art in ein neues Gebilde verwandeln, indem man den Ring hiebei entweder nur *bis zur Mittellinie* oder aber *vollständig* durchschneiden kann.

Im ersten Falle beträgt die Axendrehung des schneidenden Instrumentes bei Vollendung des Schnittes entweder $\pm 360^0$ oder ein ganzes Vielfaches von $\pm 360^0 : t \times 360^0$, im zweiten Falle entweder $\pm 180^0$ oder ein ganzes Vielfaches von $\pm 180^0 : t \times 180^0$.

Da ferner die um die Mittellinie des betreffenden Ringes erfolgende Drehung des Schnittes in beiden Fällen entweder in einem einzigen Umlaufe oder aber in $2, 3, 4, \ldots, u$ Umläufen vollendet werden kann, liefert die Ausführung derartiger Schnitte eine Fülle verschiedenartiger Gebilde, deren allgemeine Configuration sich zunächst nur auf Grundlage zahlreicher Experimente mit Sicherheit erschliessen lässt.

Zur Vornahme der letzteren benützt man am besten *Hohlringe* aus weichem, vulkanisirtem Kautschuck, welche einen inneren Durchmesser von 6^{cm}, einen äusseren von 10^{cm} und eine Wanddicke von $1-2^{mm}$ besitzen. Man zeichnet sich dann für die in Betracht kommenden Specialisirungen von u und t auf den betreffenden Ringen

---

*) Der erste Theil dieser Abhandlung erschien im XIX. Bd. der „Mathematischen Annalen“ p. 110—120.

jene Linien, in welchen die in sich selbst zurückkehrenden Schnitte deren Oberflächen durchsetzen müssen, und zerschneidet die letzteren schliesslich längs der aufgetragenen Curven. Auf diese Art können alle zwischen 1 und 28 liegenden Specialisirungen von u und t ohne grosse Schwierigkeit realisirt werden, während bei massiven Ringen von gleichen Dimensionen in Folge des bedeutenden und ungleichförmigen Widerstandes, welcher bei der Drehung des Schnittes um die Mittellinie des betreffenden Ringes überwunden werden muss, schon Specialisirungen wie: $u = 3$, $t = 13$; $u = 12$, $t = 5$ nicht mehr mit der wünschenswerthen Präcision darstellbar sind.

Um nun speciell jene Erscheinungen, welche bei Ausführung eines in sich selbst zurücklaufenden Schnittes *erster Art* auftreten, übersichtlich charakterisiren zu können, ist die Einführung verschiedener Hilfsbegriffe nothwendig, wobei wir uns selbstverständlicher Weise so viel als möglich an die im ersten Theile dieser Abhandlung benützte Nomenclatur anschliessen.

Demgemäss ertheilen wir im Folgenden der Drehungszahl t das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Windungen der Grenzlinie des Schnittes auf der Oberfläche des Ringes mit den Windungen in Fig. 2 (Taf. I) oder mit jenen in Fig. 1 gleichsinnig verlaufen. Hiebei treten die einzelnen Theile des zerschnittenen Ringes desto weniger aus ihren ursprünglichen Lagen heraus, je grösser t im Verhältniss zur Umlaufszahl: u gewählt wurde, so dass für $t > 3u$ die Gestalt des ursprünglichen Ringes bei sorgfältiger Ausführung des Schnittes noch deutlich erkennbar bleibt. Dies ist u. A. auch aus den beiden zuvor erwähnten Figuren zu entnehmen, welche speciell für $t = \pm 15$ zwei in vier Umläufen zerschnittene Hohlringe darstellen, deren zwischen je zwei Windungen der Schnittcurve liegende Theile überdies beträchtlich verschmälert wurden.

Die durch den jeweiligen Schnitt erzeugten Gebilde sind stets ringförmig geschlossen, ihre aufeinanderfolgenden Querschnitte bilden, falls der zerschnittene Ring ein massiver war, congruente Kreissectoren von dem Centriwinkel: $\frac{360^0}{u}$, deren Scheitel, wenn λ die Länge der Mittellinie des ursprünglichen Ringes vorstellt, auf einer Linie von der Länge λu liegen. — Zur *vollständigen* Charakteristik dieser Gebilde sind aber ausserdem von Fall zu Fall noch je zwei Angaben erforderlich:

1. Die Angabe jener Zahl: z, durch deren Multiplication mit 360^0 die jeweilige *Verdrehung* des in Betracht gezogenen Gebildes bestimmt wird.

2. Die Angabe der eventuell in demselben auftretenden *Verschlingung.*

Die erstere Angabe wird von Fall zu Fall durch Anwendung eines bekannten Satzes ermöglicht, gemäss welchem jede positive, resp. negative *Ueberkreuzung* zweier unverdrehter Theile eines ringartig geschlossenen Gebildes das Aequivalent einer Torsion um $+360^0$, resp. um -360^0 bilden kann.*) Zeigt also ein im Uebrigen unverdrehtes, ringartig geschlossenes Gebilde a im Sinne der schematischen Fig. 3 (Taf. II) auftretende Ueberkreuzungen, so beträgt dessen Verdrehung: $+a \times 360^0$, während dieselbe, falls die Ueberkreuzungen im Sinne der schematischen Fig. 4 erfolgen, die Grösse: $-a \times 360^0$ besitzt.

Ungleich schwieriger gestaltet sich die jeweilige Formulirung der zweiten Angabe, welcher wir, um hiebei der Forderung möglichster Einfachheit und Uebersichtlichkeit zu genügen, die nachstehenden Hilfsbegriffe zu Grunde legen:

a) *Die Knotenverbindung nullter Ordnung.* — Dieselbe tritt, unter a irgend eine positive ganze Zahl gedacht, entweder als *positiver* (Taf. II, Fig. 5) oder als *negativer* (Taf. II, Fig. 6) Knoten a^{ter} Art auf und besitzt demgemäss nur zwei Typen, welche am zweckmässigsten mit den Symbolen: $[(+)_a]$ und $[(-)_a]$ bezeichnet werden. Um ferner die Charakteristik der höheren Knotenverbindungen zu erleichtern, wollen wir im Folgenden jenen Theil eines gegebenen Knotens a^{ter} Art, welcher dessen Umschlingungen trägt, seine *Basis*, den ihr gegenüberliegenden Theil des Knotens seinen *Bogen* und den, den letzteren überkreuzenden Theil des Knotens seinen *Schlusstheil* nennen.

b) *Die Knotenverbindung erster Ordnung.* — Dieselbe entsteht dadurch, dass der Schlusstheil eines gegebenen Knotens a^{ter} Art in den Bogen eines Knotens b^{ter} Art mit *gleicher* Basis übergeht, dessen Schlusstheil sämmtliche Umschlingungen des ersten Knotens durchsetzt und hierauf die Bögen *beider* Knoten überkreuzt. Es kann daher diese Knotenverbindung in vier Typen:

$$[(+)_a(+)_b],\quad [(+)_a(-)_b],\quad [(-)_a(+)_b],\quad [(-)_a(-)_b]$$

auftreten, von welchen hier jedoch nur der erste (Taf. III, Fig. 13) und letzte (Taf. III, Fig. 14) in Betracht kommen.**) Ebenso zeigt sich hinsichtlich jener Werthe, welche a und b *gleichzeitig* annehmen

*) Siehe die *dritte Auflage* meiner Brochure: Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen" und verwandter merkwürdiger Probleme, p. 5, 6.

**) Ist speciell $a = b = 1$, so lässt sich die betreffende Knotenverbindung erster Ordnung auch in der durch Fig. 7 charakterisirten *symmetrischen* Gestalt darstellen und überdies in eine Verschlingung von der Form der Fig. 8 transformiren; sie repräsentirt also einen positiven Knoten *erster* Art, dessen Schlusstheil an dem Bogen des Knotens mit einem positiven Knoten *erster* Art festgeknüpft ist.

können, insoferne eine Beschränkung, als die Differenz: $b - a$ für die hier zu untersuchenden Gebilde entweder gleich 0 oder gleich $+ 1$ ist.

c) *Die Knotenverbindung zweiter Ordnung.* — Dieselbe entsteht dadurch, dass der Schlusstheil einer aus zwei Knoten a^{ter} und b^{ter} Art zusammengesetzten Knotenverbindung erster Ordnung in den Bogen eines Knotens c^{ter} Art mit *gleicher* Basis übergeht, dessen Schlusstheil sämmtliche Umschlingungen der beiden früher gebildeten Knoten durchsetzt und hierauf die Bögen aller drei Knoten überkreuzt. Die acht möglichen Typen dieser Knotenverbindung sind folgende:

$$[(+)_a(+)_b(+)_c],\quad [(+)_a(+)_b(-)_c],\quad [(+)_a(-)_b(+)_c],$$
$$[(-)_a(+)_b(+)_c],\quad [(+)_a(-)_b(-)_c],\quad [(-)_a(+)_b(-)_c],$$
$$[(-)_a(-)_b(+)_c],\quad [(-)_a(-)_b(-)_c].$$

Auch von diesen Typen kommen bei den hier auftretenden Verschlingungen nur der erste (Taf. IV, Fig. 17) und letzte (Taf. IV, Fig. 18) in Betracht, und sind jene Werthe, welche a, b, c *gleichzeitig* erhalten können, gleichfalls insoferne beschränkt, als für die hier zu besprechenden Gebilde die Differenzen $b - a$, $c - a$ entweder beide gleich 0 oder beide gleich $+ 1$ werden.

Als allgemeinsten Hilfsbegriff führen wir schliesslich jenen der *Knotenverbindung* $(r-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung* ein, welche sich aus r einfachen Knoten $a_1{}^{\text{ter}}$, $a_2{}^{\text{ter}}$, $\ldots$, $a_{r-1}{}^{\text{ter}}$, $a_r{}^{\text{ter}}$ Art mit gemeinsamer Basis in ganz derselben Weise aufbaut, wie die Knotenverbindung erster Ordnung aus zwei, und jene zweiter Ordnung aus drei Knoten entsteht. Ihre 2^r Typen sind der Reihe nach folgende:

$$[(+)_{a_1}(+)_{a_2}\ldots(+)_{a_{r-1}}(+)_{a_r}],\quad [(+)_{a_1}(+)_{a_2}\ldots(+)_{a_{r-1}}(-)_{a_r}],$$
$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$
$$[(-)_{a_1}(-)_{a_2}\ldots(-)_{a_{r-1}}(+)_{a_r}],\quad [(-)_{a_1}(-)_{a_2}\ldots(-)_{a_{r-1}}(-)_{a_r}].$$

Der erste dieser Typen entspricht der *positiven* Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, (Taf. V, Fig. 19), der letzte der *negativen* Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (Taf. V, Fig. 20). Die übrigen Typen sind bei den hier vorkommenden Verschlingungen unvertreten, und findet überdies bezüglich jener Werthe, welche a_1, a_2, $\ldots$, a_{r-1}, a_r *gleichzeitig* annehmen können, insoferne eine Beschränkung statt, als die Differenzen: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, $\ldots$, $a_r - a_1$ entweder insgesammt gleich 0 oder insgesammt gleich $+ 1$ oder theilweise gleich 0, theilweise gleich $+ 1$ sind.

Bei der praktischen Verwerthung dieser Hilfsbegriffe erscheint es, falls zwei oder mehrere *unmittelbar* benachbarte Knoten einander gleich sind, oder aber in der betreffenden Knotenverbindung zwei oder mehrere, durch keine *heterogenen* Zwischenglieder getrennte Knotengruppen von

gleicher Beschaffenheit vorkommen, der Kürze wegen zweckmässig, *symbolische Potenzexponenten* einzuführen, z. B. also Typen wie die folgenden:

$$[(+)_k (+)_k (+)_k (+)_{k+1} (+)_k (+)_k],$$
$$[(+)_k (+)_{k+1} (+)_k (+)_{k+1} (+)_k (+)_{k+1}],$$
$$[(+)_k (+)_k (+)_{k+1} (+)_k (+)_k (+)_{k+1} (+)_k]$$

in den Formen:

$$[(+)_k^3 (+)_{k+1} (+)_k^2], \quad [\{(+)_k (+)_{k+1}\}^3], \quad [\{(+)_k^2 (+)_{k+1}\}^2 (+)_k]$$

zu schreiben. Man hat sich jedoch bei einer derartigen Schreibweise immer gegenwärtig zu halten, *dass die einzelnen Glieder eines solchen Typus nie wie die Factoren eines Productes mit einander vertauschbar sind*, indem für keine einzige, in unverdrehten biegsamen Ringen erzeugbare Knotenverbindung eine Abänderung der Reihenfolge der sie constituirenden Knoten möglich wird. Ausserdem ist noch hervorzuheben, dass sich die Ordnungszahl einer gegebenen Knotenverbindung nur dann erniedrigen lässt, wenn die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r$, welche im Folgenden als *Windungszahlen* bezeichnet werden mögen, *theilweise verschwinden*, und zwar gilt in dieser Hinsicht folgender *Erfahrungssatz*:*)

Jede Knotenverbindung s^{ter} *Ordnung, von deren* $s+1$ *Windungszahlen:* $a_1, a_2, \ldots, a_s, a_{s+1}$ *etwa* s_1 *mit der Null zusammenfallen, während die* $s-s_1+1$ *übrigen Windungszahlen gleich* 1 *werden, lässt sich in eine Knotenverbindung* $(s-s_1)^{\text{ter}}$ *Ordnung transformiren.*

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen sei es nunmehr gestattet, jene *allgemeinen Sätze* über Schnitte *erster Art* mitzutheilen, zu welchen ich auf Grundlage von 112, mit Hohlringen von der eingangs erwähnten Beschaffenheit vorgenommenen Experimenten**) gelangt bin:

I. Führt man durch einen unverdrehten, biegsamen Ring von kreisförmigem Querschnitte einen in sich selbst zurücklaufenden Schnitt erster Art, so besitzt das hiedurch erhaltene, ringartig geschlossene Gebilde stets eine in Form von *Ueberkreuzungen* auftretende Verdrehung, welche

---

*) Um etwaigen Missverständnissen bei der experimentellen Prüfung dieses Erfahrungssatzes, welchem 74, mit schmalen Kautschuckstreifen von mir ausgeführte Experimente zu Grunde liegen, vorzubeugen, habe ich speciell die Knotenverbindungen von den Typen:

$$[(+)_1 (+)_0], \qquad [(+)_1 (+)_0^2], \qquad [(+)_1 (+)_0 (+)_1],$$
$$[\{(+)_1 (+)_0\}^2], \quad [\{(+)_1 (+)_0\}^2 (+)_1], \quad [(+)_1^2 (+)_0 (+)_1^2)]$$

in den Figuren 9, 10, 11, 12, 15, 16 bildlich dargestellt.

**) Näheres hierüber findet man im *ersten* Theile meiner Abhandlung: „Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze“ (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 85. Bd., II. Abth., p. 907–928).

bei *positiver* Axendrehung des schneidenden Instrumentes *negativ*, bei *negativer* Axendrehung desselben *positiv* ausfällt und ihrer absoluten Grösse nach durch das Product der um 1 verminderten *Umlaufszahl* u des Schnittes in 360^0 bestimmt wird. *Es ist also diese Verdrehung völlig unabhängig von dem jeweiligen Werthe der Drehungszahl* t.

II. Das durch den Schnitt erhaltene Gebilde ist nur für $t = \pm 1$ und $u \geq 2$ *knotenfrei*, in allen übrigen Fällen jedoch mit einer Verschlingung versehen, welche bei *positiver* Axendrehung des schneidenden Instrumentes als *negative*, bei *negativer* Axendrehung desselben als *positive Knotenverbindung* auftritt. Die jeweilige Ordnungszahl dieser Knotenverbindung wird erhalten, wenn man den absoluten Betrag der *kleineren* der beiden Zahlen u und t — er mag mit a bezeichnet werden — um zwei Einheiten vermindert, *wonach die Knotenverbindungen, welche bei einer Drehung des Schnittes um* $\pm t \times 360^0$ *in* u *Umläufen, beziehungsweise bei einer Drehung um* $\pm u \times 360^0$ *in* t *Umläufen entstehen, eine und dieselbe Ordnungszahl* $a - 2$ *besitzen.*

III. Die zwei hiebei erhaltenen *positiven* Knotenverbindungen $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind überdies von *gleichem Typus* und stehen zu den beiden, durch die erwähnten Schnitte hergestellten *negativen* Knotenverbindungen derselben Ordnung in dem Verhältnisse eines gegebenen Objectes zu dem Spiegelbilde seiner Rückseite. Ihre allgemeine Beschaffenheit lässt sich sofort präcisiren, wenn man — unter b den absoluten Betrag der *grösseren* der beiden Zahlen u und t verstanden — den unechten Bruch $\frac{b}{a}$ als eine gemischte Zahl:

$$\frac{b}{a} = k + \frac{\varrho}{a}$$

darstellt. *Es charakterisirt nämlich die bei der Division von* b *durch* a *erhaltene ganze Zahl* k *die Arten, ferner der Divisionsrest im Vereine mit* a *die Anzahl der unter einander gleichen Knoten, indem jede der vier in Betracht gezogenen Knotenverbindungen* $(a-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung sich aus* $a - \varrho$ *Knoten* k^{ter} *Art und* $\varrho - 1$ *Knoten* $(k+1)^{\text{ter}}$ *Art zusammensetzt.* Hienach ist die Summe der Windungszahlen sämmtlicher Knoten:

$$k(a-\varrho) + (k+1)(\varrho - 1) = b - k - 1$$

von dem jeweiligen Werthe von a völlig unabhängig.

IV. Die, einem bestimmten Werthe von a und sämmtlichen, der Bedingung $b > a$ Genüge leistenden Specialisirungen von b zugehörigen Knotenverbindungen $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen in so viele von einander verschiedene Gruppen, *als die Zahlenreihe:* $1, 2, 3, \ldots, a-1$ *relative Primzahlen gegen* a *aufweist.* Um also deren Typen für irgend einen, willkürlich gewählten Werth von a *vollständig* zu beschreiben, hat man höchstens $2(a-1)$ symbolische Gleichungen aufzustellen,

von welchen sich die ersten $a-1$ Gleichungen auf negative, die übrigen auf positive Drehungszahlen beziehen. Da ferner die letzteren Gleichungen aus den ersteren unmittelbar durch Vertauschung des Zeichens $+$ mit $-$ hervorgehen, genügt von Fall zu Fall die Angabe des Schemas der Typengleichungen für *negative* Drehungszahlen, dessen allgemeiner Bau aus den nachstehenden symbolischen Relationen zu entnehmen ist:

$$\varrho = 1 : T = [(+)_k^{a-1}];$$

$$\varrho = 2,\ a = 2m+1 : T = [(+)_k^m (+)_{k+1} (+)_k^{m-1}];$$

$$\varrho = 3,\ a = 3m+1 : T = [(+)_k^m \{(+)_{k+1} (+)_k^{m-1}\}^2];$$

$$\varrho = 3,\ a = 3m+2 : T = [\{(+)_k^m (+)_{k+1}\}^2 (+)_k^{m-1}];$$

$$\varrho = 4,\ a = 4m+1 : T = [(+)_k^m \{(+)_{k+1} (+)_k^{m-1}\}^3];$$

$$\varrho = 4,\ a = 4m+3 : T = [\{(+)_k^m (+)_{k+1}\}^3 (+)_k^{m-1}];$$

$$\varrho = 5,\ a = 5m+1 : T = [(+)_k^m \{(+)_{k+1} (+)_k^{m-1}\}^4];$$

$$\varrho = 5,\ a = 5m+2 :$$
$$T = [\{(+)_k^m (+)_{k+1} (+)_k^{m-1} (+)_{k+1}\}^2 (+)_k^{m-1}];$$

$$\varrho = 5,\ a = 5m+3 :$$
$$T = [(+)_k^m \{(+)_{k+1} (+)_k^m (+)_{k+1} (+)_k^{m-1}\}^2];$$

$$\varrho = 5,\ a = 5m+4 : T = [\{(+)_k^m (+)_{k+1}\}^4 (+)_k^{m-1}];$$

. . . .

$$\varrho = \frac{a-2}{2} : T = \left[(+)_k^2 \{(+)_{k+1} (+)_k\}^{\frac{a-4}{4}} (+)_k \{(+)_{k+1} (+)_k\}^{\frac{a-4}{4}}\right];$$

$$\varrho = \frac{a-1}{2} : T = \left[(+)_k^2 \{(+)_{k+1} (+)_k\}^{\frac{a-3}{2}}\right];$$

$$\varrho = \frac{a+1}{2} : T = \left[\{(+)_k (+)_{k+1}\}^{\frac{a-1}{2}}\right];$$

$$\varrho = \frac{a+2}{2} : T = \left[\{(+)_k (+)_{k+1}\}^{\frac{a}{4}} (+)_{k+1} \{(+)_k (+)_{k+1}\}^{\frac{a-4}{4}}\right];$$

. . . .

$$\varrho = a-5,\ a = 5m+1 : T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^5];$$

$$\varrho = a-5,\ a = 5m+2 :$$
$$T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^3 (+)_{k+1} \{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^2];$$

$$\varrho = a-5,\ a = 5m+3 :$$
$$T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\} \{(+)_k (+)_{k+1}^m (+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^2];$$

$\varrho = a - 5,\ a = 5m + 4:$

$$T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}\{(+)_k (+)_{k+1}^{m}\}^3\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}];$$

$\varrho = a - 4,\ a = 4m + 1: T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^4];$

$\varrho = a - 4,\ a = 4m + 3:$

$$T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}\{(+)_k (+)_{k+1}^{m}\}^2\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}];$$

$\varrho = a - 3,\ a = 3m + 1: T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^3];$

$\varrho = a - 3,\ a = 3m + 2:$

$$T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^2 (+)_{k+1}\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}];$$

$\varrho = a - 2,\ a = 2m + 1: T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^{m-1}\}^2];$

$\varrho = a - 1: T = [(+)_k (+)_{k+1}^{a-2}].$

V. Ist allgemein T der den Specialisirungen:

$$u = a,\ t = -(ak + \varrho)$$

zugehörige Typus der durch den Schnitt erhaltenen Knotenverbindung $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so besteht für $\varrho < \frac{1}{2}a$ und $\frac{a}{\varrho} = p + \frac{\sigma}{\varrho}$ zwischen T und dem Typus:

$$T' = [\varphi\{(+)_k,\ (+)_{k+1}\}] = [\varphi(A, B)]$$

jener Knotenverbindung, welche den Specialisirungen:

$$u = \varrho + \sigma = a',\quad t = -(a'k + \varrho)$$

entspricht, die symbolische Relation:

$$T = [A^{p-1}\varphi(A, BA^{p-1})]. \tag{1}$$

Ist dagegen ϱ grösser als $\frac{1}{2}a$, und demgemäss der Quotient: $\frac{a}{a-\varrho}$ in der Form: $q + \frac{\tau}{a-\varrho}$, $(q \geq 2)$ darstellbar, so besteht zwischen T und dem Typus:

$$T'' = [\psi(A, B)]$$

jener Knotenverbindung, welche den Specialisirungen:

$$u = a - \varrho + \tau = a'',\quad t = -(a''k + \tau)$$

zugehört, die analoge Beziehung:

$$T = [\psi(AB^{q-1}, B)]. \tag{2}$$

VI. Was schliesslich die *Anordnung* der, eine gegebene Knotenverbindung $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung constituirenden Knoten k^{ter} und $(k+1)^{\text{ter}}$ Art längs ihrer gemeinsamen Basis anbelangt, so ist dieselbe stets eine derartige, dass die symbolische Gleichung ihres Typus, wenn $k = 0$ gesetzt wird, eine in jene Knotenverbindung transformirbare

Verschlingung charakterisirt, welche bei einer Drehung des Schnittes um $a \times 360^0$ in ϱ Umläufen erhalten wird. *Während also die Anzahl und die Arten der Knoten durch die Zahlen a, k und ϱ eindeutig bestimmt erscheinen, kommen bei der Charakteristik ihrer Reihenfolge sämmtliche Nenner: $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ jenes Kettenbruches:*

$$\cfrac{1}{\varrho_1 + \cfrac{1}{\varrho_2 + \ddots + \cfrac{1}{\varrho_s}}}$$

in Betracht, in welchen sich der Quotient: $\frac{\varrho}{a}$ von Fall zu Fall verwandeln lässt, da die Exponenten in der jeweiligen Gleichung für T direct von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ abhängen.

Von den hier mitgetheilten allgemeinen Sätzen sind die beiden unter V subsummirten Gesetze in *theoretischer* Hinsicht die wichtigsten; sie ermöglichen auch die Lösung des Problems, *die jeweilige symbolische Gleichung für T für beliebige positive ganzzahlige Specialisirungen von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ vollständig zu präcisiren.*

Vertauschen wir nämlich — unter $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{s-1}$ die bei der Ermittelung der Zahlen: $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots, \varrho_s$ successive auftretenden Divisoren verstanden — die *allgemeine*, für $\frac{\varrho}{a}$ bestehende Kettenbruchentwicklung mit dem ihr äquivalenten Gleichungssysteme:

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{1}{\varrho_1 + \frac{c_1}{\varrho}}, \quad \frac{c_1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_2 + \frac{c_2}{c_1}}, \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\varrho_3 + \frac{c_3}{c_2}},$$

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{1}{\varrho_4 + \frac{c_4}{c_3}}, \ldots, \frac{c_{s-1}}{c_{s-2}} = \frac{1}{\varrho_s},$$

so ist für $\varrho_1 \geqq 2$ kraft (1) der fragliche Typus: T direct aus jenem Typus: T_1' ableitbar, für welchen

$$u = \varrho + c_1, \quad t = -\{(\varrho + c_1)k + \varrho\}$$

wird, während T_1' seinerseits zufolge (2) aus dem Typus T_1'' jener Knotenverbindung hervorgeht, welche für:

$$u = c_1 + c_2, \quad t = -\{(c_1 + c_2)k + c_2\}$$

entsteht. Sobald jedoch ϱ_1 mit der positiven Einheit zusammenfällt, wird T kraft *derselben* Relation und der für diesen Specialfall bestehenden Gleichung:

$$\frac{a}{a - \varrho} = \frac{\varrho + c_1}{c_1} = 1 + \varrho_2 + \frac{c_2}{c_1}$$

unmittelbar durch T_1'' bestimmt, wonach die dem letztgenannten Typus zugehörigen Werthe von u und t sowohl für $\varrho_1 \geqq 2$ als auch für $\varrho_1 = 1$ den Ausgangspunkt für *alle übrigen* Typenreductionen bilden. — Da die Quotienten:

$$\frac{c_1 + c_2}{c_2} = 1 + \varrho_3 + \frac{c_3}{c_2}, \quad \frac{c_2 + c_3}{(c_2 + c_3) - c_2} = 1 + \varrho_4 + \frac{c_4}{c_3}$$

augenscheinlich stets grösser als 2 bleiben, ergiebt sich T_1'' jedesmal nach (1) aus dem Typus T_2' jener Knotenverbindung, welche den Specialisirungen:

$$u = c_2 + c_3, \quad t = -\left\{(c_2 + c_3)k + c_2\right\}$$

entspricht, und T_2' wieder nach (2) aus dem für

$$u = c_3 + c_4, \quad t = -\left\{(c_3 + c_4)k + c_4\right\}$$

charakteristischen Typus T_2'', so dass wir auf dem hier eingeschlagenen Wege schliesslich zu der Umlaufszahl $u = c_{s-2} + c_{s-1} = \varrho_s + 1$ und zu einer der beiden Drehungszahlen:

$$t = -\left\{(\varrho_s + 1)k + 1\right\} \quad \text{beziehungsweise:} \quad t = -\left\{(\varrho_s + 1)k + \varrho_s\right\}$$

geführt werden. — Es besteht also die Verwerthbarkeit der zwei, unter V subsummirten Gesetze bei der Lösung des vorgelegten Problems darin, dass deren wiederholte Anwendung einen Aufbau der jeweiligen unbekannten Typengleichung auf Grundlage zweier, *durch die Erfahrung gegebener* Typengleichungen ermöglicht, indem ja die den Substitutionen:

$$u = a, \quad \varrho = 1; \quad u = a, \quad \varrho = a - 1$$

zugehörigen Typenrelationen durch das unter IV mitgetheilte empirische Typenschema für jeden in Betracht kommenden Werth von a eindeutig bestimmt sind.

Die *analytische* Formulirung der hiebei sich ergebenden symbolischen Relationen bedingt dann die Unterscheidung zweier Hauptfälle, je nachdem der für $\frac{\varrho}{a}$ resultirende Kettenbruch eine *ungerade* oder eine *gerade* Anzahl von Gliedern besitzt.

Ist nämlich erstens, unter $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2r-1}$ beliebige positive ganze Zahlen gedacht,

$$\varrho_1 = a_1, \ \varrho_2 = a_2, \ \varrho_3 = a_3, \ldots, \varrho_s = a_{2r-1},$$

so erhält man für T nach Einführung der Abkürzungen:

$$A(BA^{a_1-1})^{a_2} = A_1, \quad A_1(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4} = A_2,$$

$$A_2(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5})^{a_6} = A_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_{n-1}\left(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}}\right)^{a_{2n}} = A_n,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

durch Auflösung eines Systems einfacher Functionalgleichungen*) das Resultat:

$$(3) \qquad T = [A^{a_1-1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}}] = [R_r].$$

Ist hingegen zweitens die Anzahl der Kettenbruchglieder *gerade*, mithin allgemein:

$$\varrho_1 = a_1,\ \varrho_2 = a_2,\ \varrho_3 = a_3,\ \ldots,\ \varrho_s = a_{2r},$$

so resultirt für T in letzter Linie die Gleichung:

$$(4) \qquad T = [R_r A_{r-1} (B R_r)^{a_{2r}-1}] =$$

$$= [(A^{a_1-1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} \ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}})\, A_{r-1} (B A^{a_1-1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} \ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}].$$

— Die vier *wichtigsten* Specialisirungen von (3) und (4) werden durch die nachstehenden Gleichungen gebildet:

$$(\alpha) \qquad s = 2 : T = [A^{a_1} (B A^{a_1-1})^{a_2-1}],$$

$$(\beta) \qquad s = 3 : T = [A^{a_1-1} \{A (B A^{a_1-1})^{a_2}\}^{a_3}],$$

$$(\gamma) \qquad s = 4 : T = [A^{a_1-1} A_1^{a_3+1} (B A^{a_1-1} A_1^{a_3})^{a_4-1}],$$

$$(\delta) \qquad s = 5 : T = [A^{a_1-1} A_1^{a_3} \{A_1 (B A^{a_1-1} A_1^{a_3})^{a_4}\}^{a_5}],$$

welche, wie man sich unmittelbar überzeugen kann,**) *sämmtliche* symbolische Relationen des unter IV mitgetheilten empirischen Typenschemas richtig liefern.

Ausserdem lässt sich ohne Schwierigkeit darthun, dass die Relationen (3) und (4) auch mit unserem *dritten* allgemeinen Gesetze in vollständiger Uebereinstimmung stehen, also das Symbol A in jeder derselben im Ganzen $(a-\varrho)$mal, dagegen B nicht öfter als $(\varrho-1)$mal auftritt.

Der gewünschte Beweis wird am übersichtlichsten, wenn wir hiebei von der Betrachtung des ins Unendliche fortlaufenden schematischen Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \text{in inf.}}}}$$

ausgehen und dessen Näherungsbrüche:

*) Näheres hierüber findet man im *zweiten* Theile meiner Abhandlung: „Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze" (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 87. Bd., II. Abth. p. 556—587).

**) Hiebei sind im Hinblick auf die Thatsache, dass keine Knotenverbindung eine Abänderung der Reihenfolge der sie constituirenden Knoten ermöglicht, natürlich nur solche Transformationen der betreffenden Specialisirung von T zulässig, welche das Princip der *Unvertauschbarkeit sämmtlicher Factoren* in dem für T erhaltenen symbolischen Producte nicht alteriren.

$$\frac{1}{a_1},\quad \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1},\quad \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3},\ldots$$

der Reihe nach mit $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots$ bezeichnen. Es ist dann der Quotient $\frac{\varrho}{a}$ speciell für den ersten Hauptfall gleich $\frac{Z_{2r-1}}{N_{2r-1}}$, hingegen im zweiten Hauptfalle gleich $\frac{Z_{2r}}{N_{2r}}$, und zufolge der bekannten, allgemein giltigen Gleichungen:

$$Z_n = a_n Z_{n-1} + Z_{n-2},\qquad N_n = a_n N_{n-1} + N_{n-2}$$

einerseits: anderseits:

$$\begin{array}{ll} Z_3 = a_3 Z_2 + Z_1, & N_3 = a_3 N_2 + N_1, \\ Z_5 = a_5 Z_4 + Z_3, & N_5 = a_5 N_4 + N_3, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Z_{2r-3} = a_{2r-3} Z_{2r-4} + Z_{2r-5}, & N_{2r-3} = a_{2r-3} N_{2r-4} + N_{2r-5}, \\ Z_{2r-1} = a_{2r-1} Z_{2r-2} + Z_{2r-3}, & N_{2r-1} = a_{2r-1} N_{2r-2} + N_{2r-3}, \end{array}$$

mithin auch:

$$Z_{2r-1} = Z_1 + a_3 Z_2 + a_5 Z_4 + a_7 Z_6 + \cdots + a_{2r-1} Z_{2r-2},$$
$$N_{2r-1} = N_1 + a_3 N_2 + a_5 N_4 + a_7 N_6 + \cdots + a_{2r-1} N_{2r-2}.$$

Dies vorausgeschickt lassen sich zunächst jene Zahlen α_n, β_n, welche anzeigen, wie oft die Factoren A und B in dem symbolischen Producte A_n vorkommen, sehr einfach ausdrücken. Man erhält nämlich für $n = 1, 2$ direct:

$$\alpha_1 = 1 + a_2(a_1 - 1) = N_2 - Z_2,\quad \beta_1 = a_2 = Z_2;$$
$$\alpha_2 = N_2 - Z_2 + a_4\{N_1 - Z_1 + a_3(N_2 - Z_2)\} = N_4 - Z_4,$$
$$\beta_2 = Z_2 + a_4(Z_1 + a_3 Z_2) = Z_4,$$

woran sich der Wahrscheinlichkeitsschluss knüpft, dass allgemein:

$$\alpha_{n-1} = N_{2n-2} - Z_{2n-2},\quad \beta_{n-1} = Z_{2n-2};\quad \alpha_n = N_{2n} - Z_{2n},\quad \beta_n = Z_{2n}$$

ist. — Indem wir denselben einstweilen *hypothetisch* als richtig annehmen, folglich dem Producte:

$$B A^{a_1 - 1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}}$$

in Hinblick auf die Gleichungen:

$$\frac{Z_{2n} - Z_{2n-2}}{a_{2n}} = Z_{2n-1},\quad \frac{N_{2n} - N_{2n-2}}{a_{2n}} = N_{2n-1}$$

den Factor A im Ganzen $(N_{2n-1} - Z_{2n-1})$mal, den Factor B hingegen (Z_{2n-1})mal zuschreiben, ergeben sich die für:

$$A_{n+1} = A_n (B A^{a_1 - 1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} \ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}} A_n^{a_{2n+1}})^{a_{2n+2}}$$

charakteristischen Zahlen α_{n+1}, β_{n+1} in den Formen:

$$\alpha_{n+1} = N_{2n} - Z_{2n} + a_{2n+2}\{N_{2n-1} - Z_{2n-1} + a_{2n+1}(N_{2n} - Z_{2n})\}$$
$$= N_{2n+2} - Z_{2n+2},$$
$$\beta_{n+1} = Z_{2n} + a_{2n+2}(Z_{2n-1} + a_{2n+1} Z_{2n}) = Z_{2n+2}.$$

Hienach gilt unser Schluss für α_{n+1}, β_{n+1}, sobald er für α_{n-1}, β_{n-1}; α_n, β_n zutrifft; er gilt also für *beliebige* positive ganzzahlige Werthe von n, da seine Richtigkeit für $n = 1$ und $n = 2$ bereits erwiesen ist.

Nachdem auf diese Art die Zahlen $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_n, \beta_n; \ldots$ definitiv festgestellt worden sind, können nunmehr auch jene Zahlen $x', y'; x'', y''$ ermittelt werden, welche anzeigen, wie oft die Factoren A und B in jeder der beiden *allgemeinen* Typengleichungen (3) und (4) vorkommen. Man gelangt hiebei im ersten Hauptfalle zu den Relationen:

$$x' = N_1 - Z_1 + a_3(N_2 - Z_2) + a_5(N_4 - Z_4) + a_7(N_6 - Z_6) +$$
$$+ \cdots + a_{2r-1}(N_{2r-2} - Z_{2r-2}) = N_{2r-1} - Z_{2r-1} = a - \varrho,$$
$$y' = a_3 Z_2 + a_5 Z_4 + a_7 Z_6 + \cdots + a_{2r-1} Z_{2r-2} = Z_{2r-1} - Z_1 = \varrho - 1$$

und analog im zweiten Hauptfalle zu den Beziehungen:

$$x'' = N_{2r-1} - Z_{2r-1} + N_{2r-2} - Z_{2r-2} +$$
$$+ (a_{2r} - 1)(N_{2r-1} - Z_{2r-1}) = N_{2r} - Z_{2r} = a - \varrho,$$
$$y'' = Z_{2r-1} - Z_1 + Z_{2r-2} + (a_{2r} - 1) Z_{2r-1} = Z_{2r} - Z_1 = \varrho - 1,$$

womit die Uebereinstimmung der Relationen (3) und (4) mit dem *dritten* Gesetze erwiesen ist.

Dieselben bilden also thatsächlich die vollständige Lösung des uns vorgelegten Problems für $u = a$, $t = -(ak + \varrho)$, aus welcher sich die entsprechenden Formeln für $u = a$, $t = +(ak + \varrho)$ unmittelbar durch Vertauschung der Symbole $A = (+)_k$, $B = (+)_{k+1}$ mit $(-)_k$, $(-)_{k+1}$ ergeben.

Auf Grundlage der Relationen (3) und (4) lassen sich ferner die beiden nachstehenden Sätze beweisen, welche über weitere interessante Eigenschaften der hier in Betracht kommenden Knotenverbindungen Aufschluss geben:

a) In allen, einem bestimmten Werthe von a zugehörigen Knotenverbindungen, welche ausser Knoten k^{ter} Art auch solche $(k+1)^{\text{ter}}$ Art enthalten, gehen dem *ersten* Knoten $(k+1)^{\text{ter}}$ Art so viele Knoten k^{ter} Art voran, als der *erste* Theilnenner des, dem Quotienten $\frac{\varrho}{a}$ äquivalenten Kettenbruches Einheiten besitzt, so dass das Anfangsglied *jeder* derartigen Knotenverbindung durch einen Knoten k^{ter} Art gebildet wird.

b) Sind $T = [AF(A, B)]$, $T_1 = [AF_1(A, B)]$ die Typen der beiden, den Specialisirungen:

$$u = a, \quad t = -(ak + \varrho); \quad u = a, \quad t = -(ak + a - \varrho)$$

entsprechenden Knotenverbindungen $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so besteht zwischen $F(A, B)$ und $F_1(A, B)$ allgemein die Relation:

$$F_1(A, B) = F(B, A), \tag{5}$$

wonach, sobald T bekannt ist, auch T_1 bestimmt erscheint.

Der Beweis des ersten Satzes ist durch Constatirung der Thatsache geliefert, dass das symbolische Product R_r gemäss der Bedeutung von A_1 mit:

$$A^{a_1-1}\left\{A(BA^{a_1-1})^{a_2}\right\} A_1^{a_3-1} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

identisch ist, also das Symbol A im Ganzen a_1 mal von B steht.

Ungleich weitläufiger gestaltet sich die Deduction des zweiten Satzes, welcher im ersten resp. zweiten Hauptfalle nach Einführung der Abkürzungen:

$$B(AB^{a_1-1})^{a_2} = B_1, \quad B_1(AB^{a_1-1}B_1^{a_3})^{a_4} = B_2,$$

$$B_2(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5})^{a_6} = B_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$B_{n-1}(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7} \ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}})^{a_{2n}} = B_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

in den hinsichtlich ihres Baues vollständig mit (3) und (4) übereinstimmenden Formeln:

$$(s = 2r-1) : T_1 = [AR_r'] = \tag{6}$$

$$= [AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7} \ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}}],$$

$$(s = 2r) : T_1 = [AR_r'B_{r-1}(ABR_r')^{a_{2r}-1}] = \tag{7}$$

$$= [(AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5} \ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}})\, B_{r-1}(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5} \ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}]$$

seinen analytischen Ausdruck findet.

Da nämlich kraft der Identität:

$$\frac{a-\varrho}{a} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{a}{\varrho} - 1}}$$

die Entwicklung:

$$\frac{\varrho}{a} = \cfrac{1}{\varrho_1 + \cfrac{1}{\varrho_2 + \cfrac{1}{\varrho_3 + \cdot \, . \, \cdot + \cfrac{1}{\varrho_s}}}}$$

die weitere:

$$\frac{a-\varrho}{a} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varrho_1 - 1 + \cfrac{1}{\varrho_2 + \cdot \, . \, \cdot + \cfrac{1}{\varrho_s}}}}$$

zur nothwendigen Folge hat, liefert die Verwandlung von $\frac{a-\varrho}{a}$ in einen Kettenbruch im ersten Hauptfalle die Theilnenner $1,\ a_1-1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_{2r-1}$, im zweiten die Theilnenner: $1, a_1-1, a_2, a_3, \ldots a_{2r}$, so dass für T_1 unter Anwendung der Abkürzungen:

$$AB^{a_1-1}=(A_1),\quad (A_1)\{B(A_1)^{a_2}\}^{a_3}=(A_2),$$

$$(A_2)\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}\}^{a_5}=(A_3),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(A_{n-1})\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{n-1})^{a_{2n-2}}\}^{a_{2n-1}}=(A_n)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

im ersten resp. zweiten Hauptfalle ursprünglich die symbolischen Relationen:

(8) $$T_1=$$
$$=[\{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}..(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}(A_{r-1})\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}..(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}^{a_{2r-1}-1}]$$

(9) $$T_1=[(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_r)^{a_{2r}}]$$

bestehen. Auf diese Art fordert der Nachweis des zweiten Satzes die allgemeine Begründung der Behauptung, dass einerseits die beiden, scheinbar völlig von einander verschiedenen Gleichungen (6) und (8), anderseits die Relationen (7) und (9) gleichbedeutend sind, was sich erst auf Grundlage von drei, im Folgenden abgeleiteten Hilfsgleichungen darthun lässt.

Indem wir hiebei vor Allem zwischen den Symbolen (A_1), (A_2) (A_3); B_1, B_2, B_3 einen directen Zusammenhang herzustellen suchen, gelangen wir unmittelbar zu den Relationen:

$$B(A_1)^{a_2}=B_1,\qquad AB^{a_1-1}B_1^{a_3}=(A_2),$$

$$B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}=B_2,\qquad AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}=(A_3)$$

und folgern aus denselben inductiv, dass allgemein:

(10) $$(A_n)=AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}},$$

(11) $$B_n=B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_n)^{a_{2n}}$$

sein muss. Es ist dann — die Richtigkeit dieser Annahmen einstweilen hypothetisch acceptirt — offenbar:

$$(A_n)B_n^{a_{2n+1}}=(A_n)\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_n)^{a_{2n}}\}^{a_{2n+1}}=(A_{n+1}),$$

also auch umgekehrt:

$$(A_{n+1})=(A_n)B_n^{a_{2n+1}}=AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_n^{a_{2n+1}},$$

und

$$B_n(A_{n+1})^{a_{2n+2}}=B_n(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_n^{a_{2n+1}})^{a_{2n+2}}=B_{n+1},$$

d. h. vice versa:

$$B_{n+1} = B_n(A_{n+1})^{a_{2n+2}} = B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_{n+1})^{a_{2n+2}},$$

womit, da eine Vertauschung von n mit $n+1$ in den Gleichungen (10) und (11) *dieselben* Resultate liefert, die *allgemeine* Giltigkeit von (10) und (11) festgestellt ist.

Ein analoger Gedankengang führt zur Einsicht in die universelle Richtigkeit der dritten Hilfsgleichung:

$$(12) \qquad (A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_{n-1})^{a_{2n-2}}(A_n) = \\ = (AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{n-1}^{a_{2n-1}})\,B_{n-1},$$

welche sich zunächst gleichfalls als hypothetische Verallgemeinerung von zwei speciellen Relationen:

$$(A_1)^{a_2}(A_2) = (A_1)^{a_2+1}B_1^{a_3} = (AB^{a_1-2})B(A_1)^{a_2}B_1^{a_3} = \\ = AB^{a_1-2}B_1^{1+a_3} = (AB^{a_1-2}B_1^{a_3})B_1,$$

$$(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3) = (A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4+1}B_2^{a_5} = \\ = (AB^{a_1-2}B_1^{a_3})B_1(A_2)^{a_4}B_2^{a_5} = AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{1+a_5} = \\ = (AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5})\,B_2$$

ergiebt. Denn sobald man provisorisch annimmt, dass die Gleichung (12) zutrifft, wird das symbolische Product:

$$\{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_{n-1})^{a_{2n-2}}(A_n)\}(A_n)^{a_{2n}-1}(A_{n+1})$$

mit:

$$(AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{n-1}^{a_{2n-1}})\,B_{n-1}(A_n)^{a_{2n}-1}(A_{n+1}) = \\ = (AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{n-1}^{a_{2n-1}})\,B_{n-1}(A_n)^{a_{2n}}B_n^{a_{2n+1}} = \\ = AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{n-1}^{a_{2n-1}}B_n^{1+a_{2n+1}}$$

identisch, man gewinnt also für jenes Product genau denselben Ausdruck, welcher aus (12) durch Vertauschung von n mit $n+1$ hervorgeht.

Mit Hilfe der Gleichungen (10), (11), (12) kann nunmehr die von uns behauptete Coincidenz der Relationen (8) und (6), (9) und (7) direct ersichtlich gemacht werden.

Es ist nämlich kraft der dritten und ersten Hilfsgleichung:

$$\{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}(A_{r-1}) = \\ = \{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_{r-2})^{a_{2r-4}}(A_{r-1})\}(A_{r-1})^{a_{2r-2}} = \\ = (AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{r-2}^{a_{2r-3}})\,B_{r-2}(A_{r-1})^{a_{2r-2}} = \\ = AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{r-2}^{a_{2r-3}}B_{r-1},$$

ferner zufolge der zweiten Hilfsgleichung:

$$\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}^{a_{2r-1}-1} = B_{r-1}^{a_{2r-1}-1},$$

mithin das Product der beiden Factorengruppen in der That gleich AR'_r, d. h. (8) = (6).

Da endlich: $(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\dots(A_r)^{a_{2r}}$ gemäss der dritten Hilfsgleichung mit:

$$(AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{r-1}^{a_{2r-1}})\,B_{r-1}(A_r)^{a_{2r}-1}$$

zusammenfällt, und (A_r) kraft der ersten Hilfsgleichung dem Ausdrucke:

$$AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\dots B_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

entspricht, ist auch (9) = (7), und hiemit der Nachweis des zweiten Satzes perfect.*)

Unsere letzten, den Relationen (3) und (4) entspringenden Folgerungen beziehen sich auf die Substitution $k=0$, für welche die genannten Gleichungen gemäss dem sechsten allgemeinen Gesetze gleichzeitig *jene* Knotenverbindung charakterisiren, *welche im ersten und zweiten Hauptfalle für $u=\varrho$, $t=-a$ erhalten werden.* Da nun der Quotient $\frac{a}{\varrho}$ im ersten Hauptfalle mit:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{2r-1}}}},\quad\text{im zweiten mit}\quad a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{2r}}}}$$

identisch ist, und der Factor $A^{a_1-1}=(+)_0^{a_1-1}$, sobald er in dem betreffenden symbolischen Producte *an erster Stelle* steht, kraft unserer Definitionsweise der Knotenverbindungen verschiedener Ordnungen für den Typus der zugehörigen Knotenverbindung gegenstandslos wird, resultiren für die erwähnte Specialisirung von k unter Anwendung der Abkürzungen:

$$(+)_{a_1}=C,\ (+)_{a_1+1}=D;\ C(DC^{a_2-1})^{a_3}=C_1,$$
$$C_1(DC^{a_2-1}C_1^{a_4})^{a_5}=C_2,\ C_2(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6})^{a_7}=C_3,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$C_{n-1}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\dots C_{n-1}^{a_{2n}})^{a_{2n+1}}=C_n,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

die beiden *allgemeinen Transformationsgleichungen:*

$$[A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\dots A_{r-1}^{a_{2r-1}}]= \tag{13}$$
$$=[(C^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}\dots C_{r-2}^{a_{2r-2}})\,C_{r-2}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}\dots C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}-1}],$$

$$[(A_1^{a_3}A_2^{a_5}\dots A_{r-1}^{a_{2r-1}})\,A_{r-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}\dots A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}]= \tag{14}$$
$$=[C^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\dots C_{r-1}^{a_{2r}}],$$

---

*) Dass derselbe auch nach Vertauschung von A und B mit $(-)_k$, $(-)_{k+1}$ seine Giltigkeit behauptet, ist in Hinblick auf die, seiner Ableitung zu Grunde gelegten Fundamentalformeln selbstverständlich.

welche selbstverständlicher Weise auch nach Vertauschung des Symboles (+) mit (−) giltig bleiben.

In jeder derselben charakterisirt das linker Hand stehende symbolische Product eine Knotenverbindung der $(a - a_1 - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, in welcher die Windungszahlen von $\{(a + 1) - (a_1 + \varrho)\}$ Knoten verschwinden, während jene der $(\varrho - 1)$ übrigen Knoten den gemeinsamen Werth 1 besitzen. Unsere beiden Gleichungen besagen also in Uebereinstimmung mit einem früheren Erfahrungssatze, *dass jede derartige Knotenverbindung in eine solche* $(\varrho - 2)^{\text{ter}}$ *Ordnung transformirbar ist, welche sich aus* $\{(a_1 + 1)\varrho - a\}$ *Knoten* a_1^{ter} *Art und* $(a - a_1\varrho - 1)$ *Knoten* $(a_1 + 1)^{\text{ter}}$ *Art zusammensetzt.*

Die wichtigsten, in (13) und (14) enthaltenen *specielleren* Relationen lauten:

$$(\alpha') \ldots [(BA^{a_1-1})^{a_2-1}] = [C^{a_2-1}],$$

$$(\beta') \ldots [\{A(BA^{a_1-1})^{a_2}\}^{a_3}] = [C^{a_2}(DC^{a_1-1})^{a_3-1}],$$

$$(\gamma') \ldots [A_1^{a_3+1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4-1}] = [C^{a_2-1}\{C(DC^{a_2-1})^{a_3}\}^{a_4}],$$

$$(\delta') \ldots [A_1^{a_3}\{A_1(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4}\}^{a_5}] = [C^{a_2-1}C_1^{a_4+1}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4})^{a_5-1}];$$

sie sind den Formeln: (α), (β), (γ), (δ) direct zugeordnet und liefern daher auch *sämmtliche* Transformationsgleichungen, welche für $k = 0$ zur Reduction der symbolischen Gleichungen des unter IV mitgetheilten *empirischen* Typenschemas erforderlich sind.

III.

Untersuchung jener Erscheinungen, welche bei einem unverdrehten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring vollständig durchsetzenden, längs dessen Mittellinie in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.

Die hier zu beschreibenden Gebilde zeigen im Vergleiche zu jenen, welche aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch Schnitte *erster Art* entstehen, insofern einen complicirteren Bau, als hier ausser positiven und negativen Knotenverbindungen verschiedener Ordnungen auch *wechselseitige* Verschlingungen je zweier Gebilde vorkommen, welche nur in den einfachsten Fällen auf positive (Taf. VI, Fig. 21) oder negative (Taf. VI, Fig. 22) Verbindungen irgend welcher Art reducirbar sind.

Es combiniren sich nämlich die genannten Verbindungen hier gemeiniglich mit anderweitigen eigenthümlichen Verschlingungen, zu deren vollständiger Charakteristik die nachstehenden Hilfsbegriffe genügen.

a) *Die Verknotung erster Ordnung* (Taf. VI, Fig. 23, 24), als welche wir jede Verschlingung zweier *gleichgebauter* Knoten bezeichnen, in der, falls man den *inneren* — in beiden schematischen Figuren als verdickte Doppellinie gezeichneten — Knoten von dessen Basis bis zum Schlusstheile durchläuft, die correspondirenden Elemente des *äusseren* Knotens sich stets zur *rechten* Hand vorfinden. Der jeweilige Typus (T) der Verknotung stimmt natürlich mit jenem der beiden, sie constituirenden Knoten überein und wird demnach, wenn die letzteren *positive* Knoten a^{ter} Art vorstellen (Fig. 23), das Symbol: $[(+)_a]$, hingegen bei einer Verschlingung zweier *negativer* Knoten a^{ter} Art (Fig. 24) das Symbol: $[(-)_a]$ besitzen. Im ersten Falle nennen wir auch die Verknotung positiv, im zweiten negativ.

b) *Die Verknotung zweiter Ordnung* (Taf. VII, Fig. 25, 26). — Dieselbe entsteht, sobald sich zwei *gleichgebaute* Knotenverbindungen erster Ordnung derart verschlingen, dass je zwei einander correspondirende Knoten derselben *zusammen* eine Verknotung *erster* Ordnung bilden, und an der Uebergangsstelle von den Schlusstheilen des ersten in die Bögen des zweiten Knotenpaares gleichfalls keinerlei Ueberkreuzungen von, einander entsprechenden, Elementen der beiden Knotenverbindungen stattfinden. Je nachdem die letzteren positiv oder negativ sind, wird man auch die Verknotung als positiv oder negativ zu bezeichnen haben und ihren jeweiligen Typus: T durch *dasselbe* Symbol charakterisiren können, welches den, sie constituirenden Knotenverbindungen zugehört. Es repräsentirt also speciell die in Fig. 25 schematisch dargestellte *positive* Verknotung erster Ordnung eine solche vom Typus: $[(+)_a(+)_b]$, hingegen die in Fig. 26 veranschaulichte *negative* Verknotung erster Ordnung eine solche vom Typus: $[(-)_a(-)_b]$. — Verknotungen von den Typen: $[(+)_a(-)_b]$ und $[(-)_a(+)_b]$ kommen bei den hier zu beschreibenden Gebilden nicht vor, und sind überdies jene Werthe, welche a und b *gleichzeitig* annehmen können, insofern beschränkt, als b entweder gleich a oder gleich $a + 1$ ist.

c) *Die Verknotung r^{ter} Ordnung* (Taf. VIII, Fig. 27, Taf. IX, Fig. 28), welche sich in *derselben* Weise aus zwei *gleichgebauten* Knotenverbindungen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zusammensetzt, wie die Verknotung zweiter Ordnung aus der Combination zweier Knotenverbindungen erster Ordnung hervorgeht. Es constituiren demnach je zwei einander entsprechende Knoten der beiden Knotenverbindungen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auch hier mitsammen eine Verknotung *erster* Ordnung, und zeigen die Uebergangsstellen von den Schlusstheilen des $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, (r-1)^{\text{ten}}$ Knotenpaares in die Bögen des $2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \ldots, r^{\text{ten}}$ Knotenpaares nirgends Ueberkreuzungen von einander correspondirenden Elementen jener Knotenverbindungen. Das jeweilige Typensymbol der letzteren bestimmt zugleich den Typus der betreffenden Verknotung, so dass

speciell die in Fig. 27 und 28 schematisch dargestellten Verknotungen, welche wir kurzweg als *positive* und *negative* Verknotung r^{ter} Ordnung bezeichnen, die Typengleichungen:

$$T = [(+)_{a_1}(+)_{a_2}\cdots(+)_{a_{r-1}}(+)_{a_r}],$$
$$T = [(-)_{a_1}(-)_{a_2}\cdots(-)_{a_{r-1}}(-)_{a_r}]$$

zu erhalten haben. — Analog wie bei den, durch Schnitte *erster* Art erzeugbaren Knotenverbindungen $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bleiben die übrigen Typen:

$$[(+)_{a_1}(+)_{a_2}\cdots(+)_{a_{r-1}}(-)_{a_r}]\cdots[(-)_{a_1}(-)_{a_2}\cdots(-)_{a_{r-1}}(+)_{a_r}]$$

bei den hier vorkommenden Verknotungen gleichfalls unvertreten, und sind die jeweiligen Werthe von a_2, a_3, $\cdots$, a_r entweder insgesammt gleich a_1 oder theilweise oder insgesammt gleich a_1+1.

Nachdem hiermit die im Folgenden gebrauchten *neuen* Hilfsbegriffe ausreichend präcisirt erscheinen, muss behufs ihrer praktischen Verwerthung noch hervorgehoben werden, dass die Verbindungen und Verknotungen in den sie enthaltenden Gebilden anfänglich *nicht isolirt* sind, sondern jene Aufhängungen, aus welchen die betreffende Verbindung besteht, unmittelbar nach Vollendung des Schnittes theils innerhalb, theils ausserhalb der jeweiligen Verknotung auftreten. Da sich nun die Aufhängungen der *ersten* Kategorie längs einer der beiden, in einander verschlungenen Knotenverbindungen ohne Schwierigkeit von jedem Knoten auf den nächstfolgenden, mithin durch fortgesetztes Verschieben endlich auf den Schlusstheil des *letzten* Knotens übertragen lassen, kann man die Verknotungen von den Verbindungen stets so trennen, wie es in den Figuren 23—28 dargestellt ist. Dieselben veranschaulichen überdies die Thatsache, dass die mit einer gegebenen Verknotung combinirten Aufhängungen in *allen hier* vorkommenden Fällen *zugleich mit dieser* positiv oder negativ ausfallen — Ihre Charakteristik kann natürlich ebenfalls mittelst symbolischer Relationen gegeben werden, und wollen wir hierbei im Anschlusse an die zur Beschreibung einfacher Knoten eingeführten Typengleichungen den Typus: $\overline{T}$ einer gegebenen Reihe von Aufhängungen durch das Symbol $[(+)_k]$ oder $[(-)_k]$ ausdrücken, je nachdem dieselben die in Fig. 21 oder die in Fig. 22 dargestellte Verbindung constituiren.

Dies vorausgeschickt ziehen wir jetzt zunächst jene Gebilde in Betracht, welche aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe entstehen, wenn man die Axe des schneidenden Instrumentes bei Ausführung des betreffenden Schnittes *zweiter* Art in einer *ungeraden* Anzahl: $2p-1$ von Umläufen um ein *gerades* Vielfaches von $\pm 180^0 : \pm 2q \times 180^0$ dreht.

Man erhält so immer *je zwei* ringförmig geschlossene Gebilde,

deren aufeinanderfolgende Querschnitte, falls der zerschnittene Ring ein massiver war, congruente Kreissectoren von dem Centriwinkel $\frac{180^0}{u}$ vorstellen. Ihre Scheitel liegen — unter λ die Länge der Mittellinie des ursprünglichen Ringes verstanden — in jedem der beiden Gebilde auf einer Linie von der Länge λu, und sind auch die Verdrehungszahlen: z_1, z_2 beider Gebilde stets einander gleich. Auf diese Art erscheint das Ergebniss des Schnittes von Fall zu Fall eindeutig bestimmt, *sobald ausser dem gemeinsamen Werthe:* z *von* z_1 *und* z_2 *noch die Typengleichungen der durch den Schnitt erzeugten Verbindungen und Verknotungen angegeben werden.*

Meine diesbezüglichen, durch Ausführung von 43 Experimenten*) erhaltenen Resultate ermöglichen die Aufstellung folgender allgemeiner Gesetze:

I. Der jeweilige Werth von z ist bei *negativer* Axendrehung des schneidenden Instrumentes *positiv*, bei *positiver* Axendrehung desselben *negativ* und seinem absoluten Betrage nach stets gleich der um 1 verminderten *Umlaufszahl* des betreffenden Schnittes *zweiter* Art. Gleichzeitig mit z fallen dann auch die Verbindung und eventuelle Verknotung beider Gebilde positiv resp. negativ aus.

II. Die Anzahl: h der durch den Schnitt bedingten Aufhängungen ist für $q < u$ constant gleich u, während sie für $q > u$ mit dem jeweiligen Werthe von q zusammenfällt.

III. Die durch den Schnitt entstandenen Gebilde sind nur für

$$u = 1, \quad t = \pm 2q,$$

beziehungsweise:

$$u = 2p - 1, \quad t = \pm 2$$

unverknotet, in allen übrigen Fällen jedoch mit einer Verknotung versehen, *und stimmt deren Typus ausnahmslos mit dem Typus jener Knotenverbindung überein*, *welche durch einen Schnitt erster Art von der Umlaufszahl:* $2p - 1$ *und der Drehungszahl:* $\pm q$ *erhalten wird.* Da sich nun bekanntlich bei derartigen Schnitten *dieselbe* Knotenverbindung dadurch herstellen lässt, dass man die Axe des schneidenden Instrumentes in q Umläufen um $\pm (2p - 1) \times 360^0$ dreht, und q offenbar sowohl eine ungerade als eine gerade Zahl vorstellen kann, *so entspricht jeder durch Schnitte erster Art erzeugbaren Knotenverbindung eine Verknotung von congruentem Typus.*

Um nunmehr auch den Zusammenhang dieser Inductionsschlüsse mit unseren früheren Erfahrungssätzen vollständig zu übersehen, vergleiche man die auf der Ringoberfläche für $u = 2p - 1$, $t = q$ ent-

*) Näheres hierüber findet man im *dritten* Theile meiner Abhandlung: „Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze“ (Sitzungsberichte der Wiener Academie, 88. Bd., II. Abth., p. 939 — 974).

stehende Grenzcurve des Schnittes *erster* Art mit jenen Grenzlinien, welche einem Schnitte *zweiter* Art von gleicher Umlaufszahl aber doppelt so grosser Drehungszahl zugehören. Hiebei zeigt sich, dass die letzteren aus *je zwei identisch verlaufenden* Grenzlinien der ersten Art bestehen, und jede Windung der einen Grenzlinie zwischen je zwei Windungen der anderen zu liegen kommt. Es kann also das, jenem Schnitte *zweiter* Art entsprechende Resultat auch erhalten werden, indem man durch das, mittelst des besprochenen Schnittes *erster* Art hergestellte Gebilde nochmals einen in sich selbst zurücklaufenden Schnitt führt, welcher die Centriwinkel sämmtlicher Querflächen desselben halbirt.

Hieraus geht hervor, dass zunächst die Inductionsschlüsse I und III als *nothwendige* Consequenzen früherer Erfahrungssätze aufzufassen sind. Bezüglich des Inductionsschlusses II ist diess allerdings nicht unmittelbar evident, lässt sich aber leicht auf Grundlage der bekannten Thatsache darthun, dass die Ordnungszahl der, durch irgend einen Schnitt *erster* Art erhaltenen Knotenverbindung gefunden wird, wenn man den absoluten Betrag der *kleineren* der beiden Zahlen u und t um zwei Einheiten vermindert.

Ist nämlich erstens für den betreffenden Schnitt *zweiter* Art q *kleiner* als u, so besitzt jedes der beiden Gebilde eine Knotenverbindung $(q-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von der Gesammtverdrehung des Gebildes: $(u-1) \times 360^0$ den Betrag: $(q-1) \times 360^0$ in Form jener $(q-1)$ irreductibeln Ueberkreuzungen in Anspruch nimmt, welche der aus den Umschlingungen des ersten Knotens heraustretende *Schlusstheil* des $(q-1)^{\text{ten}}$ Knotens mit den $(q-1)$ *Knotenbögen* bildet. Die übrigen $(u-q)$ Drehungen um je 360^0 treten in den knotenfreien Theilen beider Gebilde zwar ursprünglich auch als *Ueberkreuzungen* auf, lassen sich aber durch *Streckung* derselben direct in *ebenso viele* Windungen um je 360^0 umsetzen, womit vorläufig das Auftreten von $(u-q)$ Aufhängungen erklärt ist. Da ferner der Schnitt an und für sich q volle Windungen um die Mittellinie des Ringes ausführt, was — unabhängig von den jeweiligen Verdrehungen beider Gebilde — q weitere Aufhängungen des einen Gebildes auf dem anderen bedingt, so ergiebt sich für $q < u$ in der That: $h = (u-q) + q = u$.

Ist dagegen zweitens q *grösser* als u, so absorbiren die zwei in allen derartigen Fällen entstehenden Knotenverbindungen $(u-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit je $(u-1)$ Knoten die *gesammte* Verdrehung beider Gebilde in Form von irreductibeln Ueberkreuzungen, und können daher *nur die Windungen* des Schnittes in der Gestalt von Aufhängungen zur Geltung gelangen, d. h. es muss $h = q$ sein.

Es erübrigt jetzt noch die Besprechung jener Schnitte *zweiter* Art, für welche u und t entweder *gleichzeitig ungerade* Zahlen vorstellen, oder u eine *gerade*, t eine *ungerade* Zahl repräsentirt.

Indem wir hierbei von der Betrachtung der *Grenzlinien* des jeweiligen Schnittes auf der Ringoberfläche ausgehen, ergiebt sich, dass dieselben immer *eine einzige* in sich selbst zurückkehrende Curve von doppelter Krümmung constituiren, welche die Peripherie jedes Querschnittes des Ringes in $2u$ gleiche Theile zerlegt und dessen Mittellinie ebenso oft umwindet, als t positive oder negative Einheiten besitzt. Es ist mithin jeder solche Schnitt *zweiter* Art einem Schnitte *erster* Art mit *gleicher* Drehungszahl aber *doppelt so grosser* Umlaufszahl äquivalent, und lassen sich alle hier in Betracht kommenden Gebilde direct auf Grundlage unserer *ersten* Reihe von Erfahrungssätzen beschreiben.

Auf diese Art können in unverdrehten, biegsamen Ringen ohne Ausführung von Querschnitten überhaupt nur einfache Verbindungen, Knotenverbindungen und Verknotungen erzeugt werden, wobei sich speciell bei den einfachen Verbindungen, den Knotenverbindungen nullter und Verknotungen erster Ordnung durch passende Wahl von u und t jeder denkbare specielle Typus realisiren lässt, während Knotenverbindungen und Verknotungen höherer Ordnungen nur in gewissen, durch meine früheren Entwicklungen vollständig präcisirten Typen herstellbar sind.

Hieran knüpft sich unmittelbar die Frage, *wie oft* irgend eine *empirisch mögliche* Verbindung beziehungsweise Verschlingung auftritt, sobald man für die Schnitte *beider* Kategorien alle denkbaren Specialisirungen von u und t in Betracht zieht?

Da diese Frage augenscheinlich in drei Unterfragen zerfällt, erscheint auch für deren Beantwortung eine *dreifache* Gliederung nothwendig, und suchen wir demgemäss vor Allem jene Zahl (N) zu ermitteln, welche besagt, durch wie viele Schnitte eine bestimmte *einfache* Verbindung, z. B. eine Verbindung vom Typus: $\overline{T} = [(+)_a]$ erzeugt werden kann.

Zu diesem Zwecke unterscheiden wir im Hinblick auf die Thatsache, dass Verbindungen lediglich bei Schnitten zweiter Art mit *ungeraden* Umlaufszahlen vorkommen, zwei Fälle, je nachdem a *gerade* oder *ungerade* ist.

Im ersten Falle entsteht die Verbindung a^{ter} Art kraft des Inductionsschlusses II so oft, als die halbe Drehungszahl des betreffenden Schnittes grösser als dessen Umlaufszahl ist und gleichzeitig den Werth a besitzt. Es wird mithin N hier gleich der, durch eine bekannte Formel bestimmten Anzahl: Z jener Glieder der Zahlenreihe: $1, 2, 3, \ldots, a-1$, welche in Bezug auf a *relative Primzahlen* vorstellen.

Im zweiten Falle tritt die Verbindung a^{ter} Art zunächst in jenen Z Fällen auf, für welche $u = a$ ist, und q kleiner als a bleibt. Sie entsteht aber ausserdem für $u < a$ noch so oft, als in der zuvor er-

wähnten Zahlenreihe *ungerade* relative Primzahlen in Bezug auf a vorkommen. Da nun die Anzahl der letzteren, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, gleich $\frac{1}{2} Z$ ist*), besitzt N in diesem Falle den Werth: $\frac{3}{2} Z$.

Die hier gezogenen Schlüsse gelten natürlich auch für die Verbindung vom Typus: $\overline{T} = [(-)_a]$ und lehren, dass N ausser für $a = 2$ nur dann eine *ungerade* Zahl ist, wenn sich a als Potenz einer absoluten Primzahl von der Form: $4p - 1$ darstellen lässt, indem für:

$$a = (4p - 1)^\alpha$$

die Gleichung:

$$Z = 2(2p - 1)(4p - 1)^{\alpha - 1}$$

besteht.

Noch einfacher gestaltet sich die Erledigung der beiden übrigen Unterfragen, welche die Bestimmung von N für positive oder negative Knotenverbindungen, beziehungsweise Verknotungen fordern. — Da hierbei nur *empirisch mögliche* Verschlingungen in Betracht kommen, wird deren jeweiliger Typus: T stets als eine Specialisirung jener allgemeinen Typengleichungen (3) und (4) auftreten, welche wir im *zweiten* Theile dieser Abhandlung für $u = a$, $t = \pm b$, resp. $u = b$, $t = \pm a$ nach Umformung des Quotienten: $\frac{b}{a} = k + \frac{\varrho}{a}$ in einen Kettenbruch abgeleitet haben. Infolge dessen ist in der vorgelegten Typengleichung die Windungszahl: w_1 des *ersten* Knotens stets gleich k, die Anzahl: n_1 der Knoten mit höheren Windungszahlen gleich $\varrho - 1$ und die Gesammtzahl aller Knoten: n gleich $a - 1$, also:

$$a = n + 1, \quad b = (n + 1) w_1 + (n_1 + 1),$$

mittelst welcher Daten sich über den jeweiligen Werth von N, wie folgt, entscheiden lässt:

a) Bildet T den Typus einer positiven oder negativen *Knotenverbindung*, so kann dieselbe für *ungerade* Werthe von a und b durch zwei verschiedene Schnitte erster Art, jedoch durch keinen einzigen Schnitt zweiter Art erzeugt werden, während in jenem Falle, wo entweder a oder b eine *gerade* Zahl vorstellt, speciell der Schnitt erster Art mit *gerader* Umlaufszahl einem Schnitte zweiter Art mit der *halben* Umlaufszahl und *derselben* Drehungszahl entspricht. Es ist also im ersten Falle N constant gleich 2, im zweiten dagegen gleich 3.

b) Charakterisirt T eine positive oder negative *Verknotung*, so beschränkt sich die Frage nach den möglichen Erzeugungsweisen derselben von vornherein auf Schnitte *zweiter* Art mit *ungeraden* Um-

*) Die einzige Ausnahme von dieser Regel tritt für $a = 1$ ein, für welche Specialisirung $N = 2$ ist, weil die positive und negative Verbindung *erster* Art bekanntlich in einander transformirt werden können.

laufszahlen und *geraden* Drehungszahlen. Es wird daher, sobald eine der beiden Grössen a, b durch 2 theilbar ist, nur *ein einziger* Schnitt die betreffende Verknotung hervorbringen, während bei *ungeraden* Werthen von a und b stets *je zwei*, durch die Gleichungen:

$$u = a, \quad t = \pm 2b; \quad u = b, \quad t = \pm 2a$$

präcisirte Schnitte das gewünschte Resultat liefern.

Hiermit erscheint der jeweilige Werth von N für jede empirisch mögliche Verschlingung direct gegeben, und tritt nunmehr auch das eigenthümliche Verhältniss der Verbindungen zu den Verknotungen deutlich hervor. Da nämlich kraft des Inductionsschlusses II für *beide* zuvor angeführte Substitutionsreihen die Anzahl der, gleichzeitig mit der Verknotung entstehenden Aufhängungen *dieselbe* bleibt, combinirt sich jede Verknotung nur mit einer einzigen Verbindung, *so dass der Zusammenhang zwischen den jeweiligen Typengleichungen für T und $\overline{T}$ gleichfalls als ein fixer anzusehen ist.*

Diese Thatsache führt auf die Vermuthung, dass jede Verknotung mit der ihr zugehörigen Verbindung — theoretisch betrachtet — *Ein Ganzes* ausmache.

Um hierüber Aufschluss zu gewinnen, recurriren wir auf die bekannten Wechselbeziehungen zwischen Knotenverbindungen und Verknotungen, gemäss welchen aus jeder Knotenverbindung mittelst eines Längsschnittes eine Verknotung von congruentem Typus herstellbar ist, *folglich alle früher aufgestellten Transformationsgleichungen für beide Verschlingungsformen gelten.* Es werden also auch die der Substitutionsreihe:

$$u = 2p - 1, \quad t = \pm 2\{k(2p - 1) + \varrho\},$$

beziehungsweise:

$$u = 2p - 1, \quad t = \pm 2\varrho$$

entsprechenden Verknotungen der $2(p - 1)^{\text{ten}}$ und $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung für $k = 0$ in einander transformirbar sein, wobei dann die Zahl der *irreductibeln* Ueberkreuzungen in jedem der verknoteten Gebilde von $2(p - 1)$ auf $(\varrho - 1)$ sinkt, respective je $(2p - \varrho - 1)$ Ueberkreuzungen in ebenso viele Windungen um je 360^0 verwandelt werden können. Auf diese Art erfahren die der *ersten* Substitutionsreihe zugehörigen $\{k(2p - 1) + \varrho\}$ Aufhängungen für $k = 0$ einen Zuwachs um $(2p - \varrho - 1)$ Aufhängungen von *gleichem* Zeichen, und so entsteht die, für die *zweite* Substitutionsreihe charakteristische Verbindung der $(2p - 1)^{\text{ten}}$ Art. Dies beweist, *dass an den Transformationen der Verknotungen die ihnen zugeordneten Verbindungen gleichfalls Antheil nehmen,* womit die früher ausgesprochene Vermuthung ihre Bestätigung gefunden hat.

Zum Schlusse der vorliegenden topologischen Untersuchungen*) mögen jetzt noch in Kürze die Gründe dargelegt werden, aus welchen ich bei der Lösung der hier behandelten Probleme weder den auf die Umschlingungen zweier geschlossener Linien bezüglichen Satz von Gauss, noch die von B. Listing und G. Tait für Knoten gewählten Darstellungsweisen verwerthen konnte.

Was zunächst den Gauss'schen Satz**) betrifft, so besagt derselbe bekanntlich, dass — unter x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der einen, unter x', y', z' jene irgend eines Punktes der anderen geschlossenen Linie, unter Δ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x'-x, & y'-y, & z'-z \\ dx, & dy, & dz \\ dx', & dy', & dz' \end{vmatrix}$$

verstanden — das durch beide Linien ausgedehnte Doppelintegral:

$$\int\int \frac{\Delta}{\left\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = 4m\pi$$

ist, wenn m die Anzahl der Umschlingungen vorstellt.

Bringt man behufs praktischer Verwerthung des Integrales eine der beiden Curven durch Biegung in eine horizontale Ebene, so zeigt sich sofort, dass die zweite Curve, wenn man dieselbe von irgend einem ihrer Punkte aus vollständig durchläuft, die Ebene der ersten Curve bei manchen Umschlingungen von oben nach unten, bei anderen von unten nach oben durchsetzen kann. Es wird also, wie schon C. Maxwell***) erkannt, aber erst O. Boeddicker†) eingehend nachgewiesen hat, nothwendig, *zweierlei* Arten von Umschlingungen zu unterscheiden, je nachdem dieselben infolge von Durchsetzungen erster Art oder von solchen zweiter Art entstehen, wonach der

*) Eine eingehende Erörterung ihrer *theoretischen* Bedeutung findet man im dritten Theile meiner mehrerwähnten Abhandlung, p. 953—971.

**) Dieser Satz, bekanntlich der einzige, in welchem Gauss das Gebiet der Topologie in Betracht gezogen hat, wird von seinem Entdecker mit folgenden, historisch interessanten Bemerkungen (s. Gauss' Werke, V. Bd., p. 605) eingeleitet: „Von der Geometria Situs, die Leibnitz ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderhalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine *Hauptaufgabe* aus dem Grenzgebiete der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis wird die sein, *die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.*"

***) S. h. dessen 1873 zu Oxford erschienenes Werk: „A treatise on Electricity and Magnetism", vol. II, p. 40, 41.

†) S. h. dessen 1876 zu Stuttgart erschienene Schrift: „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Electrodynamik", p. 52—58.

numerische Werth des genannten Doppelintegrales von Fall zu Fall durch das Product: $4\varepsilon(a-b)\pi$ bestimmt erscheint, in welchem a die Anzahl der Umschlingungen erster Art, b jene der Umschlingungen zweiter Art vorstellt, und ε gleich $+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem $a-b$ positiv oder negativ ausfällt.

Hieraus folgt aber weiter, dass der numerische Werth jenes Doppelintegrales beispielsweise für eine *Doppelverbindung* zweier Curven vom Typus $[(+)_a(+)_b]$, $(a>b)$ *ebenso gross* ausfällt wie für eine *einfache* Verbindung $(a-b)^{\text{ter}}$ Art, mithin speciell für $a=b$ nicht nur für zwei unverschlungene Curven, sondern auch für zwei Curven in einer Doppelverbindung vom Typus: $[(+)_a{}^2]$ verschwindet.

Auf diese Art steht der Gaussische Satz zu dem, was ich als *positive* resp. *negative* Aufhängung bezeichne, im Allgemeinen in *keiner eindeutigen* Beziehung, und war daher auch eine Anwendung desselben auf die von mir behandelten Fragen a priori ausgeschlossen.

Um endlich noch B. Listings*) und G. Taits**) Darstellungsweisen gegebenen Knoten, soweit hierbei später von mir verwendete Knoten in Betracht gezogen wurden, ersichtlich zu machen und einen *directen* Vergleich mit meiner Darstellungsweise *derselben* Gebilde zu ermöglichen, habe ich die betreffenden Knoten auf Taf. X und XI einerseits in den von mir gewählten Gestalten, anderseits in den, ihnen von jenen Mathematikern gegebenen Formen abgebildet und drücke die zwischen den verschiedenen Verschlingungen geltenden Beziehungen im Folgenden symbolisch aus, wobei ich die Namen: Listing und Tait der Kürze wegen auf deren Anfangsbuchstaben reducire und für die Worte: „transformirbar in“ das Zeichen $\overline{\sim}$ benütze.

Das Experiment lehrt nämlich, dass die nachstehenden Transformationen ausführbar sind:

$$\text{F. 29 (L., T), F. 30 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 41}, \; (T=[(+)_1]);$$
$$\text{F. 31, 32 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 42}, \; (T=[(+)_1^2]);$$
$$\text{F. 33, 34, 35, 36 (L., T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 43}, \; (T=[(-)_1\,(+)_1]);$$
$$\text{F. 37, 38 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 44}, \; (T=[(+)_2]);$$
$$\text{F. 39 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 45}, \; (T=[(+)_2\,(+)_1]);$$
$$\text{F. 40 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 46}, \; (T=[(+)_1\,(+)_2]);$$
$$\text{F. 47, 48 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 59}, \; (T=[(-)_1\,(+)_1^2]);$$
$$\text{F. 49 (T.)} \;\overline{\sim}\; \text{F. 60}, \; (T=[(+)_2\,(-)_1]);$$

*) S. h. dessen 1848 zu Göttingen erschienene „Vorstudien zur Topologie“, p. 54—58.

**) S. h. ausser dessen Arbeit: „On knots“ (Transactions of the royal society of Edinburgh, vol. XXVIII, part I, p. 145—190) noch eine Reihe kleinerer Aufsätze über dasselbe Thema in den „Proceedings of the royal society of Edinburgh“, Session 1876—77 u. 1878—79.

F. 50, 51 (T.) $\overline{\sim}$ F. 61, $(T = [(-)_1\,(+)_1\,(-)_1])$;
F. 52, 53, 54 (L., T.) $\overline{\sim}$ F. 62, $(T = [(-)_1^2\,(+)_1^2])$;
F. 55, 56 (T.) $\overline{\sim}$ F. 63, $(T = [(+)_1^2])$;
F. 57, 58 (T.) $\overline{\sim}$ F. 64, $(T = [(+)_1\,(+)_2])$.

In diesem Schema, welches *alle* von Listing graphisch dargestellten Knoten und fast die Hälfte sämmtlicher von Tait abgebildeter Knoten enthält, repräsentiren F. 41 und 44 speciell die positiven Knoten erster und zweiter Art, Fig. 42, 43, 45, 46, 60 Verknüpfungen *erster* Ordnung, Fig. 59, 61 solche *zweiter* Ordnung, F. 62 eine Verknüpfung *dritter* Ordnung, endlich Fig. 63, 64 Knotenverbindungen *erster* Ordnung, und dürfte wohl schon eine oberflächliche Vergleichung der in einander transformirbaren Figuren genügen, um die *grössere Einfachheit* meiner Knotenformen gegenüber jenen von Listing und Tait erkennen zu lassen.

Eine Verwendung der letzteren Knotenformen in meinen topologischen Untersuchungen wäre daher mit der, vom wissenschaftlichen Standpunkte nothwendigen Forderung unvereinbar gewesen, die in Betracht gezogenen Erscheinungen nicht nur *vollständig*, sondern auch *möglichst einfach* zu beschreiben.

Wien, im November 1883.

Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlicher.

Von

Otto Staude in Breslau.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Bedürfniss erwachsen, *die Theorie der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale* 1. *Ordnung* in einer Form zu entwickeln, welche für gewisse *geometrische Anwendungen* geeigneter sei, als die bisher bekannten Darstellungen jener Theorie. Dieser Veranlassung entsprechend ist in der Arbeit vor Allem angestrebt worden, in den aufzustellenden Formelsystemen *die im Wesen derselben begründete Gruppirung* der betheiligten Elemente auch der *Anschauung* möglichst unmittelbar darzubieten. Von den verschiedenen Momenten, die diesem Zwecke dienen, seien hier die hauptsächlichsten hervorgehoben.

Es bedarf zuerst *der gleichmässigen**) *Bezeichnung der* 6 *Verzweigungspunkte* der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht 2, im Gegensatz zu der für andere Untersuchungen mitunter vortheilhaften Bezeichnungsweise, bei welcher einer der Verzweigungspunkte die ausgezeichnete Benennung ∞ oder drei bezüglich die ausgezeichneten Benennungen 0, 1, ∞ erhalten.

Es ist zweitens für die Behandlung des Umkehrproblems in dem geforderten Sinne von besonderer Wichtigkeit, in Gestalt und Anordnung der bezüglichen Formeln *die charakteristische Gruppirung der* 16 *Thetafunctionen zweier Veränderlicher mit Bezug auf die* 6 *Verzweigungspunkte* zum Ausdrucke zu bringen. Diese Gruppirung besteht

*) Die gleichmässige Bezeichnung ist schon früher angewendet bei C. Neumann, Die Umkehrung der Abel'schen Integrale (Halle 1863); Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden (Halle 1876); Cayley, On the double Thetafunctions in connexion with a 16-nodal quartic surface, Crelle's Journal Bd. 83, S. 216, (1877); Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal Bd. 84, S. 339, (1877), und anderwärts.

darin, dass 6 von den 16 Thetafunctionen beziehungsweise einzeln den 6 Verzweigungspunkten zugehören, während die 10 übrigen den 10 verschiedenen Eintheilungen aller 6 Verzweigungspunkte in jedesmal 2 Gruppen von je 3 entsprechen.*)

Einen weiteren Beitrag zu der verlangten Gestaltung der Resultate bringt *eine auf die erwähnte Gruppirung der* 16 *Thetafunctionen und der* 6 *Verzweigungspunkte gegründete Indicesbezeichnung* der Thetafunctionen mit sich,**) welche in der Arbeit eingeführt ist und sowohl mit der Weierstrass'schen Indicesbezeichnung***) als mit der Riemann'schen Charakteristikenbezeichnung†) in engem Zusammenhang steht.

Als letztes für die Entwicklung wesentliches Moment ist die Ersetzung der 16 Thetafunctionen durch 16 andere je um einen constanten Factor von jenen verschiedene Functionen hervorzuheben. Dieselben entsprechen den, nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass, bei der Theorie der Abel'schen Functionen dreier Veränderlicher von Herrn Schottky††) gebrauchten *Sigmafunctionen.*

Unter gleichzeitiger und durchgreifender Verwerthung der aufgezählten Vortheile nähert sich die darzustellende Theorie der Uebersichtlichkeit, ohne welche die Anwendung auf gewisse Gebiete der Geometrie einen befriedigenden Abschluss nicht erreichen kann.

Was die analytische Behandlung des Umkehrproblems nach den angegebenen Grundsätzen angeht, so lege ich die von Herrn Rosenhain†††) verfolgte Fragestellung zu Grunde, welche in vervollständigter Form so ausgesprochen werden kann:*†) Die Verhältnisse der

---

*) Das Gesetz dieser Gruppirung liegt in den Entwicklungen bei Cayley, A memoir on the single and double Thetafunctions (Philosophical transactions of the R. society vol. 171, S. 938 ff., 1879), ausgesprochen.

**) In anderer Weise ist bei Cayley, a. zuletzt a. O., die Gruppirung zur Grundlage einer Bezeichnung („single-and-double-letter notation") verwerthet.

***) Ueber die Grundlagen der Weierstrass'schen Bezeichnung referirt Borchardt, Crelle's Journal Bd. 87, S. 169 (1878), ferner Königsberger, Crelle's Journal Bd. 64, S. 20 (1864).

†) Vgl. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Wiener Denkschriften Bd. 24, S. 43 (1864).

Tabellen zur Vergleichung der verschiedenen Bezeichnungen findet man bei Cayley, a. zuletzt a. O., S. 935 und bei Forsyth, Memoir on the thetafunctions, particularly those of two variables, Philosophical Transactions of the R. society, vol. 173, S. 788 (1881).

††) Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln (Leipzig, 1880), SS. 36. 153.

†††) Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, Mémoires présentés par divers savants, Paris, 1846.

*†) Die Formulirung entspricht der von Borchardt ausgearbeiteten *Jacobi'schen Theorie der elliptischen Functionen*, Jacobi's Ges. W., hrsg. von Borchardt und Weierstrass, B. I, S. 497.

16 Thetafunctionen von 2 Variabeln v_1, v_2 und 3 Parametern a_{11}, a_{12}, a_{22} sind als algebraische Functionen zweier unabhängig veränderlicher Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 eines algebraischen Gebildes von der Form $s^2 = (a_0 - z)\,(a_1 - z)\,(a_2 - z)\,(a_3 - z)\,(a_4 - z)\,(a_5 - z)$ darzustellen, und das hiermit in impliciter Form gegebene Functionsverhältniss einerseits nach v_1, v_2, andererseits nach z_1, s_1 und z_2, s_2 aufzulösen. Ferner sind die Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen und die Nullwerthe der partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden, endlich auch die 3 Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} der Thetafunction durch die 6 Verzweigungspunkte a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 des hyperelliptischen Gebildes auszudrücken. Hieran hat sich noch der Nachweis zu schliessen, dass das letztere ein allgemeines hyperelliptisches Gebilde 1. Ordnung ist.*)

Die Behandlung dieser Aufgabe kann in 2 Theile gespalten werden, von denen der eine die Theorie der Thetarelationen als einzige Voraussetzung hat, der andere aber auf die Theorie der Periodicitätsmoduln der als hyperelliptische Integrale gedachten Argumente der Thetafunction sich stützt. Die schärfere Charakterisirung der beiden Theile kann erst nach Einführung einer Reihe von Bezeichnungen gegeben werden und ist in den §§ 6 und 17 nachgeholt, wo zugleich der Gedankengang der vorliegenden Arbeit im Einzelnen erläutert ist.

Von den beiden Theilen ist in der Arbeit nur der erste behandelt, der in der Ueberschrift kurz als Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen bezeichnet ist, während der zweite einer andern Gelegenheit aufgespart bleibt.

Kapitel I.

Parameterdarstellung der Verhältnisse der geraden Thetafunctionen und der partiellen Differentialquotienten der ungeraden Thetafunctionen für verschwindende Argumente.

§ 1.

Definition und Bezeichnung der Thetafunctionen.

Die Thetafunction zweier Veränderlicher wird definirt durch die Gleichung:

$$(1)\qquad \vartheta\binom{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1',\ \varepsilon_2'}(v_1, v_2)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n_1} \sum{}^{n_2}\, e^{a_{11}\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + 2a_{12}\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right) + a_{22}\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + 2\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{\varepsilon_1'\pi i}{2}\right) + 2\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2'+\frac{\varepsilon_2'\pi i}{2}\right)}.$$

*) Vgl. die Anmerkung von Weierstrass in der eben erwähnten Jacobi'schen Theorie, a. a. O. S. 545.

Hierin sind mit v_1, v_2 die beiden Argumente der Function, mit a_{11}, a_{12}, a_{22} aber gegebene Constanten bezeichnet, welche der zur Convergenz der Doppelsumme (1) erforderlichen Bedingung entsprechen, dass der reelle Theil der quadratischen Form:

$$a_{11} n_1^2 + 2 a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2$$

für alle positiven und negativen ganzen Zahlen n_1 und n_2 negativ sei. Von den 4 Buchstaben ε_1, ε_2, ε_1', ε_2' soll jeder entweder der Zahl 0 oder der Zahl 1 gleich sein, sodass der Complex der 4 Buchstaben, die Charakteristik der Thetafunction, 16 verschiedene Bedeutungen erhält.

Die Definitionsgleichung (1) umfasst daher 16 verschiedene Functionen der Variablen v_1, v_2. Diese 16 Functionen sollen im Folgenden, statt durch die 4 Indices, welche ihre Charakteristik ausmachen, in einfacherer Weise unterschieden werden. Eine von ihnen soll *keinen* Index, die 15 übrigen aber je ein *Indicespaar* bekommen; und zwar soll jedes Indicespaar aus zwei verschiedenen der 6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 bestehen. Im einzelnen sei die Bezeichnung durch folgende Tabelle festgesetzt:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta(v_1, v_2)} \\
\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{24}(v_1, v_2) & \vartheta\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{35}(v_1, v_2) \\
\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{40}(v_1, v_2) & \vartheta\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{51}(v_1, v_2) \\
\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{02}(v_1, v_2) & \vartheta\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{13}(v_1, v_2) \\
\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{01}(v_1, v_2) & \vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{03}(v_1, v_2) \\
\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{21}(v_1, v_2) & \vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{23}(v_1, v_2) \\
\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{41}(v_1, v_2) & \vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{43}(v_1, v_2) \\
\multicolumn{2}{c}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{05}(v_1, v_2)} \\
\multicolumn{2}{c}{\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{25}(v_1, v_2)} \\
\multicolumn{2}{c}{\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta_{45}(v_1, v_2),}
\end{array}\right.$$

Die Stellung der beiden Indices eines Paares wird als gleichgültig auf-

gefasst, sodass z. B. $\vartheta_{24}(v_1, v_2)$ und $\vartheta_{42}(v_1, v_2)$ dieselbe Function bedeuten.

Die eingeführte Aenderung in der Bezeichnung mag vorerst als eine *Abkürzung* betrachtet werden; ihre Motivirung giebt § 10.

Gegenwärtig sei nur hervorgehoben, dass die mit 2 Indices bezeichnete Thetafunction *ungerade* ist, wenn die Summe der beiden Indices gerade, und dass sie *gerade* ist, wenn die Summe der beiden Indices ungerade ist oder die Indices fehlen.

§ 2.

Parameterdarstellung der Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen.

Zwischen den Werthen, welche die 10 geraden Thetafunctionen, $\vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2)$ mit ungeradem $i+\varkappa$, für die Argumente $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ annehmen und welche kurz mit $\vartheta_{i\varkappa}$ bezeichnet werden sollen, bestehen eine Reihe von identischen Relationen. Unter Benutzung derselben kann man die 9 Verhältnisse der 10 Constanten $\vartheta_{i\varkappa}$ durch eine geringere Zahl von einander unabhängiger Parameter ausdrücken. Als solche Parameter werden hier sechs mit $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ (collectiv mit a_i) zu bezeichnende Grössen benutzt. Dieselben sind durch die gegebenen Constanten a_{11}, a_{12}, a_{22} der Thetafunction nicht einzeln, sondern nur in der Weise bestimmt, dass 3 von einander unabhängige Doppelverhältnisse von je 4 der 6 Parameter gegebene Werthe erhalten.

Man denke sich dementsprechend etwa a_0, a_2, a_4 beliebig angenommen und definire a_1, a_3, a_5 durch die Gleichungen:

$$(3)\quad \frac{(a_2-a_0)(a_4-a_1)}{(a_4-a_0)(a_2-a_1)} = \frac{\vartheta_{43}^2\,\vartheta_{45}^2}{\vartheta_{23}^2\,\vartheta_{25}^2}, \quad -\frac{(a_2-a_0)(a_4-a_3)}{(a_4-a_0)(a_2-a_3)} = \frac{\vartheta_{45}^2\,\vartheta_{41}^2}{\vartheta_{25}^2\,\vartheta_{21}^2},$$
$$\frac{(a_2-a_0)(a_4-a_5)}{(a_4-a_0)(a_2-a_5)} = \frac{\vartheta_{41}^2\,\vartheta_{43}^2}{\vartheta_{21}^2\,\vartheta_{23}^2}.\text{*)}$$

Nimmt man hierzu die 6 identischen Gleichungen:

---

*) Das negative Zeichen in der 2. Gleichung ist deshalb gewählt, damit die Formeln unmittelbar auf den Fall passen, wo die a_{11}, a_{12}, a_{22} sowohl wie die a_i reell sind und $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 > a_0$ ist. Es liegt sonach in dem Ansatze (3) eine gewisse Beschränkung der Allgemeinheit, die für die nachherigen Formeln (5) in der Bevorzugung der natürlichen Reihenfolge der Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5 ihren Ausdruck findet; die Differenzenproducte unter den Wurzelzeichen sind nämlich derart, dass sie alle positiv werden, sobald die a_i reell und der erwähnten Ungleichung entsprechend sind. Wollte man diese Beschränkung beseitigen und die volle Gleichberechtigung der 6 Parameter hervortreten lassen, so dürfte man nur die achten Potenzen der $\vartheta_{i\varkappa}$ in ihren Verhältnissen angeben.

$$(4)\quad\begin{cases} \vartheta_{03}^2\,\vartheta_{05}^2+\vartheta_{23}^2\,\vartheta_{25}^2-\vartheta_{43}^2\,\vartheta_{45}^2=0, & \vartheta^2\,\vartheta_{01}^2-\vartheta_{25}^2\,\vartheta_{43}^2-\vartheta_{23}^2\,\vartheta_{45}^2=0,\\ \vartheta_{05}^2\,\vartheta_{01}^2-\vartheta_{25}^2\,\vartheta_{21}^2-\vartheta_{45}^2\,\vartheta_{41}^2=0, & \vartheta^2\,\vartheta_{03}^2-\vartheta_{21}^2\,\vartheta_{45}^2+\vartheta_{25}^2\,\vartheta_{41}^2=0,\\ \vartheta_{01}^2\,\vartheta_{03}^2-\vartheta_{21}^2\,\vartheta_{23}^2+\vartheta_{41}^2\,\vartheta_{43}^2=0, & \vartheta^2\,\vartheta_{05}^2-\vartheta_{23}^2\,\vartheta_{41}^2-\vartheta_{21}^2\,\vartheta_{43}^2=0^{*)}, \end{cases}$$

so bestimmen sich aus den 9 Gleichungen (3) und (4) eindeutig die 9 Verhältnisse der Biquadrate der 10 Constanten $\vartheta_{i\varkappa}$ in ihrer Abhängigkeit von den 6 Parametern a_i.

Indem man aus den gefundenen Ausdrücken die 4. Wurzeln auszieht und einen Proportionalitätsfactor α einführt, stellt sich das Resultat folgendermaassen dar:

$$(5)\quad\begin{cases} \vartheta\phantom{_{01}} = \alpha\sqrt[4]{(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)}\\ \vartheta_{01} = \alpha\sqrt[4]{(a_2-a_4)(a_4-a_1)(a_1-a_2)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_0)(a_0-a_3)}\\ \vartheta_{03} = \alpha\sqrt[4]{(a_3-a_4)(a_4-a_2)(a_2-a_3)\cdot(a_1-a_5)(a_5-a_0)(a_0-a_1)}\\ \vartheta_{05} = \alpha\sqrt[4]{(a_4-a_5)(a_5-a_2)(a_2-a_4)\cdot(a_1-a_3)(a_3-a_0)(a_0-a_1)}\\ \vartheta_{21} = \alpha\sqrt[4]{(a_1-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_1)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_2)(a_2-a_3)}\\ \vartheta_{23} = \alpha\sqrt[4]{(a_3-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_3)\cdot(a_2-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_2)}\\ \vartheta_{25} = \alpha\sqrt[4]{(a_4-a_5)(a_5-a_0)(a_0-a_4)\cdot(a_2-a_3)(a_3-a_1)(a_1-a_2)}\\ \vartheta_{41} = \alpha\sqrt[4]{(a_1-a_2)(a_2-a_0)(a_0-a_1)\cdot(a_4-a_5)(a_5-a_3)(a_3-a_4)}\\ \vartheta_{43} = \alpha\sqrt[4]{(a_2-a_3)(a_3-a_0)(a_0-a_2)\cdot(a_4-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_4)}\\ \vartheta_{45} = \alpha\sqrt[4]{(a_2-a_5)(a_5-a_0)(a_0-a_2)\cdot(a_3-a_4)(a_4-a_1)(a_1-a_3)}.^{**)} \end{cases}$$

Ueber die Bedeutung der Quadrate der 4. Wurzeln lassen sich aus den Relationen (3) und (4), in welche die Quadrate der Constanten $\vartheta_{i\varkappa}$ eingehen, noch einige Schlüsse ziehen, während die Bedeutung der 4. Wurzeln selbst aus den zwischen den Constanten $\vartheta_{i\varkappa}$ bestehenden Relationen allein nicht vollständig ermittelt werden kann. Da aber die linken Seiten der Gleichungen (5) ihrer Definition nach als eindeutig

---

*) Die Formeln giebt in anderer Bezeichnungsweise unter anderen Weber, Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann. Bd. XIV, S. 182 (1878), ferner: Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel (Leipzig, 1882), S. 41. 42.

**) Diese Form der Parameterdarstellung der Nullwerthe der geraden Thetafunctionen, findet sich bei Cayley, A memoir on the single and double Thetafunctions, Philos. Transact. of the R. society vol. 171, S. 940; die erste der 10 Formeln früher schon bei Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden (Halle, 1876), S. 11.

bestimmte Constanten zu betrachten sind, so werden die Verhältnisse der 4. Wurzeln in gleichem Sinne aufzufassen sein.*)

Um in Rücksicht hierauf mit denselben rechnen zu können, ist es zweckmässig, die 15 vierten Wurzeln $\sqrt[4]{a_i - a_k}$, wo i und $\varkappa$ zwei Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind und $i > \varkappa$, als selbständige Grössen einzuführen. Dabei soll das Symbol $\sqrt[4]{a_i - a_k}$ immer einen bestimmten und ein für allemal denselben der 4 Werthe der 4. Wurzel aus $a_i - a_k$ bedeuten. Unter der 4. Wurzel:

$$\sqrt[4]{(a_i - a_k)(a_{i'} - a_{\varkappa'})\ldots},$$

wo $i > \varkappa$, $i' > \varkappa'$, ..., soll alsdann immer das Product:

$$\sqrt[4]{a_i - a_\varkappa}\,\sqrt[4]{a_{i'} - a_{\varkappa'}}\ldots$$

und in diesem die einzelnen Factoren in dem festgesetzten Sinne verstanden sein. Um diese Auffassung auf die Formeln (5) anzuwenden, hat man vorerst das Differenzenproduct unter den einzelnen Wurzeln in (5) so zu schreiben, dass in jeder Differenz der Index des Minuenden grösser ist als der des Subtrahenden; was bei allen 10 Formeln (5) geschehen kann, ohne dass sich ein Minuszeichen unter der Wurzel einstellt; so ist z. B.:

$$\vartheta = \alpha \sqrt[4]{(a_4 - a_2)(a_4 - a_0)(a_2 - a_0)\cdot(a_5 - a_3)(a_5 - a_1)(a_3 - a_1)}.$$

Die hierbei vorausgesetzte Festlegung der Werthe der 15 Wurzeln $\sqrt[4]{a_i - a_\varkappa}$, $i > \varkappa$, ist nun nicht vollkommen willkürlich. Vielmehr hat man sich dieselben so ausgeführt zu denken, dass die Verhältnisse der 10 in (5) enthaltenen Wurzeln den Verhältnissen der durch die a_{11}, a_{12}, a_{22} eindeutig bestimmten Constanten $\vartheta_{i\varkappa}$ gleich werden.

§ 3.

Lineare Transformation der Argumente der Thetafunctionen.

Nachdem die Verhältnisse der Nullwerthe der geraden Thetafunctionen ihre algebraische Parameterdarstellung gefunden haben, würde sich die Aufgabe anschliessen, die Nullwerthe der 12 partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen in ähnlicher Weise auszudrücken. Dieselben seien zur Abkürzung mit $\vartheta_{i\varkappa}'^{(1)}$, $\vartheta_{i\varkappa}'^{(2)}$ ($i + \varkappa$ gerade) bezeichnet in dem Sinne, dass:

$$\vartheta_{i\varkappa}'^{(1)} = \left[\frac{\partial \vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2)}{\partial v_1}\right]_{v_1=0,\, v_2=0} \qquad \vartheta_{i\varkappa}'^{(2)} = \left[\frac{\partial \vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2)}{\partial v_2}\right]_{v_1=0,\, v_2=0}.$$

*) Bei reellen a_{11}, a_{12}, a_{22} sind ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{23}, ϑ_{45} immer positiv; dagegen kann ϑ_{14} in diesem Falle positiv oder negativ sein, weil

$$\vartheta_{14}(a_{11}, -a_{12}, a_{22}) = -\vartheta_{14}(a_{11}, a_{12}, a_{22})$$

ist, die Convergenzbedingung der Thetareihe aber durch die Umkehr des Vorzeichens von a_{12} nicht alterirt wird.

Es würde sich indessen ergeben, dass die Verhältnisse der $\vartheta'^{(1)}_{i\varkappa}$, $\vartheta'^{(2)}_{i\varkappa}$ nicht rein algebraisch von den Parametern a_i abhängen. Um trotzdem partielle Differentialquotienten zu gewinnen, deren Nullwerthe in ihren Verhältnissen algebraische Functionen der a_i sind, muss man die Thetafunction nicht nach den ursprünglichen Argumenten v_1, v_2 differentiiren, sondern statt dieser Argumente durch eine lineare Transformation neue Argumente einführen. Die letzteren seien mit u_1, u_2 benannt und mit v_1, v_2 durch die Relationen verknüpft:

$$(6)\qquad \begin{cases} v_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2, \\ v_2 = \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2, \end{cases}$$

in denen α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} (collectiv mit $\alpha_{\mu\nu}$ bezeichnet) vorläufig disponibel bleibende Constanten von nicht verschwindender Determinante bedeuten.

Man kann hiernach die Thetafunctionen als Functionen von u_1, u_2 betrachten und mag allgemein

$$(7)\qquad \vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2) = \Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)$$

setzen.

Es ist dann für die 10 geraden Thetafunctionen (so oft $i + \varkappa$ ungerade ist):

$$(8)\qquad \vartheta_{i\varkappa} = \vartheta_{i\varkappa}(0, 0) = \Theta_{i\varkappa}(0, 0) = \Theta_{i\varkappa}.$$

Dagegen wird für die 6 ungeraden Thetafunctionen (so oft $i + \varkappa$ gerade ist), wenn man:

$$\left[\frac{\partial \Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right]_{u_1=0,\, u_2=0} = \Theta'^{(1)}_{i\varkappa}, \qquad \left[\frac{\partial \Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right]_{u_1=0,\, u_2=0} = \Theta'^{(2)}_{i\varkappa}$$

setzt:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Theta'^{(1)}_{i\varkappa} = \alpha_{11} \vartheta'^{(1)}_{i\varkappa} + \alpha_{21} \vartheta'^{(2)}_{i\varkappa}, \\ \Theta'^{(2)}_{i\varkappa} = \alpha_{12} \vartheta'^{(1)}_{i\varkappa} + \alpha_{22} \vartheta'^{(2)}_{i\varkappa}. \end{cases}$$

§ 4.

Parameterdarstellung der Nullwerthe der partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen.

Die Thetafunction enthält, insofern sie als von u_1, u_2 abhängig betrachtet wird, 4 disponible Constanten α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}. Ueber diese soll so verfügt werden, dass 4 von den 12 Grössen $\Theta'^{(1)}_{i\varkappa}$, $\Theta'^{(2)}_{i\varkappa}$ ihren Verhältnissen nach gegebenen algebraischen Ausdrücken in den a_i gleich werden.

Um diese Verfügung zu treffen, führe man vorerst die 6 Constanten ein:

$$(10)\quad\begin{cases}
\eta_{24} = \alpha\sqrt[4]{(a_2-a_4).(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)\,.\,M_{24}},\\
\eta_{40} = \alpha\sqrt[4]{(a_4-a_0).(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)\,.\,M_{40}},\\
\eta_{02} = \alpha\sqrt[4]{(a_0-a_2).(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)\,.\,M_{02}},\\
\eta_{35} = \alpha\sqrt[4]{(a_3-a_5).(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\,.\,M_{35}},\\
\eta_{51} = \alpha\sqrt[4]{(a_5-a_1).(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\,.\,M_{51}},\\
\eta_{13} = \alpha\sqrt[4]{(a_1-a_3).(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\,.\,M_{13}},\\
\text{wo die } M_{i\varkappa} \text{ folgende Producte bedeuten:}\\
M_{24} = (a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)\cdot(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5),\\
M_{40} = (a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\cdot(a_0-a_1)(a_0-a_3)(a_0-a_5),\\
M_{02} = (a_0-a_1)(a_0-a_3)(a_0-a_5)\cdot(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5),\\
M_{35} = (a_3-a_0)(a_3-a_2)(a_3-a_4)\cdot(a_5-a_0)(a_5-a_2)(a_5-a_4),\\
M_{51} = (a_5-a_0)(a_5-a_2)(a_5-a_4)\cdot(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_4),\\
M_{13} = (a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_4)\cdot(a_3-a_0)(a_3-a_2)(a_3-a_4).
\end{cases}$$

Die Verhältnisse dieser 6 Constanten $\eta_{i\varkappa}$ sind der Definition nach von denselben 6 Parametern a_i abhängig, wie die der Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen; auch soll bezüglich der Bedeutung der 4. Wurzeln in (10) das zu den Formeln (5) Bemerkte gelten. Endlich soll der in den Definitionsgleichungen (10) vorkommende Factor α der nämliche sein, wie in den Gleichungen (5); man kann sich denselben *vorläufig* als durch die Gleichung:

$$\alpha = \frac{\vartheta}{\sqrt[4]{(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)}}$$

bestimmt vorstellen. Das *Bildungsgesetz* der 6 Ausdrücke (10) ist dies, dass jedes der 6 Differenzenproducte unter den 4. Wurzeln 10 von den 15 Differenzen $a_i - a_\varkappa$ enthält und in den einzelnen Differenzenproducten beziehungsweise die Parameter $a_0, a_2, a_4, a_1, a_3, a_5$ *fehlen.**)

Nach Einführung der Grössen $\eta_{i\varkappa}$ ($i+\varkappa$ gerade) sollen die 4 Coefficienten der linearen Substitution (6) so bestimmt werden, dass unter Annahme zweier beliebiger Constanten g_1 und g_2:

$$(11)\quad\begin{cases}
\Theta_{51}^{\prime(1)} = \dfrac{a_3-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{51}, & \Theta_{13}^{\prime(1)} = \dfrac{a_5-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{13},\\[2ex]
\Theta_{51}^{\prime(2)} = \dfrac{a_3-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{51}, & \Theta_{13}^{\prime(2)} = \dfrac{a_5-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{13}.
\end{cases}$$

Sobald man diese Werthe von 4 der 12 Constanten $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(1)}$, $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(2)}$ annimmt,

---

*) Vgl. Thomae, Sammlung von Formeln etc. S. 13.

sind die 8 übrigen bereits mit bestimmt. Es gelten nämlich für die $\vartheta_{i\varkappa}$, $\vartheta_{i\varkappa}^{\prime(1)}$, $\vartheta_{i\varkappa}^{\prime(2)}$, einerseits und die $\Theta_{i\varkappa}$, $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(1)}$, $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(2)}$ andererseits die Relationen*) $(m = 1, 2)$:

$$(12)\quad \begin{cases} \vartheta_{01}\vartheta_{21}\vartheta_{41}\vartheta_{35}^{\prime(m)} = \vartheta_{03}\vartheta_{23}\vartheta_{43}\vartheta_{51}^{\prime(m)} - \vartheta_{05}\vartheta_{25}\vartheta_{45}\vartheta_{13}^{\prime(m)}, \\ \vartheta\ \ \vartheta_{21}\vartheta_{41}\vartheta_{24}^{\prime(m)} = \vartheta_{03}\vartheta_{25}\vartheta_{45}\vartheta_{51}^{\prime(m)} - \vartheta_{05}\vartheta_{23}\vartheta_{43}\vartheta_{13}^{\prime(m)}, \\ \vartheta\ \ \vartheta_{41}\vartheta_{01}\vartheta_{40}^{\prime(m)} = \vartheta_{23}\vartheta_{45}\vartheta_{05}\vartheta_{51}^{\prime(m)} - \vartheta_{25}\vartheta_{43}\vartheta_{03}\vartheta_{13}^{\prime(m)}, \\ \vartheta\ \ \vartheta_{01}\vartheta_{21}\vartheta_{02}^{\prime(m)} = \vartheta_{43}\vartheta_{05}\vartheta_{25}\vartheta_{51}^{\prime(m)} + \vartheta_{45}\vartheta_{03}\vartheta_{23}\vartheta_{13}^{\prime(m)}, \end{cases}$$

und ebenso:

$$(13)\quad \begin{cases} \Theta_{01}\Theta_{21}\Theta_{41}\Theta_{35}^{\prime(m)} = \Theta_{03}\Theta_{23}\Theta_{43}\Theta_{51}^{\prime(m)} - \Theta_{05}\Theta_{25}\Theta_{45}\Theta_{13}^{\prime(m)}, \\ \Theta\ \ \Theta_{21}\Theta_{41}\Theta_{24}^{\prime(m)} = \Theta_{03}\Theta_{25}\Theta_{45}\Theta_{51}^{\prime(m)} - \Theta_{05}\Theta_{23}\Theta_{43}\Theta_{13}^{\prime(m)}, \\ \Theta\ \ \Theta_{41}\Theta_{01}\Theta_{40}^{\prime(m)} = \Theta_{23}\Theta_{45}\Theta_{05}\Theta_{51}^{\prime(m)} - \Theta_{25}\Theta_{43}\Theta_{03}\Theta_{13}^{\prime(m)}, \\ \Theta\ \ \Theta_{01}\Theta_{21}\Theta_{02}^{\prime(m)} = \Theta_{43}\Theta_{05}\Theta_{25}\Theta_{51}^{\prime(m)} + \Theta_{45}\Theta_{03}\Theta_{23}\Theta_{13}^{\prime(m)}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (13) ergeben sich, unter Zugrundelegung der Werthe (11) und unter Benutzung der Darstellung (5) der $\Theta_{i\varkappa} = \vartheta_{i\varkappa}$, die 8 noch übrigen $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(m)}$. Man erhält durch Ausführung der Rechnung:

$$(14)\quad \begin{cases} \Theta_{24}^{\prime(1)} = \dfrac{a_0 - g_2}{g_2 - g_1}\,\eta_{24}, & \Theta_{40}^{\prime(1)} = \dfrac{a_2 - g_2}{g_2 - g_1}\,\eta_{40}, & \Theta_{02}^{\prime(1)} = \dfrac{a_4 - g_2}{g_2 - g_1}\,\eta_{02}, \\ \Theta_{24}^{\prime(2)} = \dfrac{a_0 - g_1}{g_1 - g_2}\,\eta_{24}, & \Theta_{40}^{\prime(2)} = \dfrac{a_2 - g_1}{g_1 - g_2}\,\eta_{40}, & \Theta_{02}^{\prime(0)} = \dfrac{a_4 - g_1}{g_1 - g_2}\,\eta_{02}, \\ \Theta_{35}^{\prime(1)} = \dfrac{a_1 - g_2}{g_2 - g_1}\,\eta_{35}, & \Theta_{51}^{\prime(1)} = \dfrac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1}\,\eta_{51}, & \Theta_{13}^{\prime(1)} = \dfrac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1}\,\eta_{13}, \\ \Theta_{35}^{\prime(2)} = \dfrac{a_1 - g_1}{g_1 - g_2}\,\eta_{35}, & \Theta_{51}^{\prime(2)} = \dfrac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2}\,\eta_{51}, & \Theta_{13}^{\prime(2)} = \dfrac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2}\,\eta_{13}. \end{cases}$$

Hiermit sind aber die Verhältnisse der Nullwerthe der 12 partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Functionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1\, u_2)$ algebraisch durch die 6 Parameter a_i dargestellt. Dabei ist die Constante $\eta_{i\varkappa}$ der gemeinsame Factor von $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(1)}$ und $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(2)}$ und unterscheiden die beiden Constanten g_1 und g_2 die nicht gemeinsamen Factoren von $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(1)}$ und $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(2)}$.

Zufolge der Voraussetzung über den in die Definition (10) der $\eta_{i\varkappa}$

---

*) Dieselben ergeben sich, indem man die zwischen den Thetafunctionen bestehenden Productrelationen (vgl. Krazer, a. a. O. S. 39) einmal mit den Argumenten v_1, v_2 und einmal mit den Argumenten u_1, u_2 schreibt, dieselben nach v_1 und v_2 und beziehungsweise nach u_1 und u_2 partiell differentiirt und hierauf die Argumente v_1, v_2 und u_1, u_2 verschwinden lässt.

eingehenden Factor α, kann man das erhaltene Resultat weiter dahin ausdehnen:

Durch die Formeln (5) *und* (14) *ist das Verhältniss von irgend* 2 *der* 22 *Grössen* $\Theta_{i\varkappa}(=\vartheta_{i\varkappa})$ $(i+\varkappa$ *ungerade*$)$, $\Theta'^{(1)}_{i\varkappa}$, $\Theta'^{(2)}_{i\varkappa}$ $(i+\varkappa$ *gerade*$)$ *rein algebraisch durch die* 6 *Parameter* a_i *dargestellt.**)

Dabei sind allerdings in den Functionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ 4 Constanten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ enthalten, welche die ursprüngliche Thetafunction $\vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2)$ nicht aufwies. Dieselben sind mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (11), also durch die Gleichungen zu bestimmen:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{51} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{51} = \dfrac{a_3-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{51}, & \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{13} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{13} = \dfrac{a_5-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{13}, \\[2ex] \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{51} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{51} = \dfrac{a_3-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{51}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{13} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{13} = \dfrac{a_5-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{13}; \end{array}\right.$$

ihre Determinante wird dann im Allgemeinen nicht verschwinden.

Uebersichtlicher kann man *die Coefficienten* $\alpha_{\mu\nu}$ *durch folgendes System von* 12 *Gleichungen definiren:*

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{24} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{24} = \dfrac{a_0-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{24}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{24} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{24} = \dfrac{a_0-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{24}, \\[2ex] \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{40} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{40} = \dfrac{a_2-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{40}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{40} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{40} = \dfrac{a_2-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{40}, \\[2ex] \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{02} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{02} = \dfrac{a_4-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{02}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{02} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{02} = \dfrac{a_4-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{02}. \\[2ex] \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{35} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{35} = \dfrac{a_1-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{35}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{35} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{35} = \dfrac{a_1-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{35}, \\[2ex] \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{51} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{51} = \dfrac{a_3-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{51}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{51} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{51} = \dfrac{a_3-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{51}, \\[2ex] \alpha_{11}\,\vartheta'^{(1)}_{13} + \alpha_{21}\,\vartheta'^{(2)}_{13} = \dfrac{a_5-g_2}{g_2-g_1}\,\eta_{13}, & \alpha_{12}\,\vartheta'^{(1)}_{13} + \alpha_{22}\,\vartheta'^{(2)}_{13} = \dfrac{a_5-g_1}{g_1-g_2}\,\eta_{13}. \end{array}\right.$$

Sobald nämlich die 4 letzten dieser Gleichungen — das sind die Gleichungen (15) — bestehen, folgen die 8 übrigen vermöge der Identitäten (12) von selbst.

§ 5.

Darstellung des Factors α durch die Coefficienten $\alpha_{\mu\nu}$.

Um die Coefficienten $\alpha_{\mu\nu}$ aus den Gleichungen (15) zu berechnen, würde man diese durch ϑ dividiren und die Quotienten $\frac{\eta_{51}}{\vartheta}$, $\frac{\eta_{13}}{\vartheta}$ durch die a_i ausdrücken mittels der Formeln (5) und (10). Alsdann findet

*) Vgl. Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen dreier Variabeln (Leipzig 1880), S. 153, Formeln (27)

man die $\alpha_{\mu\nu}$ durch die Quotienten $\frac{\vartheta_{51}^{\prime(1)}}{\vartheta}$, $\frac{\vartheta_{51}^{\prime(2)}}{\vartheta}$, $\frac{\vartheta_{13}^{\prime(1)}}{\vartheta}$, $\frac{\vartheta_{13}^{\prime(2)}}{\vartheta}$ und die a_i dargestellt.

Diese nur zur Orientirung angedeutete Berechnung der $\alpha_{\mu\nu}$ soll indessen nicht verfolgt, sondern die $\alpha_{\mu\nu}$ zunächst als durch die Gleichungen (16) definirte Grössen weitergeführt werden.

Durch diese Coefficienten $\alpha_{\mu\nu}$ stellt sich in einfacher Weise der Factor α dar, welcher in den Gleichungen (5) und (10) auftritt.

Aus den Definitionsgleichungen (16) der $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ ergiebt sich nämlich mit der Abkürzung

(17)
$$A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21},$$
$$A\vartheta_{51}^{\prime(1)} = \frac{(a_3 - g_2)\alpha_{22} + (a_3 - g_1)\alpha_{21}}{g_2 - g_1}\eta_{51},$$
$$A\vartheta_{51}^{\prime(2)} = \frac{(a_3 - g_2)\alpha_{12} + (a_3 - g_1)\alpha_{11}}{g_1 - g_2}\eta_{51},$$
$$A\vartheta_{13}^{\prime(1)} = \frac{(a_5 - g_2)\alpha_{22} + (a_5 - g_1)\alpha_{21}}{g_2 - g_1}\eta_{13},$$
$$A\vartheta_{13}^{\prime(2)} = \frac{(a_5 - g_2)\alpha_{12} + (a_5 - g_1)\alpha_{11}}{g_1 - g_2}\eta_{13}.$$

Hiermit erhält man:

$$A\left(\vartheta_{51}^{\prime(1)}\vartheta_{13}^{\prime(2)} - \vartheta_{51}^{\prime(2)}\vartheta_{13}^{\prime(1)}\right) = \frac{a_5 - a_3}{g_2 - g_1}\eta_{51}\eta_{13}.$$

Nun besteht aber die Relation*):

(18)
$$\vartheta_{51}^{\prime(1)}\vartheta_{13}^{\prime(2)} - \vartheta_{51}^{\prime(2)}\vartheta_{13}^{\prime(1)} = \vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{12}\vartheta_{14}$$

und ist mit Rücksicht auf (5) und (10):

$$\frac{\vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{12}\vartheta_{14}}{(a_5 - a_3)\eta_{51}\eta_{13}} = \alpha^2.$$

Demnach ist:

(19)
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{A(g_2 - g_1)}}.$$

Der in den Gleichungen (5) *und* (10) *auftretende Factor* α *ist also von der Determinante der Substitution* (6) *abhängig.*

---

*) Vergl. über dieselbe Rosenhain, a. a. O. S. 433; Kossak, das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen 1. Ordnung (Berlin, 1871), S. 15. Thomae, Sammlung von Formeln etc. S. 17 (1876); Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 338 (1877). Der Beweis der betreffenden Formeln ist nur am letztgenannten Orte angedeutet. Dagegen findet sich ein Beweis der entsprechenden Formeln für hyperelliptische Thetafunctionen von beliebig vielen Variabeln bei Thomae, Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ durch die Classenmoduln algebraischer Functionen. Crelle's J. Bd. 71, S. 201, Formel 14 (1869).

Die Abhängigkeit von g_1 und g_2 ist nur eine scheinbare, indem in A g_1 und g_2 so vorkommen, dass $A(g_2 - g_1)$ wieder von g_1 und g_2 frei wird.

§ 6.

Resultate der bisherigen Paragraphen.

Indem in § 1 von der Definition der Thetafunction ausgegangen wurde, ist die Auffassung der Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} der Thetafunction als von vorn herein *gegebener* Grössen zu Grunde gelegt. Mit ihnen sind dann zufolge der Definition der Thetafunction auch die Nullwerthe $\vartheta_{i\varkappa}$ der 10 geraden Thetafunctionen ($i + \varkappa$ ungerade) und die Nullwerthe $\vartheta'^{(1)}_{i\varkappa}$, $\vartheta'^{(2)}_{i\varkappa}$ der partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen ($i + \varkappa$ gerade) als gegebene Constanten zu betrachten. Die Aufgabe, auf deren Lösung die §§ 2—5 ausgehen, besteht in der Darstellung der durch mannigfache Relationen miteinander verknüpften 22 Constanten $\vartheta_{i\varkappa}$, $\vartheta'^{(1)}_{i\varkappa}$, $\vartheta'^{(2)}_{i\varkappa}$ durch die 6 unabhängigen Parameter a_i.

Was für die Lösung dieser Aufgabe in den §§ 2—5 geschehen ist, kann so charakterisirt werden: Es sind neben den 6 Parametern a_i 4 Hilfsgrössen α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} ($\alpha_{\mu\nu}$) eingeführt worden, welche ihrer Definition (16) nach von den a_i und den Verhältnissen der $\vartheta_{i\varkappa}$, $\vartheta'^{(1)}_{i\varkappa}$, $\vartheta'^{(2)}_{i\varkappa}$ (vgl. § 5 zu Anfang) abhängen. Alsdann ergeben sich die 22 Constanten durch die Grössen a_i und $\alpha_{\mu\nu}$ dargestellt; es gelten nämlich die 10 Formeln:

$$(20)\quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{A(g_2-g_1)}}\sqrt[4]{(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)}$$

u. s. w. (vgl. (5) und (10)) und ferner die 12 Formeln:

$$(21)\quad \vartheta'^{(1)}_{24} = \frac{(a_0-g_2)\alpha_{22}+(a_0-g_1)\alpha_{21}}{A(g_2-g_1)\sqrt{A(g_2-g_1)}}\sqrt[4]{(a_2-a_4)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)\cdot M_{24}},$$

wo wie früher:

$$M_{24} = (a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)\cdot(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5)$$

u. s. w. (Auflösungen der Gleichungen (16) mit Rücksicht auf (10) und (19)), wobei $A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

In diesen Formeln sind nun die 10 Grössen a_i und $\alpha_{\mu\nu}$ nicht von einander unabhängig; vielmehr bleibt weiter die Aufgabe zu lösen, die 4 Coefficienten $\alpha_{\mu\nu}$ durch die 6 Parameter a_i darzustellen, womit dann die eigentliche Aufgabe vollständig gelöst ist.

Die 4 Hilfsgrössen $\alpha_{\mu\nu}$ haben aber noch eine weitere Bedeutung, insofern sie in die Definition der Functionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ eingehen. Wie man sieht, sind die Formeln (20) und (21) von verschiedenem

Charakter; die Producte $\sqrt{A(g_2-g_1)}\cdot\vartheta_{i\varkappa}$*) sind nämlich direct gleich algebraischen Functionen der Parameter a_i, während die Producte $\sqrt{A(g_2-g_1)}\cdot\vartheta_{i\varkappa}^{\prime(m)}$*) noch von den Hilfsgrössen $\alpha_{\mu\nu}$ abhängen. Um nun eine Thetafunction zu bilden, bei der dieses verschiedene Verhalten der Nullwerthe der geraden Thetafunctionen und der Nullwerthe der Differentialquotienten der ungeraden Thetafunctionen in Wegfall kommt, ist die Function:

$$\Theta_{i\varkappa}(u_1\,u_2)=\vartheta_{i\varkappa}(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2)$$

(vgl. Formel (1)) definirt werden. Unter Einführung dieser Thetafunction und geeigneter Verfügung über die Coefficienten $\alpha_{\mu\nu}$ erhält man an Stelle von (20) und (21):

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\sqrt{A(g_2-g_1)}\,.\,\Theta\\&=\sqrt{(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\,.\,(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)}\\&\text{und 9 weitere Formeln}\end{aligned}\right.$$

und:

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}&\sqrt{A(g_2-g_1)}\cdot\Theta_{24}^{\prime(1)}\\&=\frac{a_0-g_2}{g_2-g_1}\sqrt{(a_2-a_4)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)\cdot M_{24}},\\&\sqrt{A(g_2-g_1)}\cdot\Theta_{24}^{\prime(2)}\\&=\frac{a_0-g_1}{g_1-g_2}\sqrt{(a_2-a_4)\cdot(a_3-a_5)(a_5-a_1)(a_1-a_3)\cdot M_{24}}\\&\text{(wo wieder}\\&M_{24}=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)\cdot(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\\&\text{gesetzt ist)}\\&\text{und 5 weitere Formelpaare.}\end{aligned}\right.$$

Die Thetafunctionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1,u_2)$ haben somit die Eigenschaft, dass die Verhältnisse der 22 Constanten $\Theta_{i\varkappa}$, $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(1)}$, $\Theta_{i\varkappa}^{\prime(2)}$ rein algebraisch von den 6 Parametern a_i abhängen.

---

*) Die hier gegebene Darstellung des Factors $\sqrt{A(g_2-g_1)}$ gelangt, wenn die Determinante A, wie ich dies bei einer andern Gelegenheit zeigen werde, durch die Parameter a_i ausgedrückt wird, zur Uebereinstimmung mit den Darstellungen von Thomae, Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ durch die Classenmoduln algebraischer Functionen, Crelle's J. Bd. 71, S. 201 (1869); Fuchs, Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von $\vartheta(0,0,\ldots,0)$ als Function der Classenmoduln, Crelle's J. Bd. 73, S. 305 (1871).

Kapitel II.

Parameterdarstellung der Verhältnisse der Theta- (Sigma-)functionen für veränderliche Argumente.

§ 7.

Ein System untereinander unabhängiger Relationen zwischen den 16 Thetafunctionen.

Zwischen den 16 Thetafunctionen $\Theta_{ik}(u_1, u_2)$ mit veränderlichen Argumenten bestehen zahlreiche Relationen, welchen sämmtlich identisch genügt werden kann, indem die Quotienten der 16 Thetafunctionen als algebraische Functionen zweier neuer Variabler z_1, z_2 dargestellt werden. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung beruht darauf, dass aus der Zahl der erwähnten Relationen auf mannigfache Weise 13 von einander unabhängige Relationen ausgewählt werden können. Solche 13 Relationen sind die folgenden, wobei zur Abkürzung $\Theta_{ik}(u)$ für $\Theta_{ik}(u_1, u_2)$ gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
\Theta^2\Theta_{35}^2(u) &= \Theta_{01}^2\Theta_{24}^2(u) + \Theta_{21}^2\Theta_{40}^2(u) - \Theta_{41}^2\Theta_{02}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{51}^2(u) &= -\Theta_{03}^2\Theta_{24}^2(u) + \Theta_{23}^2\Theta_{40}^2(u) + \Theta_{43}^2\Theta_{02}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{13}^2(u) &= \Theta_{05}^2\Theta_{24}^2(u) - \Theta_{25}^2\Theta_{40}^2(u) + \Theta_{45}^2\Theta_{02}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{01}^2(u) &= \Theta_{01}^2\Theta^2(u) - \Theta_{41}^2\Theta_{40}^2(u) - \Theta_{21}^2\Theta_{02}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{03}^2(u) &= \Theta_{03}^2\Theta^2(u) - \Theta_{43}^2\Theta_{40}^2(u) + \Theta_{23}^2\Theta_{02}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{05}^2(u) &= \Theta_{05}^2\Theta^2(u) + \Theta_{45}^2\Theta_{40}^2(u) + \Theta_{25}^2\Theta_{02}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{21}^2(u) &= \Theta_{21}^2\Theta^2(u) + \Theta_{01}^2\Theta_{02}^2(u) + \Theta_{41}^2\Theta_{24}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{23}^2(u) &= \Theta_{23}^2\Theta^2(u) - \Theta_{03}^2\Theta_{02}^2(u) - \Theta_{43}^2\Theta_{24}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{25}^2(u) &= \Theta_{25}^2\Theta^2(u) - \Theta_{05}^2\Theta_{02}^2(u) + \Theta_{45}^2\Theta_{24}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{41}^2(u) &= \Theta_{41}^2\Theta^2(u) - \Theta_{21}^2\Theta_{24}^2(u) + \Theta_{01}^2\Theta_{40}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{43}^2(u) &= \Theta_{43}^2\Theta^2(u) + \Theta_{23}^2\Theta_{24}^2(u) + \Theta_{03}^2\Theta_{40}^2(u),\\
\Theta^2\Theta_{45}^2(u) &= \Theta_{45}^2\Theta^2(u) - \Theta_{25}^2\Theta_{24}^2(u) - \Theta_{05}^2\Theta_{40}^2(u),
\end{aligned}$$

$$\Theta_{03}\Theta_{05}\Theta_{01}(u)\Theta_{24}(u) - \Theta_{23}\Theta_{25}\Theta_{21}(u)\Theta_{40}(u) + \Theta_{43}\Theta_{45}\Theta_{41}(u)\Theta_{02}(u) = 0.$$

Auf Grund eines solchen Systems von 13 Relationen hat Herr Krazer*) die Rosenhain'schen Formeln in verallgemeinerter Form abgeleitet. Die Relationen nehmen aber eine für den vorliegenden

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 42 ff.

Zweck geeignetere Gestalt an, wenn man an Stelle der 16 Thetafunctionen 16 andere je um einen constanten Factor von jenen verschiedene Functionen einführt, was im folgenden Paragraphen geschehen soll.

§ 8.

Definition der Sigmafunctionen zweier Veränderlicher.

Neben jede der 16 Functionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ sei eine mit gleichen Indices behaftete Function $\sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ gestellt, und zwar sei*):

für $i + \varkappa =$ ungerade: für $i + \varkappa =$ gerade:

$$(24) \qquad \sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2) = \frac{\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)}{\Theta_{i\varkappa}}, \qquad \sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2) = -\frac{\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)}{\Theta'^{(1)}_{i\varkappa} + \Theta'^{(2)}_{i\varkappa}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass nach (14):

$$(25) \qquad -(\Theta'^{(1)}_{i\varkappa} + \Theta'^{(2)}_{i\varkappa}) = \eta_{i\varkappa}$$

ist.

Die Nullwerthe der geraden Sigmafunctionen werden nach der Definition (24) gleich 1,

$$(26) \qquad \sigma_{i\varkappa} = 1 \quad (i + \varkappa \text{ ungerade});$$

für *die Nullwerthe der partiellen Differentialquotienten der ungeraden Sigmafunctionen* hat man nach (14):

$$(26) \left\{ \begin{array}{lll} \sigma'^{(1)}_{24} = \dfrac{a_0 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'^{(1)}_{40} = \dfrac{a_2 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'^{(1)}_{02} = \dfrac{a_4 - g_2}{g_2 - g_1}, \\ \sigma'^{(2)}_{24} = \dfrac{a_0 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'^{(2)}_{40} = \dfrac{a_2 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'^{(2)}_{02} = \dfrac{a_4 - g_1}{g_1 - g_2}, \\ \sigma'^{(1)}_{35} = \dfrac{a_1 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'^{(1)}_{51} = \dfrac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'^{(1)}_{13} = \dfrac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1}, \\ \sigma'^{(2)}_{35} = \dfrac{a_1 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'^{(2)}_{51} = \dfrac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'^{(2)}_{13} = \dfrac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2}. \end{array} \right.$$

Führt man die Functionen $\sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ unter Berücksichtigung der Werthe (5) und (10) der $\Theta_{i\varkappa}$ und $\eta_{i\varkappa}$ in die Thetarelationen des § 7 ein, so nehmen dieselben nach entsprechender Reduction die folgende Gestalt an, wobei $\sigma_{i\varkappa}(u)$ für $\sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ steht:

---

*) Die Bezeichnung σ ist im Anschluss an Herrn Weierstrass gewählt (vgl. Schottky, a. a. O. S. 36 u. S. 153). Die hier eingeführten Sigmafunctionen unterscheiden sich von den bei Herrn Schottky benutzten wesentlich nur um einen Exponentialfactor von der Form $e^{A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2}$, der für alle 16 Functionen derselbe ist und dessen Hinzufügung für die Entwicklungen des Textes ohne Einfluss bleiben würde.

$$
(27)\left\{\begin{aligned}
&-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\sigma_{35}^2(u)\\
&=(a_2-a_4)(a_2-a_1)(a_4-a_1)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)(a_4-a_1)(a_0-a_1)\sigma_{40}^2(u)\\
&\qquad\qquad+(a_0-a_2)(a_0-a_1)(a_2-a_1)\sigma_{02}^2(u),\\
&-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\sigma_{51}^2(u)\\
&=(a_2-a_4)(a_2-a_3)(a_4-a_3)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)(a_4-a_3)(a_0-a_3)\sigma_{40}^2(u)\\
&\qquad\qquad+(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_2-a_3)\sigma_{02}^2(u),\\
&-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\sigma_{13}^2(u)\\
&=(a_2-a_4)(a_2-a_5)(a_4-a_5)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)(a_4-a_5)(a_0-a_5)\sigma_{40}^2(u)\\
&\qquad\qquad+(a_0-a_2)(a_0-a_5)(a_2-a_5)\sigma_{02}^2(u).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(28)\left\{\begin{aligned}
&(a_2-a_4)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{01}^2(u)\right\}\\
&=(a_0-a_1)\left\{(a_2-a_3)(a_2-a_5)\sigma_{02}^2(u)-(a_4-a_3)(a_4-a_5)\sigma_{40}^2(u)\right\},\\
&(a_2-a_4)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{03}^2(u)\right\}\\
&=(a_0-a_3)\left\{(a_2-a_5)(a_2-a_1)\sigma_{02}^2(u)-(a_4-a_5)(a_4-a_1)\sigma_{40}^2(u)\right\},\\
&(a_2-a_4)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{05}^2(u)\right\}\\
&=(a_0-a_5)\left\{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\sigma_{02}^2(u)-(a_4-a_1)(a_4-a_3)\sigma_{40}^2(u)\right\},\\
&(a_4-a_0)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{21}^2(u)\right\}\\
&=(a_2-a_1)\left\{(a_4-a_3)(a_4-a_5)\sigma_{24}^2(u)-(a_0-a_3)(a_0-a_5)\sigma_{02}^2(u)\right\},\\
&(a_4-a_0)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{23}^2(u)\right\}\\
&=(a_2-a_3)\left\{(a_4-a_5)(a_4-a_1)\sigma_{24}^2(u)-(a_0-a_5)(a_0-a_1)\sigma_{02}^2(u)\right\},\\
&(a_4-a_0)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{25}^2(u)\right\}\\
&=(a_2-a_5)\left\{(a_4-a_1)(a_4-a_3)\sigma_{24}^2(u)-(a_0-a_1)(a_0-a_3)\sigma_{02}^2(u)\right\},\\
&(a_0-a_2)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{41}^2(u)\right\}\\
&=(a_4-a_1)\left\{(a_0-a_3)(a_0-a_5)\sigma_{40}^2(u)-(a_2-a_3)(a_2-a_5)\sigma_{24}^2(u)\right\},\\
&(a_0-a_2)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{43}^2(u)\right\}\\
&=(a_4-a_3)\left\{(a_0-a_5)(a_0-a_1)\sigma_{40}^2(u)-(a_2-a_5)(a_2-a_1)\sigma_{24}^2(u)\right\},\\
&(a_0-a_2)\left\{\sigma^2(u)-\sigma_{45}^2(u)\right\}\\
&=(a_4-a_5)\left\{(a_0-a_1)(a_0-a_3)\sigma_{40}^2(u)-(a_2-a_1)(a_2-a_3)\sigma_{24}^2(u)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(29)\qquad\begin{aligned}
&(a_2-a_4)\,\sigma_{24}(u)\,\sigma_{01}(u)+(a_4-a_0)\,\sigma_{40}(u)\,\sigma_{21}(u)\\
&\qquad+(a_0-a_2)\,\sigma_{02}(u)\,\sigma_{41}(u)=0^{*}).
\end{aligned}
$$

*) Auch auf die Gestaltung der Vorzeichenverhältnisse dieser Formeln ist die in § 2 geschehene Bevorzugung der natürlichen Reihenfolge der Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5 von Einfluss geblieben.

Man erkennt, wie in diesen Formeln die Indices der Sigmafunctionen und der Parameter a_i sich in übersichtlichster Weise gruppiren. Warum überall die geraden Indices 0, 2, 4 unter sich und die ungeraden 1, 3, 5 unter sich, nicht aber die geraden und ungeraden wechselseitig, gleichberechtigt hervortreten, wird in § 10 seine volle Erklärung finden.

§ 9.

Algebraische Darstellung der Sigmaquotienten.

Indem man die 8 algebraischen Functionen zweier unabhängiger Veränderlicher z_1 und z_2:

$$(30)\quad \begin{cases} p_i = \sqrt{(a_i - z_1)(a_i - z_2)}\,^{*)}, \\ \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \\ s_\varkappa = \sqrt{(a_0 - z_\varkappa)(a_1 - z_\varkappa)(a_2 - z_\varkappa)(a_3 - z_\varkappa)(a_4 - z_\varkappa)(a_5 - z_\varkappa)}, \\ \qquad \varkappa = 1, 2, \end{cases}$$

einführt, findet man nach dem von Herrn Rosenhain**) und Krazer***) eingeschlagenen Verfahren, dass den 13 Relationen des § 8 genügt wird durch folgende Substitutionen, in welchen φ einen Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$(31)\quad \begin{cases} \sigma_{24}(u_1, u_2) = \varphi p_0, & \sigma_{40}(u_1, u_2) = \varphi p_2, & \sigma_{02}(u_1, u_2) = \varphi p_4, \\ \sigma_{35}(u_1, u_2) = \varphi p_1, & \sigma_{51}(u_1, u_2) = \varphi p_3, & \sigma_{13}(u_1, u_2) = \varphi p_5, \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} \sigma(u_1, u_2) = \varphi \dfrac{p_0 p_2 p_4}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)}\right) \\ \qquad = \varphi \dfrac{p_1 p_3 p_5}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_1 - z_1)(a_3 - z_1)(a_5 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)}\right), \\ \sigma_{01}(u_1, u_2) = \varphi \dfrac{p_1 p_2 p_4}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_1 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_1 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)}\right) \\ \qquad = \varphi \dfrac{p_0 p_3 p_5}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_3 - z_1)(a_5 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)}\right), \\ \sigma_{03}(u_1, u_2) = \varphi \dfrac{p_3 p_2 p_4}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_3 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_3 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)}\right) \\ \qquad = \varphi \dfrac{p_0 p_5 p_1}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_5 - z_1)(a_1 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_5 - z_2)(a_1 - z_2)}\right), \\ \sigma_{05}(u_1, u_2) = \varphi \dfrac{p_5 p_2 p_4}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_5 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_5 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)}\right) \\ \qquad = \varphi \dfrac{p_0 p_1 p_3}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_1 - z_1)(a_3 - z_1)} - \dfrac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)}\right), \end{cases}$$

---

*) Vgl. Schottky, a. a. O. S. 158.

**) A. a. O. S. 421 ff.

***) A. a. O. S. 46 ff.

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma_{21}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_1 p_4 p_0}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_1-z_1)(a_4-z_1)(a_0-z_1)} - \frac{s_2}{(a_1-z_2)(a_4-z_2)(a_0-z_2)}\right) \\
&= \varphi \frac{p_2 p_3 p_5}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_2-z_1)(a_3-z_1)(a_5-z_1)} - \frac{s_2}{(a_2-z_2)(a_3-z_2)(a_5-z_2)}\right), \\
\sigma_{23}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_3 p_4 p_0}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_3-z_1)(a_4-z_1)(a_0-z_1)} - \frac{s_2}{(a_3-z_2)(a_4-z_2)(a_0-z_2)}\right) \\
&= \varphi \frac{p_2 p_5 p_1}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_2-z_1)(a_5-z_1)(a_1-z_1)} - \frac{s_2}{(a_2-z_2)(a_5-z_2)(a_1-z_2)}\right), \\
\sigma_{25}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_5 p_4 p_0}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_5-z_1)(a_4-z_1)(a_0-z_1)} - \frac{s_2}{(a_5-z_2)(a_4-z_2)(a_0-z_2)}\right) \\
&= \varphi \frac{p_2 p_1 p_3}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_2-z_1)(a_1-z_1)(a_3-z_1)} - \frac{s_2}{(a_2-z_2)(a_1-z_2)(a_3-z_2)}\right), \\
\sigma_{41}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_1 p_0 p_2}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_1-z_1)(a_0-z_1)(a_2-z_1)} - \frac{s_2}{(a_1-z_2)(a_0-z_2)(a_2-z_2)}\right) \\
&= \varphi \frac{p_4 p_3 p_5}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_4-z_1)(a_3-z_1)(a_5-z_1)} - \frac{s_2}{(a_4-z_2)(a_3-z_2)(a_5-z_2)}\right), \\
\sigma_{43}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_3 p_0 p_2}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_3-z_1)(a_0-z_1)(a_2-z_1)} - \frac{s_2}{(a_3-z_2)(a_0-z_2)(a_2-z_2)}\right) \\
&= \varphi \frac{p_4 p_5 p_1}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_4-z_1)(a_5-z_1)(a_1-z_1)} - \frac{s_2}{(a_4-z_2)(a_5-z_2)(a_1-z_2)}\right), \\
\sigma_{45}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_5 p_0 p_2}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_5-z_1)(a_0-z_1)(a_2-z_1)} - \frac{s_2}{(a_5-z_2)(a_0-z_2)(a_2-z_2)}\right) \\
&= \varphi \frac{p_4 p_1 p_3}{z_1 - z_2}\left(\frac{s_1}{(a_4-z_1)(a_1-z_1)(a_3-z_1)} - \frac{s_2}{(a_4-z_2)(a_1-z_2)(a_3-z_2)}\right)^{*)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Was die Zweideutigkeit der Grössen p_i und $s_\varkappa$ angeht, so denke man sich die p_i und $s_\varkappa$ in Producte aufgelöst in der Weise:

$$p_i = \sqrt{a_i - z_1}\,\sqrt{a_i - z_2},$$

$$s_\varkappa = \varepsilon_\varkappa \sqrt{a_0 - z_\varkappa}\,\sqrt{a_1 - z_\varkappa}\,\sqrt{a_2 - z_\varkappa}\,\sqrt{a_3 - z_\varkappa}\,\sqrt{a_4 - z_\varkappa}\,\sqrt{a_5 - z_\varkappa}.$$

Dann werden alle zwischen den Sigmafunctionen bestehenden Relationen durch die Substitutionen (31), (32) erfüllt, wenn jede der Wurzeln $\sqrt{a_i - z_1}\,\sqrt{a_i - z_2}$ eine beliebige, aber in allen Formeln (31), (32) dieselbe Bedeutung hat, und überdies ε_1 und ε_2 je nach Belieben, aber je gleichmässig in *allen* Formeln (32), gleich $+1$ oder gleich -1 genommen werden.

§ 10.

Die algebraischen Charakteristiken der Sigmafunctionen.

Man erkennt beim Anblick der 16 Formeln (31), (32), sowie der Formeln (5), (14), (10) unmittelbar das einfache Gesetz, welches die

*) Vgl. über diese Form Weierstrass: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen", Crelle's Journal Bd. 47, S. 292, Formel (7), sowie Schottky, a. a. O. S. 158, Formel (37).

Vertheilung der 6 Parameter $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ auf die algebraischen Ausdrücke in den genannten Formeln befolgt. Indem man in diesem Gesetz eine wechselseitige Zuordnung der 16 Sigmafunctionen (Thetafunctionen) und der 6 Parameter a_i begründet sieht, kann man sich dahin ausdrücken:

Jede der 6 ungeraden Sigmafunctionen (Thetafunctionen) gehört zu einem der 6 Parameter, jede der 10 geraden Sigmafunctionen (Thetafunctionen) gehört zu je einer der 10 möglichen Gruppirungen der 6 Parameter in 2 Gruppen von je dreien.

So gehört beispielsweise $\sigma_{24}(u_1, u_2)$ zu a_0, $\sigma(u_1, u_2)$ zu der Gruppirung $(a_0 a_2 a_4)(a_1 a_3 a_5)$; allgemein ist die Zusammengehörigkeit aus folgendem Schema zu ersehen, wo $\sigma_{i\varkappa}$ für $\sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ und i für a_i steht:

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{lll} \sigma_{24}: 0, & \sigma_{40}: 2, & \sigma_{02}: 4, \\ \sigma_{35}: 1, & \sigma_{51}: 3, & \sigma_{13}: 5, \\ & \sigma: \begin{cases} 0\,2\,4 \\ 1\,3\,5 \end{cases}, & \\ \sigma_{01}: \begin{cases} 1\,2\,4 \\ 0\,3\,5 \end{cases}, & \sigma_{21}: \begin{cases} 1\,4\,0 \\ 2\,3\,5 \end{cases}, & \sigma_{41}: \begin{cases} 1\,0\,2 \\ 4\,3\,5 \end{cases}, \\ \sigma_{03}: \begin{cases} 3\,2\,4 \\ 0\,5\,1 \end{cases}, & \sigma_{23}: \begin{cases} 3\,4\,0 \\ 2\,5\,1 \end{cases}, & \sigma_{43}: \begin{cases} 3\,0\,2 \\ 4\,5\,1 \end{cases}, \\ \sigma_{05}: \begin{cases} 5\,2\,4 \\ 0\,1\,3 \end{cases}, & \sigma_{25}: \begin{cases} 5\,4\,0 \\ 2\,1\,3 \end{cases}, & \sigma_{45}: \begin{cases} 5\,0\,2 \\ 4\,1\,3 \end{cases}. \end{array}\right.$$

Der Reihenfolge der Indices innerhalb der einzelnen Tripel ist hierbei keine Bedeutung beizulegen.

Will man hiernach die algebraische Darstellung der Sigmaquotienten als Grundlage der Indicesbezeichnung der Sigmafunctionen wählen, so würde man jeder ungeraden Sigmafunction *einen* Index, jeder geraden aber *sechs* in 2 Gruppen zu dreien getheilte Indices beilegen. Es wäre also z. B. σ_{24} mit σ_0 und σ mit $\sigma_{\substack{024\\135}}$ zu bezeichnen. Diese Bezeichnung, sie mag die der *algebraischen Charakteristiken* heissen, ist bei der vorausgesetzten Grundlage diejenige, welche keinerlei Willkür in sich schliesst. Dagegen:

Die Zweiindicesbezeichnung, welche in der vorliegenden Arbeit gebraucht ist und den Vorzug der Einfachheit besitzt, ist nur eine von 10 gleichberechtigten Bezeichnungen.

Man erkennt nämlich aus dem Schema (33), dass bei ihr die Gruppirung 0 2 4 . 1 3 5 der 6 Indices ausgezeichnet ist, und erkennt ebenso leicht, wie der Uebergang von der Bezeichnung der algebraischen Charakteristiken zu der Zweiindicesbezeichnung stattfindet; die beiden

Indices der ungeraden Function $\sigma_{24}(u_1, u_2)$ beispielsweise sind die beiden Zahlen, welche mit dem einfachen Index von $\sigma_0(u_1, u_2)$ das eine der beiden Tripel 0 2 4, 1 3 5 bilden; die beiden Indices der geraden Function $\sigma_{01}(u_1, u_2)$ sind die beiden Zahlen, welche in der entsprechenden Gruppirung 124.035 (vgl. (33)) gegen die ausgezeichnete Gruppirung 024.135 verstellt sind.

Nach dieser Charakterisirung der Zweiindicesbezeichnung ergiebt es sich als nothwendige Folge, dass bei Anwendung dieser Bezeichnung überall die Unterscheidung der geraden und ungeraden der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 eine Rolle spielt. Dies findet sich bestätigt in den Formelsystemen: (4), (12), (13), (18), (§ 7), (27), (28), (29).

Die Zweiindicesbezeichnung geht unmittelbar in die von Herrn Weierstrass*) eingeführte Indicesbezeichnung über, wenn man die Zahl 5, wo sie unter den beiden Indices einer Function $\sigma_{i\varkappa}$ vorkommt, weglässt, dagegen statt σ (ohne Index) schreibt σ_5. Um diesen einfachen Uebergang von der Zweiindicesbezeichnung zu der Weierstrass'schen Bezeichnung zu ermöglichen, sind in der vorliegenden Arbeit die 6 Parameter a_i mit den Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, nicht mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 benannt, was übrigens vielleicht vorzuziehen wäre.

§ 11.

Algebraische Darstellung gewisser Combinationen der Sigmafunctionen.

Aus den Formeln des § 9 leitet sich ohne Mühe noch folgendes System von Formeln ab, welches für die weiteren Entwicklungen gebraucht wird; es bedeutet g eine beliebige Constante und ist $\sigma_{i\varkappa}(u)$ für $\sigma_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ geschrieben:

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{a_3-g}{a_3-a_5}\,\sigma_{13}(u)\,\sigma_{05}(u)+\frac{a_5-g}{a_5-a_3}\,\sigma_{51}(u)\,\sigma_{03}(u)\\
&=\frac{a_5-g}{a_5-a_1}\,\sigma_{35}(u)\,\sigma_{01}(u)+\frac{a_1-g}{a_1-a_5}\,\sigma_{13}(u)\,\sigma_{05}(u)\\
&=\frac{a_1-g}{a_1-a_3}\,\sigma_{51}(u)\,\sigma_{03}(u)+\frac{a_3-g}{a_3-a_1}\,\sigma_{35}(u)\,\sigma_{01}(u)\\
&=\varphi^2\,\frac{p_2p_4}{z_1-z_2}\left\{\frac{(g-z_2)\,s_1}{(a_2-z_1)(a_4-z_1)}-\frac{(g-z_1)\,s_2}{(a_2-z_2)(a_4-z_2)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

*) A. a. O. Crelle's Journal, Bd. 47, S. 291, Formel (2) und (7). Henoch, De Abelianarum functionum periodis, Berolini 1867, S. 14, wo die vollständigen Tabellen der Bezeichnung für die Thetafunctionen von 2 und 3 Variablen gegeben sind. Für 4 Variable findet man die entsprechende Tabelle bei Pringsheim, Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen 3. Ordnung ($\varrho = 4$), (Leipzig, 1877), S. 18. Vgl. auch die in der Einleitung oben erwähnte Notiz von Borchardt, Crelle's Journal Bd. 87, S. 169.

$$
(34)\left\{\begin{aligned}
&\frac{a_3-g}{a_3-a_5}\,\sigma_{13}(u)\,\sigma_{25}(u)+\frac{a_5-g}{a_5-a_3}\,\sigma_{51}(u)\,\sigma_{23}(u)\\
=&\frac{a_5-g}{a_5-a_1}\,\sigma_{35}(u)\,\sigma_{21}(u)+\frac{a_1-g}{a_1-a_5}\,\sigma_{13}(u)\,\sigma_{25}(u)\\
=&\frac{a_1-g}{a_1-a_3}\,\sigma_{51}(u)\,\sigma_{23}(u)+\frac{a_3-g}{a_3-a_1}\,\sigma_{35}(u)\,\sigma_{21}(u)\\
=&\varphi^2\,\frac{p_4p_0}{z_1-z_2}\left\{\frac{(g-z_2)\,s_1}{(a_4-z_1)\,(a_0-z_1)}-\frac{(g-z_1)\,s_2}{(a_4-z_2)\,(a_0-z_2)}\right\},\\
&\frac{a_3-g}{a_3-a_5}\,\sigma_{13}(u)\,\sigma_{45}(u)+\frac{a_5-g}{a_5-a_3}\,\sigma_{51}(u)\,\sigma_{43}(u)\\
=&\frac{a_5-g}{a_5-a_1}\,\sigma_{35}(u)\,\sigma_{41}(u)+\frac{a_1-g}{a_1-a_5}\,\sigma_{13}(u)\,\sigma_{45}(u)\\
=&\frac{a_1-g}{a_1-a_3}\,\sigma_{51}(u)\,\sigma_{43}(u)+\frac{a_3-g}{a_3-a_1}\,\sigma_{35}(u)\,\sigma_{41}(u)\\
=&\varphi^2\,\frac{p_0p_2}{z_1-z_2}\left\{\frac{(g-z_2)\,s_1}{(a_0-z_1)\,(a_2-z_1)}-\frac{(g-z_1)\,s_2}{(a_0-z_2)\,(a_2-z_2)}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

In der Gesammtheit dieser 9 Formeln treten an den Buchstaben σ, p, a die Indices 0, 2, 4 unter sich und die Indices 1, 3, 5 unter sich vollkommen gleichberechtigt auf. Es würde aber neben dieses System von 6 Formeln ein zweites zu stellen sein, in welchem im Vergleich zu jenem die Rolle der Indices 0, 2, 4 gegen die Rolle der Indices 1, 3, 5 vertauscht ist. Man hätte dann *ein System von* 18 *Formeln, in welchem, nachdem einmal die Gruppirung* 024 . 135 *ausgezeichnet ist, übrigens volle Gleichberechtigung der* 6 *Indices herrscht.*

Kapitel III.

Auflösung der Parameterdarstellung der Verhältnisse der Theta-(Sigma-)functionen.

§ 12.

Eine Gruppe von 18 Additionstheoremen für die Sigmafunctionen.

Für die Thetafunctionen $\Theta_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ gelten bekannte Additionstheoreme*), welche sich ebenso wie die Relationen des § 7 unmittelbar auf die Sigmafunctionen übertragen lassen. Durch solche Uebertragung erhält man die folgenden Additionsformeln, in welchen u_1, u_2 und u_1', u_2' zwei beliebige Variablenpaare sind und u; u'; $u \pm u'$ bezüglich zur Abkürzung für u_1, u_2; u_1', u_2'; $u_1 \pm u_1'$, $u_2 \pm u_2'$ geschrieben ist:

$$
(35)\left\{\begin{aligned}
&(a_3-a_5)\,\sigma_{40}(u+u')\,\sigma_{02}(u-u')\\
=&(a_3-a_5)\left\{\sigma_{21}(u')\sigma_{41}(u')\sigma_{40}(u)\sigma_{02}(u)-\sigma_{40}(u')\sigma_{02}(u')\sigma_{21}(u)\sigma_{41}(u)\right\}\\
&+(a_2-a_4)\left\{\sigma_{03}(u')\sigma_{51}(u')\sigma_{05}(u)\sigma_{13}(u)-\sigma_{05}(u')\sigma_{13}(u')\sigma_{03}(u)\sigma_{51}(u)\right\},
\end{aligned}\right.
$$

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 59.

$$
(35)\left\{\begin{aligned}
&\qquad (a_3-a_5)\,\sigma_{02}(u+u')\,\sigma_{24}(u-u')\\
&=(a_3-a_5)\left\{\sigma_{41}(u')\sigma_{01}(u')\sigma_{02}(u)\sigma_{24}(u)-\sigma_{02}(u')\sigma_{24}(u')\sigma_{41}(u)\sigma_{01}(u)\right\}\\
&+(a_4-a_0)\left\{\sigma_{23}(u')\sigma_{51}(u')\sigma_{25}(u)\sigma_{13}(u)-\sigma_{25}(u')\sigma_{13}(u')\sigma_{23}(u)\sigma_{51}(u)\right\},\\
&\qquad (a_3-a_5)\,\sigma_{24}(u+u')\,\sigma_{40}(u-u')\\
&=(a_3-a_5)\left\{\sigma_{01}(u')\sigma_{21}(u')\sigma_{24}(u)\sigma_{40}(u)-\sigma_{24}(u')\sigma_{40}(u')\sigma_{01}(u)\sigma_{21}(u)\right\}\\
&+(a_0-a_2)\left\{\sigma_{43}(u')\sigma_{51}(u')\sigma_{45}(u)\sigma_{13}(u)-\sigma_{45}(u')\sigma_{13}(u')\sigma_{43}(u)\sigma_{51}(u)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

In der Gesammtheit dieser 3 Additionstheoreme treten die geraden Indices 0, 2, 4 völlig gleichberechtigt hervor, von den ungeraden Indices 1, 3, 5 dagegen ist der Index 1 ausgezeichnet; in 2 weiteren Tripeln von Additionstheoremen würden bezüglich 3 und 5 unter den ungeraden Indices ausgezeichnet sein, die geraden aber dieselbe Rolle spielen, wie im 1. Tripel. In der Gesammtheit der 9 so erhaltenen Additionstheoreme sind dann die geraden Indices unter sich und die ungeraden unter sich gleichberechtigt vertreten. Um endlich auch die geraden und ungeraden Indices gegeneinander gleichmässig zu stellen, sind diesen 9 Additionstheoremen 9 weitere hinzuzufügen, bei welchen gegenüber den 9 ersteren die Rollen der geraden und ungeraden Indices vertauscht sind. *Man hat alsdann eine Gruppe von* 18 *Additionstheoremen, welche in demselben Sinne zu der durch die Zweiindicesbezeichnung bevorzugten Gruppirung* 024 . 135 *der* 6 *Indices gehört, wie die Gruppe der* 18 *in* § 11 *beschriebenen Formeln.* Mit der Gesammtheit dieser 18 Additionstheoreme soll weiterhin operirt werden, wenn auch die explicite Ausführung der Rechnung auf die 3 ersten Relationen beschränkt bleibt.

§ 13.

Uebergang auf die hyperelliptischen Differentialgleichungen.

Durch partielle Differentiation der 1. Gleichung (35) nach u_1' oder u_2' und nachherige Nullsetzung der Argumente u_1', u_2' ergiebt sich mit Rücksicht auf die Formeln (26):

$$(a_3-a_5)\left\{\sigma_{02}(u)\,\frac{\partial\sigma_{40}(u)}{\partial u_1}-\sigma_{40}(u)\,\frac{\partial\sigma_{02}(u)}{\partial u_1}\right\}$$

$$=\frac{a_2-a_4}{g_2-g_1}\left\{(a_3-g_2)\,\sigma_{13}(u)\sigma_{05}(u)-(a_5-g_2)\,\sigma_{51}(u)\sigma_{03}(u)\right\},$$

$$(a_3-a_5)\left\{\sigma_{02}(u)\,\frac{\partial\sigma_{40}(u)}{\partial u_2}-\sigma_{40}(u)\,\frac{\partial\sigma_{02}(u)}{\partial u_2}\right\}$$

$$=\frac{a_2-a_4}{g_1-g_2}\left\{(a_3-g_1)\,\sigma_{13}(u)\sigma_{05}(u)-(a_5-g_1)\,\sigma_{51}(u)\sigma_{03}(u)\right\}.$$

Hieraus folgt weiter:

(36)
$$\sigma_{02}(u)\,d\sigma_{40}(u)-\sigma_{40}(u)\,d\sigma_{02}(u)$$
$$=\frac{a_2-a_4}{g_2-g_1}\Big\{\Big(\frac{a_3-g_2}{a_3-a_5}\sigma_{13}(u)\,\sigma_{05}(u)+\frac{a_5-g_2}{a_5-a_3}\sigma_{51}(u)\,\sigma_{03}(u)\Big)du_1$$
$$-\Big(\frac{a_3-g_1}{a_3-a_5}\sigma_{13}(u)\,\sigma_{05}(u)+\frac{a_5-g_1}{a_5-a_3}\sigma_{51}(u)\,\sigma_{03}(u)\Big)du_2\Big\};$$

auf gleichem Wege ergiebt sich aus den beiden andern Formeln (35):

$$\sigma_{24}(u)\,d\sigma_{02}(u)-\sigma_{02}(u)\,d\sigma_{24}(u)$$
$$=\frac{a_4-a_0}{g_2-g_1}\Big\{\Big(\frac{a_3-g_2}{a_3-a_5}\sigma_{13}(u)\,\sigma_{25}(u)+\frac{a_5-g_2}{a_5-a_3}\sigma_{51}(u)\,\sigma_{23}(u)\Big)du_1$$
$$-\Big(\frac{a_3-g_1}{a_3-a_5}\sigma_{13}(u)\,\sigma_{25}(u)+\frac{a_5-g_1}{a_5-a_3}\sigma_{51}(u)\,\sigma_{23}(u)\Big)du_2\Big\},$$

(36)
$$\sigma_{40}(u)\,d\sigma_{24}(u)-\sigma_{24}(u)\,d\sigma_{40}(u)$$
$$=\frac{a_0-a_2}{g_2-g_1}\Big\{\Big(\frac{a_3-g_2}{a_3-a_5}\sigma_{13}(u)\,\sigma_{45}(u)+\frac{a_5-g_2}{a_5-a_3}\sigma_{51}(u)\,\sigma_{43}(u)\Big)du_1$$
$$-\Big(\frac{a_3-g_1}{a_3-a_5}\sigma_{13}(u)\,\sigma_{45}(u)+\frac{a_5-g_1}{a_5-a_3}\sigma_{51}(u)\,\sigma_{43}(u)\Big)du_2\Big\}.$$

Diese 3 Formeln, welche nur von den Verhältnissen der Sigmafunctionen abhängen, gehen mit Benutzung der Formeln (31) und (34) über in:

$$p_4\,dp_2-p_2\,dp_4$$
$$=\frac{(a_2-a_4)\,p_2p_4}{(g_2-g_1)\,(z_1-z_2)}\Big\{\Big(\frac{(g_2-z_2)\,s_1}{(a_2-z_1)\,(a_4-z_1)}-\frac{(g_2-z_1)\,s_2}{(a_2-z_2)\,(a_4-z_2)}\Big)du_1$$
$$-\Big(\frac{(g_1-z_2)\,s_1}{(a_2-z_1)\,(a_4-z_1)}-\frac{(g_1-z_1)\,s_2}{(a_2-z_2)\,(a_4-z_2)}\Big)du_2\Big\},$$

$$p_0\,dp_4-p_4\,dp_0$$
$$=\frac{(a_4-a_0)\,p_4p_0}{(g_2-g_1)\,(z_1-z_2)}\Big\{\Big(\frac{(g_2-z_2)\,s_1}{(a_4-z_1)\,(a_0-z_1)}-\frac{(g_2-z_1)\,s_2}{(a_4-z_2)\,(a_0-z_2)}\Big)du_1$$
$$-\Big(\frac{(g_1-z_2)\,s_1}{(a_4-z_1)\,(a_0-z_1)}-\frac{(g_1-z_1)\,s_2}{(a_4-z_2)\,(a_0-z_2)}\Big)du_2\Big\},$$

$$p_2\,dp_0-p_0\,dp_2$$
$$=\frac{(a_0-a_2)\,p_0p_2}{(g_2-g_1)\,(z_1-z_2)}\Big\{\Big(\frac{(g_2-z_2)\,s_1}{(a_0-z_1)\,(a_2-z_1)}-\frac{(g_2-z_1)\,s_2}{(a_0-z_2)\,(a_2-z_2)}\Big)du_1$$
$$-\Big(\frac{(g_1-z_2)\,s_1}{(a_0-z_1)\,(a_2-z_1)}-\frac{(g_1-z_1)\,s_2}{(a_0-z_2)\,(a_2-z_2)}\Big)du_2\Big\}.$$

Führt man hier endlich für p_0, p_2, p_4 die Ausdrücke (30) ein, so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{dz_1}{(a_2-z_1)(a_4-z_1)}+\frac{dz_2}{(a_2-z_2)(a_4-z_2)}\right)\\
&=\frac{(g_2-z_2)du_1-(g_1-z_2)du_2}{(g_2-g_1)(z_1-z_2)(a_2-z_1)(a_4-z_1)}s_1-\frac{(g_2-z_1)du_1-(g_1-z_1)du_2}{(g_2-g_1)(z_1-z_2)(a_2-z_2)(a_4-z_2)}s_2,\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{dz_1}{(a_4-z_1)(a_0-z_1)}+\frac{dz_2}{(a_4-z_2)(a_0-z_2)}\right)\\
&=\frac{(g_2-z_2)du_1-(g_1-z_2)du_2}{(g_2-g_1)(z_1-z_2)(a_4-z_1)(a_0-z_1)}s_1-\frac{(g_2-z_1)du_1-(g_1-z_1)du_2}{(g_2-g_1)(z_1-z_2)(a_4-z_2)(a_0-z_2)}s_2,\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{dz_1}{(a_0-z_1)(a_2-z_1)}+\frac{dz_2}{(a_0-z_2)(a_2-z_2)}\right)\\
&=\frac{(g_2-z_2)du_1-(g_1-z_2)du_2}{(g_2-g_1)(z_1-z_2)(a_0-z_1)(a_2-z_1)}s_1-\frac{(g_2-z_1)du_1-(g_1-z_1)du_2}{(g_2-g_1)(z_1-z_2)(a_0-z_2)(a_2-z_2)}s_2.
\end{aligned}\right.$$

Auf diese 3 Differentialgleichungen führen nicht nur die 3 ersten, sondern auch die 6 übrigen der 9 in § 12 zuerst erwähnten Additionstheoreme; die 9 weiter erwähnten Additionstheoreme führen auf 3 weitere Differentialgleichungen von der Form (37), in welchen nur die a_0, a_2, a_4 durch die a_1, a_3, a_5 bezüglich ersetzt sind. Die erhaltenen 6 Differentialgleichungen entsprechen wiederum der Gruppirung $(a_0 a_2 a_4)$ $(a_1 a_3 a_5)$ der 6 Parameter a_i. Zu jeder der 10 andern Gruppirungen würden 6 entsprechende Differentialgleichungen gehören. Von den 60 so erhaltenen sind aber je 4 identisch und *bleiben daher nur* 15 *Differentialgleichungen von der Form* (37), *welche den* 15 *Combinationen der* 6 *Parameter a_i zu zweien entsprechen.*

Diese 15 Differentialgleichungen liefern als gemeinsame Auflösungen nach dz_1 und dz_2:

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}(g_2-g_1)(z_1-z_2)\frac{dz_1}{s_1}&=\quad(g_2-z_2)du_1-(g_1-z_2)du_2,\\
\frac{1}{2}(g_2-g_1)(z_1-z_2)\frac{dz_2}{s_2}&=-(g_2-z_1)du_1+(g_1-z_1)du_2
\end{aligned}\right.$$

und als gemeinsame Auflösungen nach du_1 und du_2:

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}
du_1&=\frac{1}{2}(z_1-g_1)\frac{dz_1}{s_1}+\frac{1}{2}(z_2-g_1)\frac{dz_2}{s_2},\\
du_2&=\frac{1}{2}(z_1-g_2)\frac{dz_1}{s_1}+\frac{1}{2}(z_2-g_2)\frac{dz_2}{s_2}.
\end{aligned}\right.$$

Die Differentialgleichungen (39) geben mit Ausführung der Integration:

$$(40)\quad u_1 = \int_{z_1, -s_1}^{z_1, s_1} \frac{1}{2}(z - g_1)\frac{dz}{s} + c_1, \quad u_2 = \int_{z_2, -s_2}^{z_1, s_1} \frac{1}{2}(z - g_2)\frac{dz}{s} + c_2,$$

wo c_1, c_2 2 Integrationsconstanten sind.*) Hiermit sind die zwischen den Variablenpaaren u_1, u_2 und z_1, z_2 angesetzten Gleichungen (31), (32) nach u_1, u_2 aufgelöst.

Die Variablen u_1, u_2 ergeben sich als überall endliche Integrale, welche zu der durch die algebraische Gleichung:

$$(41)\quad s^2 = (a_0 - z)(a_1 - z)(a_2 - z)(a_3 - z)(a_4 - z)(a_5 - z)$$

definirten Riemann'schen Fläche gehören.

Das durch die Gleichungen (31), (32) definirte Functionsverhältniss ist also derartig vorzustellen, dass die Variablen u_1, u_2 nicht schlechthin von z_1, z_2, sondern von 2 Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 der Riemann'schen Fläche (41), und zwar symmetrisch, abhängig gemacht sind.

Es bleibt nun die umgekehrte Aufgabe zu lösen übrig, die beiden Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 der Riemann'schen Fläche in ihrer Abhängigkeit von u_1, u_2 darzustellen, *womit zugleich das Umkehrproblem der Integrale* (40) *gelöst wird.*

§ 14.

Aufstellung der quadratischen Gleichungen für z_1 und z_2.

Aus der Theorie der Partialbruchzerlegung ist bekannt, dass man eine in z quadratische Gleichung, welche die Wurzeln $z = z_1$ und $z = z_2$ besitzt, in der Form darstellen kann:

$$\frac{(a_0 - z_1)(a_0 - z_2)}{(a_0 - a_2)(a_0 - a_4)(a_0 - z)} + \frac{(a_2 - z_1)(a_2 - z_2)}{(a_2 - a_4)(a_2 - a_0)(a_2 - z)} + \frac{(a_4 - z_1)(a_4 - z_2)}{(a_4 - a_0)(a_4 - a_2)(a_4 - z)} = 0.$$

Dieser Gleichung kann unter Einführung der in (30) definirten Abkürzungen p_i die Form gegeben werden:

$$\frac{(a_2 - a_4)p_0^2}{a_0 - z} + \frac{(a_4 - a_0)p_2^2}{a_2 - z} + \frac{(a_0 - a_2)p_4^2}{a_4 - z} = 0.$$

Man hat so eine quadratische Gleichung, deren Coefficienten als symmetrische Functionen ihrer beiden Wurzeln z_1, z_2 dargestellt sind. Diese symmetrischen Functionen sind aber durch die Formeln (31) in

---

*) Dieselben sind durch den Ansatz (31), (32) vollkommen bestimmt und *haben beide den Werth* 0, sofern man nur die Integrale u_1, u_2 selbst in der ihnen zukommenden Vieldeutigkeit auffasst. Denn aus jenem Ansatz ergiebt sich, dass für $z_2 = z_1$, $-s_2 = s_1$ die ungeraden σ-Functionen alle 6 gleichzeitig verschwinden müssen; dies ist aber nur möglich, wenn mit Bezug auf die Periodenpaare, welche die σ-Functionen nach den Argumenten u_1, u_2 haben, die Congruenzen $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$ bestehen. Auf diesen bereits dem 2. Theile der vorliegenden Theorie angehörigen Punkt, denke ich anderwärts näher einzugehen.

ihrer Abhängigkeit von u_1, u_2 gegeben. Es sind daher z_1, z_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(42)\quad \frac{(a_2-a_4)\,\sigma_{24}^2(u_1,u_2)}{a_0-z}+\frac{(a_4-a_0)\,\sigma_{40}^2(u_1,u_2)}{a_2-z}+\frac{(a_0-a_2)\,\sigma_{02}^2(u_1,u_2)}{a_4-z}=0\,.$$

Ebenso würde man z_1, z_2 definiren können durch die Gleichung:

$$(42)\quad \frac{(a_3-a_5)\,\sigma_{35}^2(u_1,u_2)}{a_1-z}+\frac{(a_5-a_1)\,\sigma_{51}^2(u_1,u_2)}{a_3-z}+\frac{(a_1-a_3)\,\sigma_{13}^2(u_1,u_2)}{a_5-z}=0.$$

Beide Gleichungen zeichnen die Gruppirung der 6 Parameter a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 in die beiden Gruppen a_0, a_2, a_4 und a_1, a_3, a_5 aus; sie gehören in diesem Sinne zu der geraden Sigmafunction $\sigma(u_1, u_2)$. Zu jeder andern geraden Sigmafunction gehören aber ebenfalls 2 entsprechende Gleichungen.

Man erhält so 10 *Paare quadratischer Gleichungen für* z_1, z_2 *von der Form* (42), *welche den* 10 *geraden Sigmafunctionen bezüglich zugeordnet sind.*

Jede einzelne derselben kann zur Bestimmung von z_1, z_2 dienen.

§ 15.

Darstellung des Factors φ in (31), (32) durch Sigmafunctionen.

Jede der 20 quadratischen Gleichungen kann zur Bestimmung des in den Formeln (31), (32) auftretenden Factors φ verwerthet werden. Da nämlich, um an die 1. Gleichung (42) anzuknüpfen, z_1, z_2 die Wurzeln derselben sind, so gilt identisch in Bezug auf z:

$$(43)\quad (a_2-a_4)(a_2-z)(a_4-z)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)(a_4-z)(a_0-z)\sigma_{40}^2(u)$$
$$+(a_0-a_2)(a_0-z)(a_2-z)\sigma_{02}^2(u)$$
$$=\left\{(a_2-a_4)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)\sigma_{40}^2(u)+(a_0-a_2)\sigma_{02}^2(u)\right\}(z_1-z)(z_2-z).$$

Setzt man daher z gleich einer beliebigen Constanten g, so erhält man:

$$(44)\quad (g-z_1)(g-z_2)=\frac{\Phi(g)}{(a_2-a_4)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)\sigma_{40}^2(u)+(a_0-a_2)\sigma_{02}^2(u)},$$

wo

$$\Phi(g)=(a_2-a_4)(a_2-g)(a_4-g)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)(a_4-g)(a_0-g)\sigma_{40}^2(u)$$
$$+(a_0-a_2)(a_0-g)(a_2-g)\sigma_{02}^2(u),$$

eine Formel, welche die 3 ersten Formeln (31) als specielle Fälle umfasst. Mit der besonderen Annahme $g=a_0$ wird beispielsweise:

$$(a_0-z_1)(a_0-z_2)=\frac{-(a_2-a_4)(a_4-a_0)(a_0-a_2)\sigma_{24}^2(u)}{(a_2-a_4)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)\sigma_{40}^2(u)+(a_0-a_2)\sigma_{02}^2(u)}.$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von φ^2 durch Vergleich mit der 1. Formel (31). Zu einem analogen Resultat würde jede andere der 20 quadratischen Gleichungen, als die gerade benutzte, führen und man gelangt zusammenfassend zu dem Ergebniss:

Der Factor φ kann auf 10 mal 2 äquivalente Weisen dargestellt werden; je 2 Darstellungen gehören zu einer der 10 geraden Sigmafunctionen; die beiden zu $\sigma(u_1, u_2)$ gehörenden Darstellungen sind:

$$(45)\qquad \varphi^2=\frac{\sigma_{24}^2(u)}{(a_2-a_0)(a_4-a_0)}+\frac{\sigma_{40}^2(u)}{(a_4-a_2)(a_0-a_2)}+\frac{\sigma_{02}^2(u)}{(a_0-a_4)(a_2-a_4)}$$

$$=\frac{\sigma_{35}^2(u)}{(a_3-a_1)(a_5-a_1)}+\frac{\sigma_{51}^2(u)}{(a_5-a_3)(a_1-a_3)}+\frac{\sigma_{13}^2(u)}{(a_1-a_5)(a_3-a_5)}.$$

Die Gleichheit beider Ausdrücke geht unmittelbar aus den Formeln (27) hervor.

§ 16.

Bildung der Function zur Bestimmung von s_1 und s_2.

Um die Abhängigkeit der beiden Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 von u_1, u_2 anzugeben, bedarf es ausser der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln z_1 und z_2 sind, noch der eindeutigen Bestimmung der beiden Grössen s_1 und s_2, deren jede durch z_1 und z_2 erst zweideutig bestimmt ist.

Man differentiire zu dem Ende die Identität (43), indem man z_1 und z_2 als Functionen von u_1, u_2 betrachtet, partiell nach u_1; mit der Abkürzung:

$$S=(a_2-a_4)\sigma_{24}^2(u)+(a_4-a_0)\sigma_{40}^2(u)+(a_0-a_2)\sigma_{02}^2(u)$$

ergiebt sich:

$$(a_2-a_4)(a_2-z)(a_4-z)\frac{\partial\sigma_{24}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$+(a_4-a_0)(a_4-z)(a_0-z)\frac{\partial\sigma_{40}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$+(a_0-a_2)(a_0-z)(a_2-z)\frac{\partial\sigma_{02}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$=(z_1-z)(z_2-z)\frac{\partial S}{\partial u_1}+S\left\{(z_1-z)\frac{\partial z_2}{\partial u_1}+(z_2-z)\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\right\}.$$

Setzt man in dieser in Bezug auf z identischen Gleichung $z=z_1$ ode $z=z_2$, so folgt:

$$(a_2-a_4)(a_2-z_1)(a_4-z_1)\frac{\partial\sigma_{24}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$+(a_4-a_0)(a_4-z_1)(a_0-z_1)\frac{\partial\sigma_{40}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$+(a_0-a_2)(a_0-z_1)(a_2-z_1)\frac{\partial\sigma_{02}^2(u)}{\partial u_1}=S(z_2-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial u_1},$$

$$(a_2-a_4)(a_2-z_2)(a_4-z_2)\frac{\partial\sigma_{24}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$+(a_4-a_0)(a_4-z_2)(a_0-z_2)\frac{\partial\sigma_{40}^2(u)}{\partial u_1}$$

$$+(a_0-a_2)(a_0-z_2)(a_2-z_2)\frac{\partial\sigma_{02}^2(u)}{\partial u_1}=S(z_1-z_2)\frac{\partial z_2}{\partial u_1}.$$

Substituirt man hier die aus (38) folgenden Werthe der partiellen Differentialquotienten von z_1, z_2 nach u_1:

$$(z_2-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial u_1}=2\,\frac{g_2-z_2}{g_1-g_2}\,s_1,\qquad (z_1-z_2)\frac{\partial z_2}{\partial u_1}=2\,\frac{g_2-z_1}{g_1-g_2}\,s_2$$

und löst noch s_1 und s_2 auf, so erhält man unter gleichzeitiger Benutzung der Formel (44):

$$s_1=\frac{1}{2}(g_2-g_1)(z_1-g_2)\cdot\frac{\Psi(z_1)}{\Phi(g_2)},$$

$$s_2=\frac{1}{2}(g_2-g_1)(z_2-g_2)\cdot\frac{\Psi(z_2)}{\Phi(g_2)}$$

wo Φ die in § 15 eingeführte Function ist und $\Psi(z)$ folgenden Ausdruck bedeutet:

$$\Psi(z)=(a_2-a_4)(a_2-z)(a_4-z)\frac{\partial\sigma_{24}^2(u_1,u_2)}{\partial u_1}$$

$$+(a_4-a_0)(a_4-z)(a_0-z)\frac{\partial\sigma_{40}^2(u_1,u_2)}{\partial v}$$

$$+(a_0-a_2)(a_0-z)(a_2-z)\frac{\partial\sigma_{02}^2(u_1,u_2)}{\partial u_1}.$$

Die rechten Seiten der beiden Gleichungen für s_1 und s_2 gehen durch Vertauschung von z_1 und z_2 ineinander über.

Man kann daher das Resultat in Verbindung mit dem des § 14 so aussprechen:

Um die beiden Stellen z_1, s_1 und z_2, s_2 des algebraischen Gebildes (41) als Functionen von u_1, u_2 darzustellen, dient die in z quadratische Gleichung:

$$(42) \quad \frac{(a_2-a_4)\,\sigma_{24}^2(u_1,u_2)}{a_0-z}+\frac{(a_4-a_0)\,\sigma_{40}^2(u_1,u_2)}{a_2-z}+\frac{(a_0-a_2)\,\sigma_{02}^2(u_1,u_2)}{a_4-z}=0,$$

welche z_1 *und* z_2 *als Wurzeln hat, und die Function von* z:

$$(46) \qquad s=\frac{1}{2}(g_1-g_2)(g_2-z)\cdot\frac{\Psi(z)}{\Phi(g_2)},^{*)}$$

mit:

$$\Psi(z)=(a_2-a_4)(a_2-z)(a_4-z)\frac{\partial\sigma_{24}^2(u_1,u_2)}{\partial u_1}$$
$$+(a_4-a_0)(a_4-z)(a_0-z)\frac{\partial\sigma_{40}^2(u_1,u_2)}{\partial u_1}$$
$$+(a_0-a_2)(a_0-z)(a_2-z)\frac{\partial\sigma_{02}^2(u_1,u_2)}{\partial u_1}$$

und:

$$\Phi(g)=(a_2-a_4)(a_2-g)(a_4-g)\,\sigma_{24}^2(u_1,u_2)$$
$$+(a_4-a_0)(a_4-g)(a_0-g)\,\sigma_{40}^2(u_1,u_2)$$
$$+(a_0-a_2)(a_0-g)(a_2-g)\,\sigma_{02}^2(u_1,u_2),$$

welche mit $z=z_1$ *den Werth* s_1 *und mit* $z=z_2$ *den Werth* s_2 *bestimmt.*

Die Function s könnte man auch ersetzen durch diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung der Differentiation nach u_1 mit der nach u_2 und gleichzeitige Vertauschung von g_1 und g_2 hervorgeht. Man erhält so zu jeder der 20 quadratischen Gleichungen des § 14 je 2 Functionen von der Form (46).

Die Function s, gebildet für $z=z_1$ und $z=z_2$, hängt ebenso wie die quadratische Gleichung (42) nur von den Verhältnissen der Functionen $\sigma_{i\varkappa}^2(u_1\,u_2)$ ab, da der Ausdruck:

$$(a_2-a_4)(a_2-z)(a_4-z)\,\sigma_{24}^2(u_1,u_2)$$
$$+(a_4-a_0)(a_4-z)(a_0-z)\,\sigma_{40}^2(u_1,u_2)$$
$$+(a_0-a_2)(a_0-z)(a_2-z)\,\sigma_{02}^2(u_1,u_2)$$

mit $z=z_1$ oder $z=z_2$ identisch verschwindet.

---

*) Die Formel entspricht der von Herrn Weierstrass (Crelle's Journal, Bd. 47, S. 292) gegebenen Formel (6); letztere erscheint deshalb in etwas verkürzter Form, weil in ihr für die im vorliegenden Text beliebig gelassenen Constanten g_1, g_2 zwei von den 6 Parametern a_i gewählt sind, wodurch zwei von den 3 Gliedern im Nenner der Function s in Wegfall gebracht werden können.

§ 17.

Uebersicht über die Entwicklung der §§ 7—16.

Die Betrachtungen des II. und III. Kapitels, welche wie die des I. von der Definition der Thetafunction ausgehen, waren ursprünglich von folgenden Gesichtspunkten geleitet.

Die 15 Quotienten aus den 16 Thetafunctionen $\vartheta_{i\varkappa}(v_1, v_2)$ kann man sich als 15 Variable denken, zwischen denen 13 von einander unabhängige Relationen bestehen. Aus der Natur der letzteren erwuchs die Aufgabe, jene 15 Variablen sämmtlich als algebraische Functionen zweier unabhängiger Veränderlicher z_1 und z_2 darzustellen.

Als weitere Aufgabe schloss sich die Auflösung der gefundenen algebraischen Parameterdarstellung einerseits nach v_1, v_2, andererseits nach z_1, z_2 an.

Diese ursprünglichen Fragestellungen haben aber im Laufe der Betrachtung eine *doppelte Modification* erfahren, indem *die Argumente v_1, v_2 durch die Argumente u_1, u_2 und die Thetafunctionen durch die Sigmafunctionen* ersetzt worden sind.

Das letztere ist geschehen, um in die Parameterdarstellung (31), (32) keine andern Irrationalitäten explicite einzuführen als die Quadratwurzeln p_i und $s_\varkappa$ und in den Formeln (42), (46) *jede Irrationalität zu vermeiden.* Unter Beibehaltung der Thetafunctionen würden die algebraischen Ausdrücke in (31), (32) mit gewissen vierten Wurzeln und die Gleichungen (42), (46) mit gewissen Quadratwurzeln aus Differenzenproducten der a_i behaftet sein. Diese Irrationalitäten sind in die Thetafunction aufgenommen worden, welche dadurch in die Sigmafunction überging. Zugleich werden durch die Einführung der Sigmafunctionen in die Thetarelationen, diese besonders in Ansehung der Vorzeichen, welche die einzelnen Glieder verbinden, wesentlich übersichtlicher, wie ein Vergleich der Formeln des § 7 mit denen des § 8 erkennen lässt.

Was die Ersetzung der Argumente v_1, v_2 durch die Argumente u_1, u_2 betrifft, so wird dieselbe weniger für die algebraische Parameterdarstellung der Thetaquotienten als vielmehr für den Uebergang von den Thetafunctionen auf die hyperelliptischen Differentialgleichungen von Bedeutung. Würde man die Argumente v_1, v_2 beibehalten haben, so würden die Coefficienten von dz_1 und dz_2 in den Differentialgleichungen (39) nicht algebraisch von den Constanten a_i abhängig geworden sein. Die *rein algebraische* Form der Coefficienten ist erreicht durch eine geeignete Bestimmung der Coefficienten der Substitution (6), ähnlich wie früher (vgl. § 6) durch denselben Schritt erreicht wurde, dass die Verhältnisse der $\Theta'^{(1)}_{i\varkappa}, \Theta'^{(2)}_{i\varkappa}$ rein algebraisch von den a_i abhängig wurden. —

Was von der am Schluss der Einleitung erwähnten und in 2 Theile gespalteten Aufgabe nach den vorstehenden Entwicklungen noch als 2. Theil zu lösen übrig bleibt, lässt sich kurz dahin aussprechen: *Es sind die 4 Constanten* $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ *der Substitution* (6) *und die 3 Constanten* a_{11}, a_{12}, a_{22} *der Thetafunction durch die 6 Verzweigungspunkte* a_i *der Riemann'schen Fläche auszudrücken;* woran sich beiläufig die Bestimmung der Constanten c_1, c_2 in (40) anschliesst. Die Erledigung dieser weiteren Fragestellung bildet ebenso wie die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen ein für sich abgerundetes Ganze: die Entwicklungen der vorstehenden Paragraphen sind mehr algebraischer Natur; die Darstellung der fraglichen Elemente durch die a_i, welche ich einer andern Gelegenheit aufspare, stützt sich wesentlich auf die Theorie der transcendenten Moduln der hyperelliptischen Functionen. Diese Theorie führt gleichzeitig auf eine äusserst einfache Beziehung der Zweiindicesbezeichnung der Thetafunctionen zu der Charakteristikenbezeichnung, womit sich der bisher entwickelten *algebraischen* Bedeutung eine *transcendente* Bedeutung der Indicespaare der Thetafunctionen zur Seite stellt.

Breslau, im April 1884.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

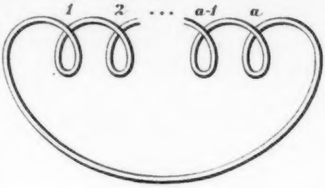


Fig. 4.

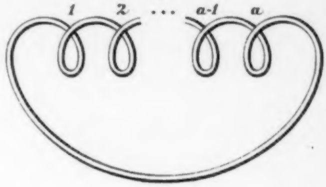


Fig. 5.

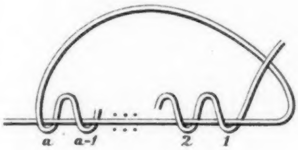


Fig. 6.

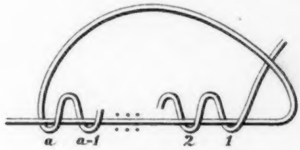


Fig. 7.

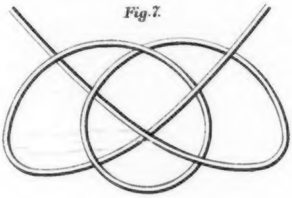


Fig. 8.

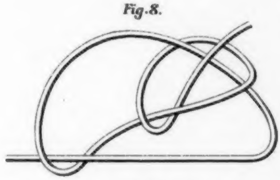


Fig. 9.

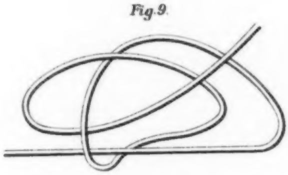


Fig. 10.

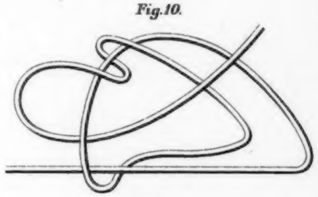


Fig. 11.

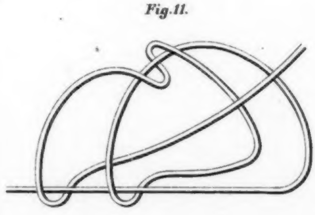


Fig. 12.

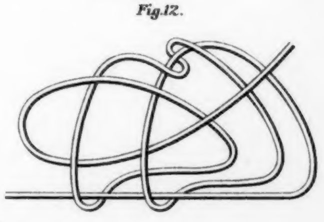


Fig. 13.

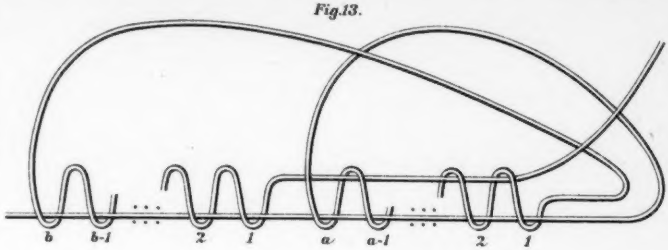


Fig. 14.

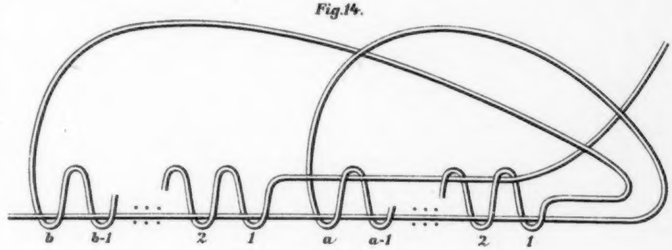


Fig. 15.

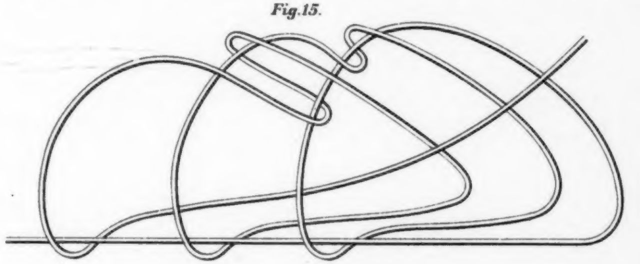
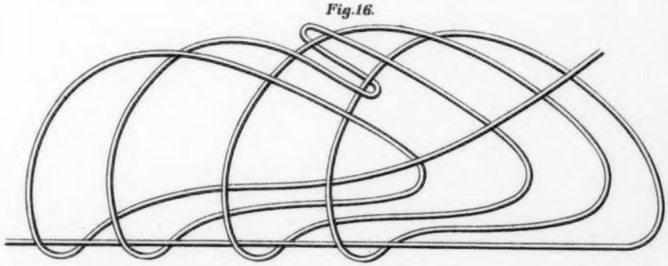


Fig. 16.



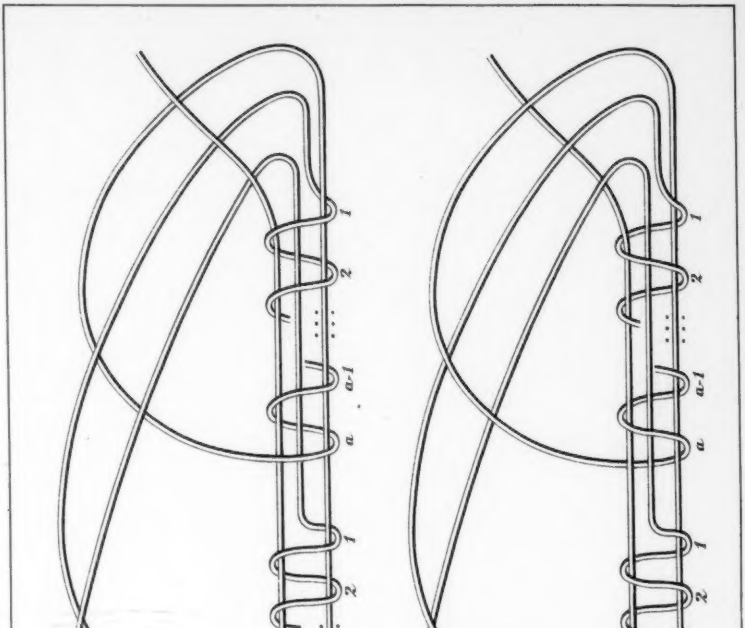


Fig. 17.
Fig. 18.

Autor del.

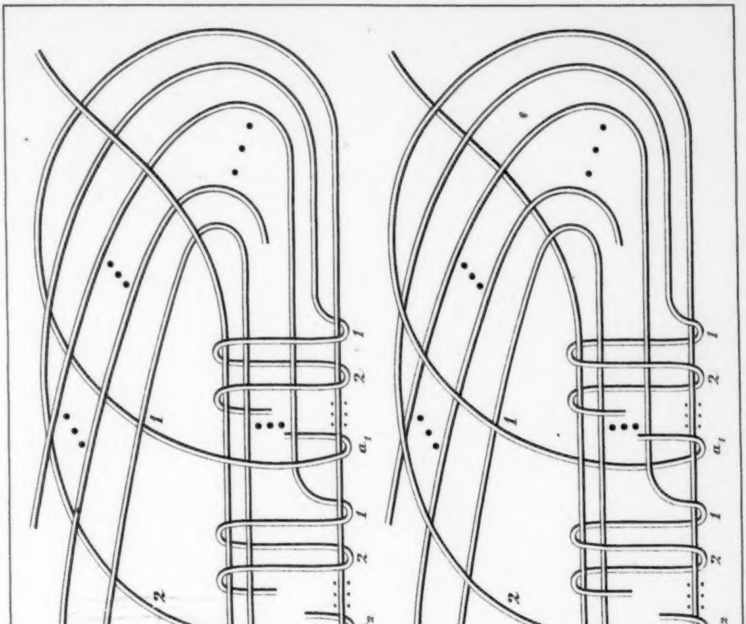


Fig. 19.

Fig. 20.

Autor del.

Fig. 21.

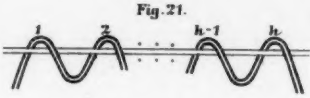


Fig. 22.

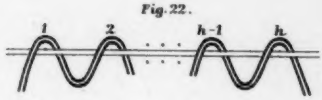


Fig. 23.

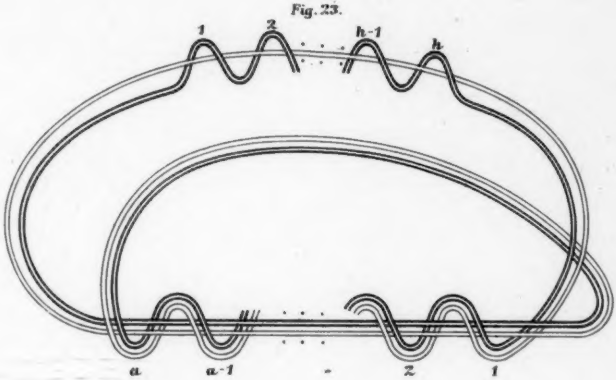


Fig. 24.

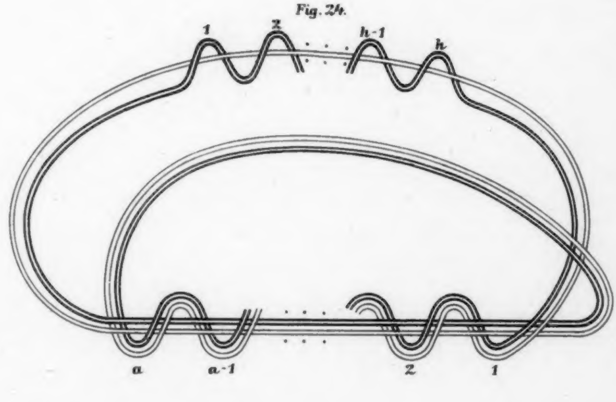


Fig. 25.

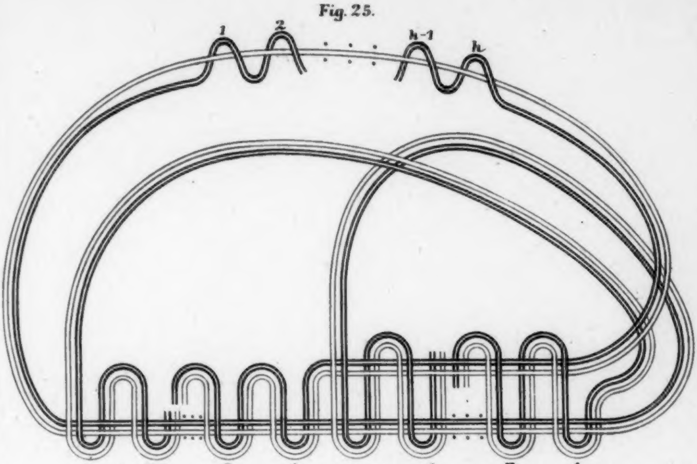
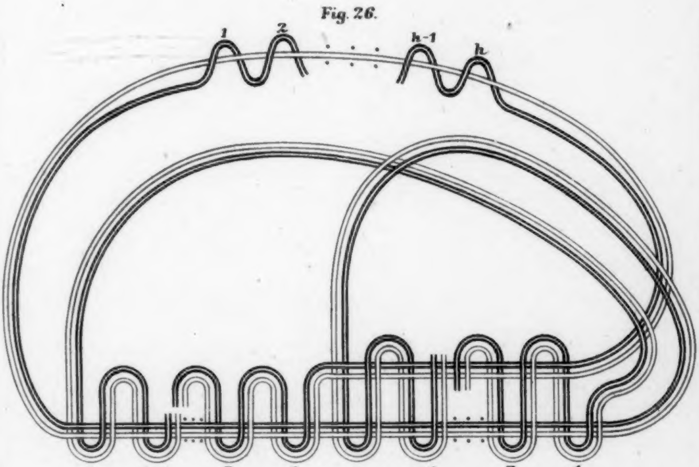


Fig. 26.



Autor del.

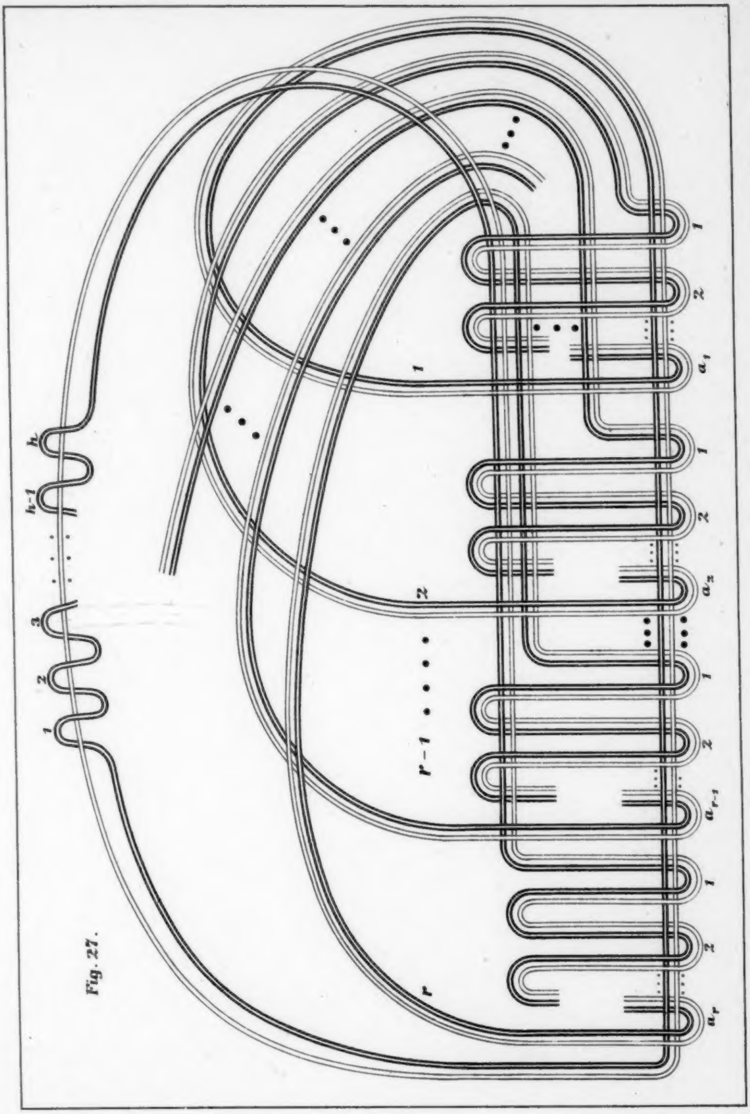


Fig. 27.

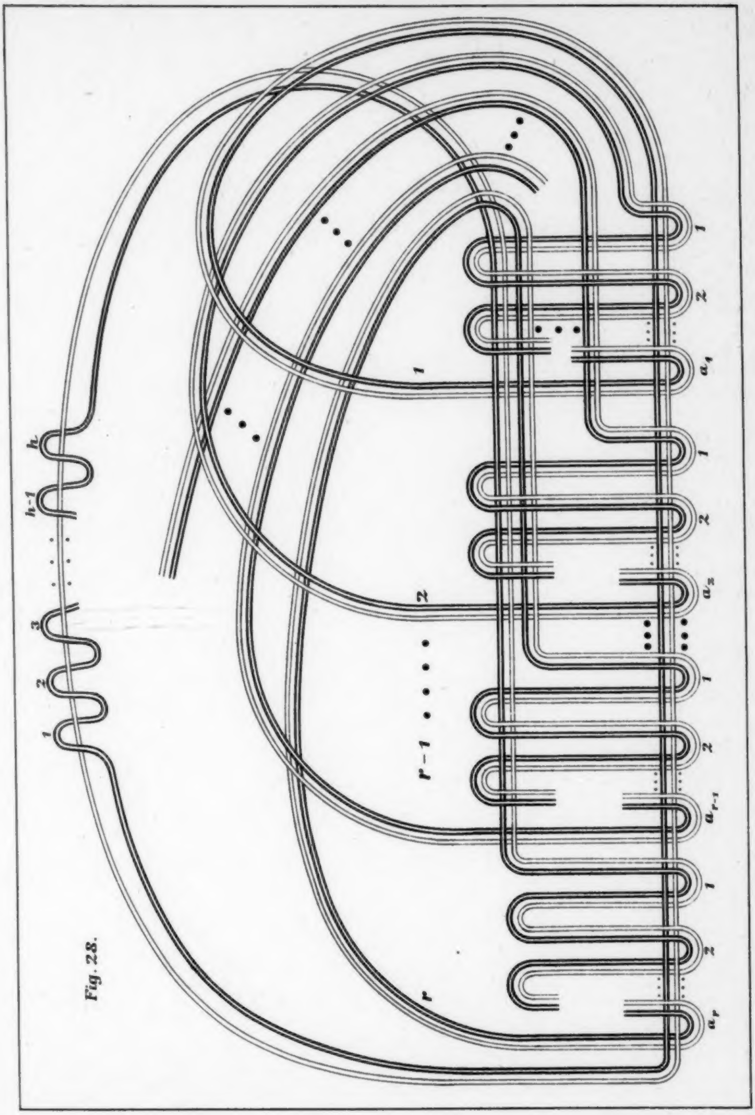


Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

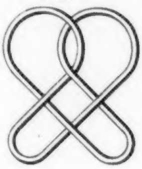


Fig. 34.

Fig. 35.

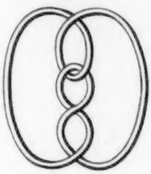


Fig. 36.

Fig. 37.

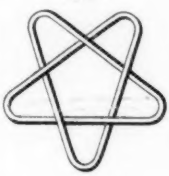


Fig. 38.

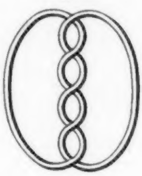


Fig. 39.

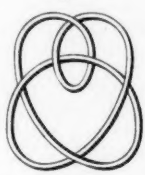


Fig. 40.

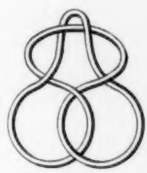


Fig. 41.

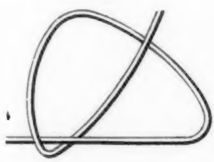


Fig. 42.

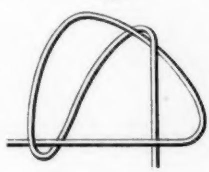


Fig. 43.

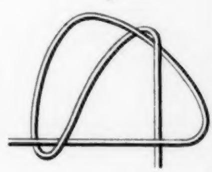


Fig. 44.

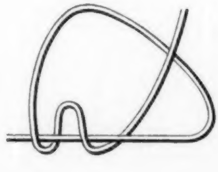


Fig. 45.

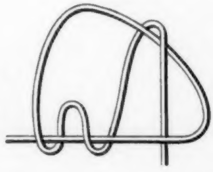


Fig. 46.

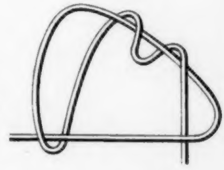


Fig. 47.

Fig. 48.

Fig. 49.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

Fig. 53.

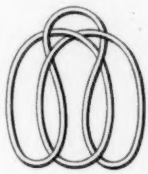


Fig. 54.

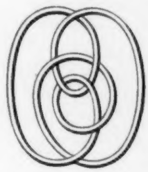


Fig. 55.

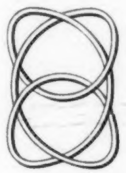


Fig. 56.

Fig. 57.

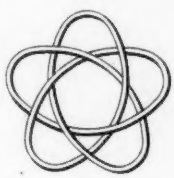


Fig. 58.

Fig. 59.

Fig. 60.

Fig. 61.

Fig. 62.

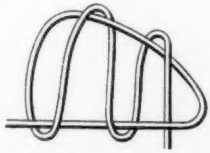


Fig. 63.

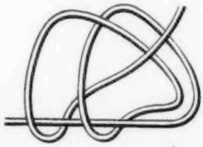


Fig. 64.

Etude des différentes surfaces du 4^e^ ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions.

Par

Corrado Segre à Turin.

On peut dire que les recherches sur les surfaces du 4^e^ ordre à conique double ont commencé avec le mémoire de M. Kummer de 1863 sur les surfaces du 4^e^ ordre contenant des séries de coniques*), bien qu'on en eût déjà étudié depuis longtemps quelques cas particuliers, comme le tore, la cyclide de Dupin, etc. M. Kummer établissait dans un paragraphe de ce mémoire le fait qu'une surface générale du 4^e^ ordre à conique double est coupée par les plans tangents de 5 cônes quadriques suivant des couples de coniques: ces plans étant les plans bitangents de la surface. Il remarquait aussi que lorsque la surface acquiert un point double (outre ceux de la conique double), celui-ci est le sommet d'un cône quadrique tangent ailleurs à la surface (et non plus bitangent) dont les plans tangents coupent encore celle-ci en des couples de coniques; et que, lorsque la surface a deux points doubles joints par une droite qui n'appartient pas à la surface, les plans qui passent par cette droite coupent la surface en des couples de coniques. L'année suivante 1864 M. Moutard**) se proposant l'étude des surfaces du 3^e^ et du 4^e^ ordre *anallagmatiques*, c'est-à-dire ne changeant pas par une inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques), était porté à remarquer que les anallagmatiques du 4^e^ ordre sont les surfaces de cet ordre ayant le cercle imaginaire à l'infini pour ligne double et qu'une telle surface est anallagmatique par rapport à 5 inversions différentes: il trouva en outre que les centres de ces inversions sont les sommets des cônes de Kummer, que la surface est l'enveloppe des ∞^2 sphères orthogonales à l'une des 5 sphères d'inversion et ayant leurs centres sur une quadrique, que les 5 quadriques

*) *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.* (Monatsberichte der königl. Akademie d. W. zu Berlin, 1863, pag. 324—336; ou bien Crelle's Journal, Bd. 64).

**) *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques*, et *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^e^ série, tome 3, 1864, pag. 306—9 et pag. 536—9).

que l'on obtient ainsi sont homofocales et coupent respectivement ces 5 sphères suivant les 5 quartiques focales qu'a une telle surface du 4^e ordre; enfin il s'occupa du système de ∞^1 anallagmatiques du 4^e ordre *homofocales*, et il trouva que ces surfaces forment un système triple orthogonal. Peu de jours avant qu'il fît cette dernière découverte, M. Darboux la faisait de son côté*) et dès lors ces espèces de surfaces (auxquelles il étendit le nom de *cyclides*) occupèrent avec fruit ce savant dans une suite de travaux**) dont il réunit les principaux résultats dans son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques****). En Angleterre M. Casey s'occupant aussi plus tard de ces espèces de surfaces publiait en 1871 le long mémoire *On Cyclides and Sphero-Quartics*†), qui en contenait aussi presque toutes les propriétés connues et quelques autres.

En 1868 Clebsch, qui, comme l'on sait, occupait alors son grand talent dans les recherches sur la représentation des surfaces sur un plan, continuait l'étude, que M. Kummer avait commencée, des surfaces du 4^e ordre à conique double générales en partant de la représentation plane d'une telle surface, et il établissait ainsi toute la géométrie des courbes tracées sur cette surface††). Il retrouvait les 16 droites de la surface (qui avaient déjà été trouvées quatre années auparavant par M. Darboux), et en étudiait la disposition, il découvrait les deux séries de coniques dans lesquelles se décompose chacun des systèmes qui correspondent aux 5 cônes de Kummer, les cubiques et les quartiques gauches de la surface, etc., et les relations qui lient toutes

*) Dans la séance du 1er Août 1864 M. Serret et M. Bonnet communiquaient l'un après l'autre à l'Académie des sciences ces découvertes de M. Darboux et de M. Moutard (Voir le tome 59 des Comptes-rendus, pages 240—2 et 243—4). Il est vrai que les surfaces considérées par M. Darboux ont trois plans de symétrie, mais on en obtiendrait les anallagmatiques plus générales de M. Moutard par une inversion. (On remarque aussi dans la note de M. Darboux quelques inexactitudes sur le nombre des droites et sur les focales de ses surfaces, mais on ne les trouve plus dans les travaux postérieurs de ce savant).

**) Voir surtout les *Recherches sur les surfaces orthogonales* dans les Annales de l'Ecole Normale supérieure de 1865 (et années suivantes) et le *Mémoire sur les surfaces cyclides* dans le tome de 1872 de ces mêmes Annales.

***) Paris, Gauthier-Villars, 1873. Le contenu du texte de cet ouvrage formait un mémoire présenté en 1869 à l'Académie des sciences. — Nous pourrions encore citer d'autres travaux sur les cyclides, par exemple ceux de M. Laguerre (dans les Nouvelles Annales et le Bulletin de la Société philomatique de Paris): mais nous devons nous borner à parler des recherches qui ont le plus d'importance pour la théorie de ces surfaces et surtout pour le but de notre travail. On trouvera d'ailleurs une liste assez complète de ces travaux dans l'ouvrage cité de M. Darboux.

†) Philosophical Transactions, 1871 (vol. 161, pag. 585—721).

††) *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen.* Crelle 69, p. 142—184.

ces courbes entre elles et avec la conique double. Et l'année suivante M. Jordan ayant remarqué*) le lien qu'il y a entre le groupe des droites de cette surface et celui de la surface cubique générale, M. Geiser montrait**) la raison de ce lien soit en comparant les représentations planes des deux surfaces, soit en montrant comment on peut toujours obtenir l'une de ces surfaces de l'autre par une *inversion****), résultat auquel était arrivé en même temps M. Darboux à propos des cyclides du 4e et du 3e ordre.

Les mêmes raisonnements et les mêmes calculs que Clebsch avait faits pour la surface générale du 4e ordre à conique double étaient pas-à-pas appliqués en 1868 et années suivantes par M. Korndörfer à la représentation plane de quelques cas particuliers de cette surface, soit lorsque la conique double est générale, soit lorsqu'elle se décompose en deux droites distinctes ou coincidentes†). Les propriétés de quelques-unes de ces espèces particulières de surfaces avaient déjà été trouvées auparavant, comme nous l'avons dit au commencement, par Kummer, et d'autres espèces particulières étaient rencontrées en même temps par MM. Darboux et Casey. Après ces travaux nous ne trouvons plus de vraiment importants que ceux plus récents de M. Zeuthen sur les propriétés et sur la forme de la surface générale du 4e ordre à conique double, et de MM. Crone et Tötössy sur celle à conique cuspidale††) (surface qui avait déjà été étudiée par M. Cremona†††)); et nous arrivons ainsi à la dissertation

*) *Sur les équations de la géométrie.* Comptes-rendus, Mars 1869, tome 68, pag. 656—9 (voir à la pag. 659).

**) *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben.* Crelle 70, pag. 249—257.

***) C'est-à-dire une correspondance entre deux points de l'espace qui soient alignés avec un point fixe (*centre* de l'inversion) et conjugués par rapport à une quadrique fixe (quadrique *directrice*). C'est dans ce sens général (introduit, comme l'on sait, dans la science par des travaux de Bellavitis, Hirst, Geiser) que nous userons dorénavant le mot *inversion*.

†) Voir: *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten*, Math. Ann. Bd. I pag. 592—626, et II pag. 41—64. — *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden*, Bd. III pag. 496—522. — *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht*, Bd. IV pag. 117—134.

††) Zeuthen: *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit* (Kopenhagen 1879). — Crone: *Om Fladerne af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnit og deres Konturer, med saerligt Hensyn til Realitetsegenskaberne* (Kopenhagen 1881). — Tötössy: *Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt* (Math. Ann. XIX pag. 291—322). — La difficulté de la langue dans laquelle ils sont écrits nous a empêché de prendre connaissance directe des travaux de MM. Zeuthen et Crone.

†††) *Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali* (Memorie Acc. Bologna, 1872, serie 3a, tomo II, pag. 117—27).

pour le doctorat de notre ami le Dr. Gino Loria, écrite l'année passée*).

Dans ses travaux sur les cyclides M. Darboux avait introduit une conception très-importante: la considération des points de l'espace comme déterminés par 5 coordonnées homogènes (*pentasphériques*) liées par une relation quadratique. Une cyclide était alors déterminée par une nouvelle équation quadratique ajoutée à celle-ci et M. Darboux appliquait très-heureusement cette représentation des cyclides à l'étude de leurs propriétés**). Peu de temps après MM. Lie***) et Klein†) généralisaient cette conception et y ajoutaient de nouveaux résultats. Enfin il y a quelques années M. Reye††) avait étudié les complexes quadratiques de sphères et ensuite les cyclides comme intersections de tels complexes avec le complexe quadratique des points-sphères, et avait déduit de cette manière de voir (qui, comme nous l'avons dit, se trouvait déjà dans les recherches citées) plusieurs des propriétés connues de la cyclide générale. Or M. Loria reprit dans sa dissertation ces idées mais en les développant plus complètement et les adressant à un but nouveau. En effet après avoir exposé plusieurs recherches intéressantes sur la géométrie des sphères et de leurs com-

*) *Ricerche sulla Geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di 4⁰ ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all' infinito.* — Cette dissertation va paraître dans les Mémoires de l'Académie de Turin de la présente année.

**) Voir, par exemple, les notes X et suivantes de l'ouvrage cité *Sur une classe remarquable* etc. — Qu'il nous soit permis d'ajouter que nous avons fait récemment une nouvelle application de la determination d'un point par 5 coordonnées satisfaisant à une relation quadratique à trouver des liens très-remarquables, et qui n'avaient pas encore été aperçus, entre les géométries métriques (euclidiennes) des complexes linéaires et des sphères: la géométrie métrique des sphères n'est à ce point de vue qu'un cas particulier de la géométrie métrique des complexes linéaires (Voir notre note *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie* dans les Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XIX).

***) V. *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe*, etc., Math. Ann. V pag. 145—256. On trouve, par exemple, dans ce travail, qui est certainement le premier dans lequel la sphère soit considérée comme l'élément d'un espace, la proposition importante (pag. 248) que les points-sphères d'un système homofocal de complexes quadratiques de sphères forment un système homofocal de cyclides.

†) V. *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann. V pag. 257—277; et aussi le mémoire *Ueber einen liniengeometrischen Satz*, Göttinger Nachrichten, 20 März 1872 (réimprimé dans le tome XXII des Math. Ann., pag. 234—41).

††) Voir le dernier paragraphe de l'ouvrage *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme* (Leipzig, Teubner, 1879), et le mémoire qui en est la suite *Ueber quadratische Kugelcomplexe und confocale Cycliden* (Collectanea Mathematica in mem. Chelini, pag. 241—257).

plexes et congruences linéaires et quadratiques, il passe à l'étude de la cyclide considérée comme la congruence commune à un faisceau de complexes quadratiques de sphères, parmi lesquels il y a le complexe des points-sphères; et non seulement il établit par cette méthode une théorie de la cyclide générale, mais cette méthode même lui donne une classification complète (dans la géométrie des rayons réciproques) des cyclides au moyen des diviseurs élémentaires et en appliquant dans chacun des cas que ceux-ci peuvent présenter le couple d'équations canoniques données par M. Weierstrass. Il trouve par là 18 espèces différentes de cyclides, parmi lesquelles il y a toutes les espèces connues jusqu'à-présent et plusieurs espèces nouvelles: M. Loria donne pour toutes le nombre et l'espèce des points singuliers, le nombre et la disposition des droites, les cônes de Kummer, les sphères directrices, les courbes focales et les foyers, etc.

Mais dans son travail notre ami n'a appliqué sa méthode qu'aux cyclides, ou, si l'on veut, aux surfaces du 4e ordre à conique double non décomposée et il a laissé de côté celles à conique cuspidale et celles dont la conique double ou cuspidale se décompose. Et peut-être sa méthode ne serait pas applicable, selon nous, à ces dernières espèces de surfaces, car elle repose surtout sur la géométrie des sphères, sur les relations entre des sphères orthogonales dont une ou plusieurs se réduisent à des points, etc., de sorte qu'il faudrait voir comment ces relations se modifient lorsqu'aux sphères on substitue des quadriques coupant un plan suivant deux droites fixes ou des cônes quadriques se touchant le long d'une génératrice fixe, et nous ne sommes pas sûrs que ces relations ainsi modifiées lui donneraient encore les propriétés des différentes espèces de surfaces. En outre il nous semble qu'il n'y ait pas dans ce travail toute l'unité de méthode désirable, de sorte que certaines questions, comme celles sur les droites et sur les points singuliers des différentes surfaces, sont traitées d'une manière qui a peu de relations avec la pure géométrie des sphères. Remarquons enfin que la voie suivie par M. Loria s'applique surtout à l'étude de celles parmi les propriétés des cyclides, qui ne changent pas par une transformation par rayons réciproques, et qu'ainsi il a dû exclure de sa considération les particularités de la conique double.

Nous nous sommes proposé dans le mémoire qui suit de faire une étude suffisamment complète des propriétés de toutes les espèces de surfaces que nous avons nommées par l'application d'une seule méthode très-féconde, qui sert à résoudre avec la plus grande facilité *toutes* les questions que l'on peut se poser sur ces surfaces.

Cette méthode consiste dans la considération des surfaces du 4e ordre à conique double ou cuspidale, générale ou décomposée, comme des projections centrales sur l'espace ordinaire de l'intersection de deux variétés quadratiques à 3 dimensions de l'espace linéaire à 4

dimensions. L'idée d'obtenir la géométrie de l'espace ordinaire comme une projection (stéréographique) d'une variété quadratique à 3 dimensions est due à M. Darboux, qui cependant ne put l'exposer dans ses travaux, car alors on ne parlait presque pas encore de géométrie projective des espaces à plusieurs dimensions*). M. Klein étudia aussi et avec plus de détails cet argument dans son mémoire de 1871 déjà cité *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie;* et l'année suivante dans la note aussi citée *Ueber einen liniengeometrischen Satz* il démontrait un théorème dont on peut tirer comme cas particulier la proposition suivante: *chaque surface du* 4^e *ordre à conique double* (*ou cuspidale*) *générale ou décomposée en deux droites peut être considérée comme une projection centrale de l'intersection de deux variétés quadratiques à* 3 *dimensions de l'espace à* 4 *dimensions.* Cette proposition nous assurait que par notre méthode nous aurions pu obtenir *toutes* les espèces de surfaces du 4^e ordre que nous avions en vue, sans aucune exception; de sorte qu'il suffisait d'étudier les propriétés de l'intersection $F_2^{2.2}$ de deux variétés quadratiques de l'espace à 4 dimensions dans les différents cas qu'elle peut présenter et ensuite en déduire les propriétés de sa projection suivant les différentes positions qu'on peut donner au centre de projection.

De cette manière on trouve toutes les propriétés connues et d'autres inconnues jusqu'à-présent de celles parmi nos surfaces que l'on connaissait déjà et de celles qui sont nouvelles, avec la plus grande simplicité, sans aucun calcul, sans aucun artifice: et cette méthode nous donne même, pour ainsi dire, la raison intime de plusieurs propriétés que l'on avait déjà trouvées, mais non pas complètement expliquées**).

---

*) Voir, par exemple, l'ouvrage cité, pag. 164, où il dit: „Comme on n'a pas d'espace à quatre dimensions, les méthodes de projection ne s'étendent pas à la géométrie de l'espace." Maintenant nous faisons usage de l'espace à quatre dimensions sans nous préoccuper de la question de son existence, que nous regardons comme une question tout-à-fait sécondaire, et personne ne pense qu'on vienne ainsi à perdre de la rigueur.

**) Nous devons aussi rappeler ici comme contenant des applications très-importantes de la méthode de la projection dans les espaces à plusieurs dimensions (et même le premier dans lequel cette méthode soit développée avec soin et reçoive une large et féconde preuve de sa grande importance) le travail connu de M. Veronese: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (Math. Ann. XIX, pag. 161—234). — Nous nous permettrons encore de citer une autre application que nous avons fait de cette méthode dans une note *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XIX): cette application consiste dans la demonstration du fait que les représentations planes données par Clebsch (Math. Ann. V, pag. 1—26) des surfaces réglées rationales et la classification qu'il en a déduite de ces surfaces s'obtiennent immédiatement par des projections. — De même nous verrons que

Nous allons citer quelques exemples. M. Korndörfer dans ses travaux après avoir étudié 5 espèces de surfaces à conique double générale passe à 6 espèces de surfaces à conique double décomposée en deux droites distinctes et, en refaisant pour chacune tous les calculs, il obtient pour ces dernières espèces des résultats que le lecteur peut remarquer correspondre parfaitement à ceux obtenus pour les 5 premières espèces et à ceux de Clebsch pour la surface générale: quelle est la raison de cela? C'est que celles-ci et celles-là ne sont que les projections des 6 mêmes espèces de $F_2^{2.2}$ faites par des centres de projection différents. De même les 3 espèces de surfaces à deux droites doubles coincidentes étudiées par M. Korndörfer sont des projections de 3 de ces mêmes $F_2^{2.2}$ et de là les analogies qu'elles présentent avec des espèces de surfaces précédemment étudiées. De la même manière on voit le lien étroit qu'il y a entre les surfaces à une droite double et une droite cuspidale, à conique cuspidale, et à deux droites cuspidales, et respectivement les surfaces 2e, 3e et 4e de celles à conique double générale (ou bien 3e, 4e et 5e de celles à deux droites doubles) des mémoires de M. Korndörfer. — Dans le mémoire de Clebsch on voit que la conique double de la surface générale semble fonctionner comme appartenant au système de quartiques gauches de 1e espèce de la surface: son image dans la représentation plane de la surface est une cubique appartenant au système des cubiques images de ce système de quartiques, etc.; quelle est la raison intime de cela? C'est que cette conique est justement la projection d'une quartique gauche de l'espace à 4 dimensions. — Enfin, pour donner encore un exemple, en étudiant les deux séries de coniques de la surface à conique double qui correspondent à un même cône de Kummer on trouve qu'il passe entre elles des relations ayant une étroite analogie avec les relations qui lient les deux séries de génératrices d'une quadrique*): la raison de ce fait sera aussi parfaitement expliquée dans la suite.

Dans ce travail nous nous sommes donc proposé, comme nous l'avons déjà dit, d'obtenir par la méthode de la projection une théorie suffisamment complète de toutes les espèces de surfaces nommées. Nous retrouverons ainsi par notre méthode (qu'on pourrait appeler synthétique en ce sens, qu'elle ne fait pas usage d'équations) toutes les propriétés les plus importantes que l'on connaissait déjà sur ces surfaces en rattachant les résultats projectifs des travaux allemands à

---

la représentation plane des surfaces du 4e ordre à conique double étudiée par Clebsch (et en conséquence celle des surfaces du 3e ordre) n'est qu'une projection d'une surface de l'espace à 4 dimensions faite par une droite sur un plan.

*) M. Laguerre est la premier qui ait remarqué cette analogie (sans en donner l'explication) dans sa note *Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques* (Bulletin de la Société Philomatique, tome V, mars 1868, pag. 48—52).

ceux métriques sur la cyclide des géomètres français et anglais et de notre ami Loria*); nous trouverons d'autres propriétés qui sont nouvelles et nous ajouterons aux espèces déjà connues de ces surfaces un nombre à-peu-près égal de surfaces nouvelles, de façon que notre classification embrassera plus de 70 espèces de surfaces. Ainsi outre les 18 espèces de surfaces à conique double générale nous trouverons parmi nos surfaces toutes les cinq espèces différentes de surfaces du 4^e^ ordre et de la 3^e^ classe; nous verrons plusieurs espèces de surfaces à conique cuspidale (dont on peut dire qu'on n'a étudié jusqu'à-présent que la plus générale), lesquelles ne sont que des cas particuliers de surfaces à conique double douée de deux points de contact de deux nappes; nous verrons aussi une série nombreuse de surfaces à deux droites doubles non considérées par M. Korndörfer, par exemple toutes celles qui ont dans le point de rencontre des deux droites doubles un point triple et dont il semble qu'on ne connaisse qu'un seul cas particulier: la surface de Steiner. Ni les surfaces à une droite double et une droite cuspidale, ni celles à deux droites cuspidales ne semblent non plus avoir occupé jusqu'à-présent les géomètres et elles se présenteront naturellement dans notre recherche. Pour chacune de ces différentes espèces de surfaces nous verrons le nombre et la disposition des droites, les séries de coniques, etc., et nous montrerons comment on en obtient la représentation plane de l'ordre moindre. Nous indiquerons pour chaque espèce combien il y a d'inversions qui transforment la surface en elle-même (inversions *fondamentales*). Comme on connait aujourd'hui (même pour la théorie des fonctions) l'importance des transformations qui changent en soi-même un être quelconque (géométrique ou analytique) on ne trouvera pas que nous nous sommes trop étendus en donnant ces inversions pour chacune des différentes espèces de surfaces: d'ailleurs lorsque la surface a parmi les transformations qui la changent en elle-même des homologies, comme il arrive pour les surfaces à conique cuspidale, nous trouverons (toujours par notre méthode) ces homologies parmi les inversions fondamentales. Nous étudiérons aussi avec quelques soins les différentes espèces de points singuliers qui se présentent dans nos surfaces, car notre méthode, nous donnant les sections planes de celles-ci comme projections de quartiques gauches de 1^e^ espèce, nous montre immédiatement quelle singularité présente en un point singulier de la surface une section plane quelconque passant par ce point. De cette manière nous pourrons obtenir directement toutes les propriétés connues (voir, par exemple, le travail de M. Zeuthen que nous citerons

*) Les détails historiques dans lesquels nous sommes entrés dans cette introduction nous permettront de ne pas nous arrêter à indiquer toujours pour chacune de ces propriétés à qui elle est due ou bien si elle est nouvelle.

bientôt) des points-pinces de la conique double, des points-clos de la conique (ou d'une droite) cuspidale, d'un point de contact de deux nappes, etc.

Quant aux cyclides nous donnerons pour les différentes espèces les quartiques focales et les foyers par l'application d'un théorème très-général relatif à un espace à un nombre quelconque de dimensions*), et de là on aura les particularités que présentent les quadriques (ou les coniques) déférentes par rapport aux sphères directrices correspondantes (ou aux cercles directeurs correspondants), et en conséquence le moyen de construire chaque espèce de cyclides comme l'enveloppe de ∞^2 ou de ∞^1 sphères. Notre méthode nous indiquera aussi immédiatement pour chaque espèce de cyclide, et en général pour chaque espèce de surface (même à conique double ou cuspidale décomposée), par quelle espèce de quadriques on peut l'obtenir avec une inversion (lorsqu'une telle transformation est possible, comme il arrive dans la plupart des cas; et pour toutes les cyclides, celle générale exceptée), ce qui a déjà été fait pour quelques espèces de cyclides par MM. Casey et Darboux, et qui a pour but de donner une méthode élémentaire (l'inversion) pour déduire les propriétés des différentes espèces de nos surfaces de celles des quadriques.

Après avoir étudié des propriétés communes à toutes nos surfaces nous passerons à leur classification (dont on peut voir un tableau à la fin du travail) et à leurs propriétés particulières; mais dans le dernier paragraphe nous reviendrons à la théorie générale et nous trouverons une propriété, qui nous semble très-remarquable, sur une *polarité* par rapport aux cyclides, propriété qui donne en même temps tous les invariants absolus de chaque espèce de cyclides dans la géométrie des inversions. Nous finirons en montrant (sans entrer dans beaucoup de détails sur les questions de réalité, qui nous auraient porté trop loin) comment parmi les 18 espèces de cyclides il y en a seulement 10 qui sont réelles, et la demonstration la plus simple que l'on puisse donner de cette proposition consiste dans l'application d'un théorème analytique important dû à M. Klein.

---

*) Ce théorème, que l'on trouvera au n° 160 de notre mémoire *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Memorie della R. Accad. di Torino, serie 2, tomo 36), a déjà été appliqué par nous dans ce mémoire à montrer comment la classification des complexes quadratiques puisse se déduire de celle des congruences quadratiques, ou vice-versa. — Quant aux quartiques focales et aux foyers M. Loria les a déjà trouvés dans son travail pour toutes les cyclides, mais comme la plupart de ses résultats là-dessus ne sont qu'énoncés, et comme d'ailleurs ce n'était pas seulement des découvertes nouvelles que nous nous proposions d'exposer, mais aussi une méthode nouvelle pour étudier nos surfaces, nous avons cru qu'il était bien de revenir dans notre travail sur cette question.

La surface quartique à conique double générale ou décomposée en deux droites. Points-pinces de cette conique.

1. Dans un espace linéaire à 4 dimensions R_4 deux variétés quadratiques*), c'est-à-dire deux F_3^2, se coupent en une surface du 4e ordre $F_2^{2\cdot 2}$ par laquelle passe un faisceau de ces variétés. Une telle surface quartique Γ jouit de propriétés très-simples analogues à celles des courbes quartiques de 1e espèce: nous en énoncerons ici quelques-unes dont la demonstration est des plus faciles.**)

Parmi les variétés quadratiques qui passent par Γ il y a dans le cas le plus général 5 *cônes de* 1e *espèce*, ou variétés composées de ∞^2 droites passant par un point (*sommet*) et que l'on peut obtenir en projetant par ce point des quadriques générales de R_3. Mais il peut arriver que quelques-uns de ces cônes coincident, et aussi qu'il y ait dans le faisceau un ou deux *cônes de* 2e *espèce*, variétés composées de ∞^1 plans passant par une droite (*arête*) et que l'on obtient en projetant par cette droite des coniques de R_4; ou enfin que toutes les variétés du faisceau soient des cônes. Nous examinerons séparément plus tard tous ces cas.

Un point quelconque de R_4 a pour espaces polaires relativement au faisceau de F_3^2 les espaces d'un faisceau, dont le soutien est un plan, qu'on peut appeler le *plan polaire* du point par rapport à Γ. Par ce point passe en général une seule variété du faisceau et l'espace qui lui est tangent en ce point est celui qui le joint à son plan polaire. Si le point appartient à Γ ce plan devient le *plan tangent* à Γ dans le même point, c'est-à-dire l'intersection des espaces tangents en ce point aux variétés du faisceau, et en conséquence le lieu des droites tangentes en ce point aux courbes tracées sur Γ et passant par ce point.

Si le point est le sommet de l'un des cônes de 1e espèce (ou un point quelconque de l'arête d'un cône de 2e espèce) du faisceau, ses espaces polaires par rapport aux variétés de celui-ci coincident; de sorte que le point n'a plus seulement un *plan*, mais un *espace polaire*. Cet espace contient les sommets (et les arêtes) des autres cônes du faisceau.

2. Maintenant si par un point quelconque P de R_4 on projette la surface quartique Γ, avec ses plans tangents, sur un espace R_3

*) Par brièveté dans les dénominations des êtres de l'espace linéaire à 4 dimensions nous nommerons simplement *variété*, *surface*, *courbe* les espaces resp. à 3, 2, 1 dimensions contenus dans celui-ci. La variété, surface, courbe du 1er ordre s'appellera resp. *espace* (ordinaire), *plan*, *droite*.

**) On pourra d'ailleurs trouver la théorie de l'intersection de deux F_{n-1}^2 du R_n dans notre *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Memorie dell' Accad. di Torino, serie 2, vol. 36).

contenu dans R_4, on obtient une nouvelle surface quartique S, avec ses plans tangents. Soit φ la variété quadratique contenant Γ et passant par P. L'espace π tangent en P à φ coupera φ même en un cône quadrique *ordinaire* (ou à deux dimensions), qui sera coupé en général par l'une quelconque des variétés quadratiques de notre faisceau (et par toutes les autres) suivant une courbe du 4e ordre et de 1e espèce*) k^4 appartenant à Γ et dont les couples de points situés sur les génératrices du cône quadrique seront projetés en les points d'une conique γ^2 de R_3 placée dans le plan d'intersection de R_3 avec π. Donc *la surface S projection de Γ dans R_3 est une surface du 4e ordre ayant une conique double γ^2*. Pour chaque point de cette conique les deux plans tangents à S seront les projections des plans tangents à Γ dans les deux points de k^4 dont ce point est la projection: ces deux points de k^4 représentent le même point de la conique double γ^2 respectivement dans l'une et dans l'autre des deux nappes de S qui y passent.

3. Parmi les génératrices du cône $\pi\varphi$ il y en a quatre en général qui touchent la courbe k^4 située dans ce cône: leurs points de contact sont les 4 points d'intersection de k^4 avec le plan polaire p de P par rapport à Γ (plan qui est aussi le plan polaire de P par rapport à toutes les quadriques d'intersection de π avec le faisceau de variétés quadratiques considéré, c'est-à-dire à toutes les quadriques de l'espace π qui passent par k^4). Donc *il y a sur la conique double de S quatre points dans lesquels les deux nappes se confondent, c'est-à-dire quatre points-pinces.* Pour en trouver les plans tangents il ne suffit plus de projeter par P les plans tangents à Γ dans ces 4 points de k^4: car, puisque ces points se trouvent sur le plan polaire p de P par rapport à Γ, leurs plans tangents passeront tous les quatre par P et n'auront pour projections sur R_3 que quatre droites passant par les points-pinces et rencontrant S chacune en 4 points confondus dans le point-pince correspondant (puisque les 4 points de rencontre de chaque plan tangent à Γ coincident dans le point de contact): ces 4 droites sont donc (comme nous nous assurerons aussi par d'autres propriétés) les *tangentes singulières* relatives aux 4 points-pinces**). Soit A l'un quelconque des 4 points d'intersection de p avec Γ et A' sa projection sur R_3, qui sera un point-pince de γ^2: chaque espace passant par le plan a

*) N'ayant jamais à considérer les courbes du 4e ordre de la 2e espèce, nous indiquerons souvent avec *quartique* tout-court une quartique de 1e espèce.

**) V. Zeuthen: *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques*, n° 15; Math. Ann., Bd. X, pag. 446—546. — Nous retrouvons ci-dessus des propriétés des points-pinces qui ont été données pour des surfaces algébriques quelconques dans ce mémoire.

tangent en A à Γ est lui-même tangent en A à Γ et coupe cette surface suivant une quartique ayant en A un point double dont les deux tangentes appartiennent à a. Or ce même espace coupe R_3 suivant l'un quelconque des plans qui passent par la tangente singulière du point-pince A': donc l'intersection d'un tel plan avec S est la projection de cette quartique faite par le point P qui est dans le plan a des deux tangentes en A à la quartique. *Un plan qui passe par la tangente singulière en un point-pince de la conique double de S coupe cette surface suivant une courbe (du 4e ordre) ayant en ce point-pince un point de contact de deux branches avec cette tangente singulière pour tangente**).

*) Effectivement la projection plane d'une courbe gauche à point double par un point du plan des deux tangentes présente en général un point de contact de deux branches (*Selbstberührungspunkt*) dans la projection de ce point double. — De même on peut demontrer que *tandis que chaque section de S passant par un point-pince y a en général un point de rebroussement de 1e espèce, chaque section faite par un plan passant par la tangente à la conique double en ce point-pince y a un point de rebroussement de 2e espèce.* Car un espace quelconque passant par PA coupe Γ suivant une quartique tangente en A à cette droite et ayant en conséquence pour projection une quartique à point de rebroussement de 1e espèce en A'; mais si cet espace passe en outre par le plan tangent à φ (ou au cône $\pi\varphi$) le long de PA, alors sa quartique d'intersection avec Γ non seulement aura PA pour tangente en A, mais aura un contact quadriponctuel en A avec le plan nommé et la projection de cette quartique aura donc vraiment en A' un point de rebroussement de 2e espèce avec la tangente à la conique double pour tangente (singulière).

Comme nous aurons encore besoin de nous y appuyer, il est bon que nous rappellions ici les différents cas que peut présenter la projection plane d'une quartique gauche de 1e espèce, suivant la position du centre de projection P (que nous supposerons d'ailleurs n'appartenir pas à la courbe, de sorte que la projection soit aussi du 4e ordre), ne pouvant pas citer un autre lieu où ils soient tous exposés complètement. Ces différents cas sont d'ailleurs très — intéressants par eux-mêmes, car ils donnent lieu à presque toutes les formes les plus remarquables de points singuliers dont le dégré de multiplicité ne surpasse pas 3. — Il y a, comme on sait, trois différentes sortes de ces quartiques: celle générale, celle qui a un point double et celle qui a un point de rebroussement. La projection plane d'une quartique générale est une courbe du 4e ordre à deux points doubles, qui sont les points de rencontre du plan avec les deux génératrices se croisant en P de la quadrique qui passe par P et qui appartient au faisceau ayant pour soutien la quartique donnée. Mais comme dans chacun des deux systèmes de génératrices de cette quadrique il y en a 4 qui touchent la quartique, si P se trouve sur l'une de ces 8 génératrices ou bien sur l'un de leurs 16 points d'intersection, alors l'un des deux points doubles de la projection ou tous les deux se changeront en des points stationnaires (points de rebroussement de 1e espèce). Si la quadrique du faisceau passant par P devient un cône alors, comme les deux génératrices passant par P coincident, les deux points doubles de la courbe projection coincident en un point de contact de deux branches; mais si en outre P se trouve sur l'une des 4 génératrices du cône tangentes à la quarti-

Mais si l'espace mené par le plan a est celui tangent en A à la variété φ, alors le centre de projection P se trouvera sur l'une des deux tangentes en A à la quartique d'intersection de cet espace avec Γ, et la projection de cette quartique aura en conséquence en A' un point triple par lequel passent une branche ayant en ce point

---

que, alors (comme nous avons déjà vu) la projection de celle-ci aura un point de rebroussement de 2e espèce.

La projection d'une quartique à point double, lorsque la quadrique du faisceau passant par P est générale, a trois points doubles, dont l'un D est la projection du point double M de la quartique. Des deux autres l'un ou tous les deux deviennent stationnaires si P vient à être sur une ou sur deux génératrices tangentes à la quartique. Si P vient à être sur l'une des deux génératrices de la quadrique qui passent par M, c'est-à-dire s'il vient à être sur le plan tangent en M à celle-ci (plan des deux tangents en M à la quartique), alors la projection D de M devient un point de contact de deux branches, et il y aura encore un autre point double, qui pourra aussi devenir stationnaire. Comme dans le faisceau de quadriques déterminé par la quartique il y a dans ce cas un cône ayant le sommet en M et deux autres cônes, il faudra encore considérer séparément le cas où P se trouve sur le premier cône et celui où il se trouve sur l'un des deux autres. Dans le premier cas la projection de la quartique a en D un point triple dans lequel se croisent en général trois branches distinctes (les projections des deux branches de la quartique qui passent par M et de la branche qui rencontre en un point différent de M la droite PM); mais si le centre de projection P se trouve sur l'une de ces deux génératrices du cône qui sont les tangentes à la quartique en M, alors deux des branches passant par le point triple D se confondent en une seule et ce point triple vient se composer d'un point stationnaire ayant une certaine tangente et par lequel passe une autre branche ayant en ce point une autre tangente. Dans le second cas la projection de la quartique a en D un point double ordinaire et ailleurs un point de contact de deux branches, qui se change en un point de rebroussement de 2e espèce lorsque P vient sur l'une des deux génératrices tangentes à la quartique, qu'il y a dans ce cas sur le cône quadrique passant par P; mais si le centre de projection P se trouve sur la génératrice de ce cône qui passe par M, alors évidemment dans le point D de la projection se confondront un point de contact de deux branches et un point double ordinaire, c'est-à-dire on aura un *point d'osculation de deux branche* (point dans lequel se confondent trois points doubles dont les droites qui les joignent tendent vers une même limite).

Si la quartique gauche a un point stationnaire M et le centre de projection P est un point quelconque d'une quadrique générale du faisceau, la projection aura aussi un point stationnaire dans la projection D de M et aura en outre deux points doubles dont l'un ou tous les deux deviendront aussi des points de rebroussement de 1e espèce si P se trouve sur une ou deux génératrices tangentes à la quartique. Mais si P se trouve sur l'une des deux génératrices qui passent par M, alors dans le point stationnaire D viendra coincider l'un des deux points doubles, c'est-à-dire D deviendra un point de rebroussement de 2e espèce pour la courbe projection et celle-ci aura encore un point double (ou stationnaire). Si la quadrique du faisceau qui passe par P est le cône qui a le sommet en M, alors la projection de la quartique aura en D un point triple provenant d'un point stationnaire par lequel passe une autre branche de la courbe; mais si P est

un point de rebroussement de 1^e espèce dont la tangente est l'intersection de R_3 avec le plan tangent le long de la génératrice PA au cône d'intersection de l'espace avec φ (plan qui sera donc tangent le long de PA à φ et en conséquence aussi au cône $\pi\varphi$, de sorte qu'il coupera R_3 suivant la tangente en A' à γ^2) et une autre branche dont la tangente en A' est l'intersection de R_3 avec le plan a des tangentes en A' à la quartique considérée, c'est-à-dire est la tangente singulière en A'. Donc: *Parmi les plans qui passent par la tangente singulière en un point-pince celui qui contient aussi la tangente en ce point à la conique double coupe la surface S suivant une courbe ayant en ce point-pince un point triple, où il y a un point de rebroussement dont la tangente est cette tangente à la conique double et par lequel passe une autre branche ayant pour tangente la tangente singulière du point-pince.* — Ce plan, qui est évidemment le lieu des droites rencontrant dans le point-pince trois fois la surface S, s'appelle, pour le distinguer des autres plans passant par la tangente singulière et qui peuvent tous être considérés comme des plans tangents dans le point-pince, le *plan tangent singulier* de ce point.

Nous voyons donc que les 4 plans tangents singuliers qui appartiennent aux 4 points-pinces de γ^2 sont les intersections de R_3 avec les espaces tangents à φ dans les 4 points d'intersection de p avec Γ. Or ces espaces se coupent suivant une droite passant par P (la droite polaire du plan p par rapport à φ) puisque ces points sont dans un plan p appartenant à π: donc les 4 plans tangents singuliers se coupent dans le point d'intersection de cette droite avec R_3. *Les plans tangents singuliers des* 4 *points-pinces de la conique double de S passent par un même point.*

4. Si la variété quadratique φ du faisceau, qui passe par le centre de projection P, est un cône de 1^e espèce, alors il se présente quelques particularités dans ce que nous avons dit. L'espace π qui lui est tangent en P coupera ce cône φ en deux plans se coupant suivant la droite joignant P au sommet de ce cône, et la quartique k^4 d'inter-

---

justement sur celle des génératrices de ce cône qui est tangente en M à la quartique, alors cette branche vient se confondre avec celle qui contient le point stationnaire et on a un point triple dont les trois tangentes coincident (et dont l'apparence est presque, comme l'on sait, celle d'un point ordinaire). Si enfin P se trouve sur l'autre cône du faisceau, alors la projection aura en D un point stationnaire, et ailleurs un point de contact de deux branches, qui viendra coincider avec D si P se porte sur la génératrice passant par M: dans ce dernier cas le point D deviendra pour la courbe un *point de rebroussement de* 3^e *espèce*, c'est-à-dire un point singulier provenant de la coincidence d'un point de rebroussement de 2^e espèce avec un point double.

section de cet espace π avec Γ se décomposera en deux coniques k_1^2, k_2^2 de ces plans, lesquelles auront deux points communs et seront projetées par P sur R_3 suivant deux droites d_1, d_2 se coupant en un point, et dans lesquelles se décompose en ce cas la conique γ^2: comme chaque point de l'une de ces droites est la projection de deux points de la conique correspondante, la surface S aura d_1, d_2 pour droites doubles, c'est-à-dire *la conique double de S se décomposera en deux droites.* Par le point P passent deux tangentes à chacune des coniques k_1^2, k_2^2: donc *sur chaque droite double de notre surface il y a deux points-pinces.* Ces points auront encore des tangentes singulières, que l'on trouvera de la manière vue, et les plans passant par ces tangentes jouiront encore des mêmes propriétés que dans le cas général; le plan tangent singulier qui correspond à l'un de ces points-pinces sera le plan qui joint sa tangente singulière à la droite double sur laquelle il se trouve.

Le point de rencontre des plans tangents singuliers des 4 points-pinces se réduit dans ce cas au point de rencontre des deux droites doubles, comme le montre d'ailleurs la construction que nous en avons donnée. La même méthode, dont nous nous sommes servis pour reconnaitre la nature des sections de S faites par des plans qui passent par un point-pince, montre que la section faite par un plan qui passe par le point de rencontre des deux droites doubles (projection d'une quartique gauche par un point P d'un cône quadrique — appartenant à φ — qui la contient) a dans ce point un contact de deux branches avec une droite du faisceau déterminé par d_1, d_2 pour tangente commune. D'ailleurs cela résulte aussi du fait que pour une telle section coincident les deux points doubles qu'une section plane quelconque a sur d_1 et d_2.

Nous verrons plus tard comment les deux droites doubles d_1, d_2 viennent coincider lorsque la variété φ devient un cône de 2e espèce.

Séries de coniques de la surface; cônes de Kummer.

5. Chacun des cônes quadriques passant par Γ contient ∞^1 *plans générateurs*, et s'il est de 1e espèce ces plans forment deux séries: deux plans d'une même série ne se coupent que dans le sommet, tandis que deux plans de différentes séries se coupent suivant une *droite génératrice* du cône (car on obtient tous ces plans générateurs en projetant les deux séries de génératrices d'une quadrique par un point extérieur à l'espace qui contient celle-ci). Or chaque plan générateur d'un tel cône est coupé par une autre variété quelconque de notre faisceau (et en conséquence par toutes ces variétés) suivant une conique appartenant à Γ. Vice-versa chaque conique de Γ est sur un plan générateur d'un cône du faisceau puisque la variété du faisceau, qui passe par un point

quelconque de ce plan placé hors de la conique, devra contenir tout ce plan et en conséquence se réduire à un cône. Donc la surface Γ contient ∞^1 coniques, qui forment autant de *systèmes* qu'il y a de cônes dans le faisceau, et chaque système se compose, s'il correspond à un cône de 1e espèce, de deux *séries* différentes. Comme deux plans générateurs de deux cônes différents du faisceau se coupent en général en un point qui appartiendra à Γ, nous voyons que deux coniques de Γ appartenant à des systèmes différents se coupent en un seul point. Au contraire il suit de ce que nous avons dit que deux coniques appartenant au même système correspondant à un cône de 1e espèce se coupent en deux points si elles sont des deux séries différentes, tandis qu'elles ne se coupent pas (ou se coupent seulement dans le sommet du cône correspondant, si ce sommet appartient à Γ) lorsqu'elles sont de la même série. — Dans le cas le plus général il y aura donc sur Γ (v. n^0 1) 5 systèmes de coniques décomposés chacun en deux séries, et correspondants aux 5 cônes de 1e espèce du faisceau (dont aucun n'a alors le sommet sur Γ).

En projetant par un point quelconque P sur R_3, les plans des coniques de Γ se projettent au moyen d'espaces passant par P et respectivement par les différents sommets des cônes du faisceau. Un tel espace passant par P et par un plan générateur de l'un de ces cônes contiendra aussi un plan générateur de différente série, sur lequel il y aura une autre conique de Γ: cet espace sera tangent au cône le long de la droite d'intersection de ces deux plans générateurs (droite sur laquelle se coupent en deux points les deux coniques de Γ appartenant à ces plans), et cette droite se trouvera en conséquence dans l'intersection de ce cône avec l'espace polaire de P par rapport à lui, intersection qui se compose d'un cône quadrique ordinaire, dont les plans tangents appartiennent aux espaces tangents considérés menés par P au cône à 3 dimensions. Mais si P appartient justement à celui-ci (n^0 4), ce cône quadrique ordinaire se réduit au couple de plans générateurs qui passent par P et qui coupent R_3, comme nous avons vu, suivant les deux droites doubles d_1, d_2 de S. Les espaces tangents menés par P au cône F_3^2 coupent donc dans ce cas R_3 suivant les deux faisceaux des plans passant par d_1, d_2; et des deux coniques de Γ, que chacun d'eux contient, l'une est fixe (k_1^2 ou k_2^2) et se projette suivant d_1 ou d_2, et seulement l'autre varie. — Donc, en supposant successivement que le centre de projection P ait une position tout-à-fait générale par rapport à Γ et qu'il soit pris sur l'un des cônes du faisceau, nous avons les propositions suivantes.

La surface générale du 4e ordre à conique double contient 5 *couples de séries de* ∞^1 *coniques. Les plans des coniques des deux séries d'un même couple enveloppent un cône quadrique, dont chaque plan tangent*

coupe la surface suivant deux coniques appartenant respectivement aux deux séries du couple et se coupant (outre que dans deux points de la conique double) en deux points situés sur la génératrice de contact de ce plan avec le cône. Les génératrices de ces 5 cônes et leurs plans tangents sont donc doublement tangents à la surface; nous appellerons ces cônes les cônes de Kummer de la surface. — Deux coniques de celle-ci ne se coupent pas si elles appartiennent à une même série, se coupent en deux points si elles appartiennent aux deux séries d'un même couple et se coupent en un seul point si elles appartiennent à des séries de différents couples.

*Les mêmes choses valent parfaitement si la conique double de la surface se décompose en deux droites; seulement alors au lieu de 5 il n'y aura que 4 cônes de Kummer proprement dits, le cinquième se réduisant au couple des deux droites doubles considérées comme enveloppes de plans, car outre les 4 couples de séries de coniques qui correspondent aux 4 cônes de Kummer proprement dits il y a sur la surface deux autres séries de coniques situées dans les plans passant par les deux droites doubles. Ces 5 couples de séries de coniques présentent les mêmes relations que dans le cas précédent.**)

6. Nous pouvons établir facilement une proposition remarquable qui lie les sommets des cônes de Kummer avec les points-pinces de la conique double. Considérons le lieu des droites polaires du plan p (polaire de P relativement à Γ) par rapport aux variétés quadratiques de notre faisceau. Puisque par rapport à une quelconque de ces variétés le point P a un espace polaire passant par p, les droites polaires de p passeront toutes par P et formeront en conséquence un cône. Un espace quelconque mené par p coupe le faisceau de F_3^2 suivant un faisceau ordinaire de quadriques et les pôles de p par rapport à celles-ci forment, comme l'on sait, une cubique gauche dont les cordes sont les droites polaires des points de p par rapport à ce faisceau. Donc nous concluons que le lieu des droites polaires du plan p par rapport au faisceau de F_3^2 est un cône cubique ayant P pour sommet**) et qui est coupé suivant deux génératrices par chacun des plans polaires par

*) Dans ce cas, où la variété φ qui passe par P est un cône, les coniques de Γ placées dans les plans générateurs de φ de même système que le plan contenant k_2^2 coupent k_1^2 en deux points en ligne droite avec le sommet de φ: comme par ce sommet passent deux seules tangentes à k_1^2 on a que *parmi les plans qui passent par une droite double de notre surface il y en a deux pour lesquels la conique d'intersection avec la surface est tangente à cette droite double.*

**) A la même conclusion on parviendrait en remarquant que le cône dont il s'agit est le cône qui projette par le point P la courbe lieu des pôles de l'espace π par rapport aux variétés du faisceau et cette courbe est, comme on voit facilement, une courbe du 4e ordre passant par P (et *normale* pour R_4).

rapport à Γ des points de p, parmi lesquels il y a les 4 plans tangents à Γ dans les points d'intersection de p avec Γ (ou avec k^4). En outre comme les droites polaires de p par rapport aux cônes de notre faisceau passent par leurs sommets, ce cône cubique passera aussi par ceux-ci. Et les 3 points d'intersection de ce cône avec p seront des points de contact de ce plan p avec des variétés du faisceau, c'est-à-dire ils seront les trois points diagonaux du quadrangle déterminé dans le plan p par les 4 points d'intersection avec Γ. En coupant donc le cône cubique considéré avec R_3 nous avons pour la surface S le théorème suivant:

*Les sommets des cônes de Kummer, les points diagonaux du quadrangle des points-pinces de la conique double, et le point d'intersection des plans tangents singuliers de ces points-pinces sont sur une même cubique gauche. Cette cubique a pour 4 cordes les tangentes singulières de ces points.**)

Si la surface S est générale et sa conique double ne se décompose pas, on a ainsi 9 points et 4 cordes d'une cubique; si la conique double se décompose, l'un des sommets de cônes de Kummer, l'un des points diagonaux du quadrangle des points-pinces et le point d'intersection des plans tangents singuliers de ces points se confondent en le point d'intersection des deux droites doubles, de sorte qu'on a seulement plus 7 points et 4 cordes d'une cubique. — Nous verrons plus tard deux propriétés communes respectivement aux différents points et aux différentes cordes de cette cubique.

Droites et cubiques de la surface.

7. Cherchons à-présent les droites de Γ. Soit r une droite de Γ: comme elle appartiendra aussi à un cône quelconque f de notre faisceau de F_3^2 sans passer par son sommet (il peut arriver qu'elle passe par le sommet seulement dans des cas particuliers que nous considérerons plus tard), le plan qui la joint à ce sommet appartiendra lui-même au cône f; et puisque ce plan coupe Γ suivant la droite r il la coupera encore suivant une autre droite r' et sera en conséquence tangent dans le point d'intersection de ces deux droites à toutes les F_3^2 du faisceau. L'espace polaire du sommet de f par rapport à tout ce faisceau coupe donc f suivant une quadrique telle que la génératrice qui passe par le point rr' et qui est l'intersection du plan rr' avec cet espace sera tangente aux quadriques d'intersection du même espace avec les F_3^2 du faisceau, c'est-à-dire tangente à la quarti-

*) La première partie de cette proposition est due, pour le cas le plus général, à Clebsch (mém. cité, pag. 165), tandis que la seconde parait nouvelle. Notre demonstration montre aussi comment on devra modifier l'énoncé dans des cas plus particuliers, pour quelques-uns desquels M. Korndörfer a étendu le théorème de Clebsch par des calculs identiques à ceux de ce savant.

que (commune a toutes ces quadriques) d'intersection de cet espace polaire et de Γ. Vice-versa si en un point de cette quartique la tangente à celle-ci est une génératrice de la première quadrique, le plan générateur de f qui la contient sera tangent aux autres F_3^2 du faisceau dans ce point et coupera en conséquence Γ suivant deux droites r, r' se croisant en ce point. Or on sait que dans une quadrique il y a en général pour chaque série de génératrices 4 génératrices tangentes à une quartique (de 1e aspèce) tracée sur cette quadrique. Nous concluons donc:

Dans le cas le plus général la surface Γ contient 16 droites telles que chacune est coupée par d'autres 5 d'entre elles. Par rapport à à l'un quelconque des 5 cônes du faisceau de F_3^2 ces 16 droites se divisent en 8 couples, chaque couple se composant de deux droites appartenant à un plan générateur de ce cône, quatre couples à 4 plans générateurs d'une série et les autres quatre à 4 plans générateurs de l'autre série. — En projetant par un point quelconque nous avons pour la surface S:

Une surface du 4e ordre générale, à conique double générale ou décomposée en deux droites, contient 16 *droites* (simples) *dont chacune est coupée par d'autres* 5, *et qui forment* 5 . 8 *couples de droites se coupant, de manière que chaque cône de Kummer a* 8 *plans tangents contenant chacun l'un de ces couples:* 4 *des couples ainsi obtenus forment des coniques de l'une série et les autres* 4 *des coniques de la série conjuguée dans le couple de séries de coniques de la surface qui correspondent au cône de Kummer. De là on tire toutes les relations qui lient les* 40 *couples de droites entre eux et avec les* 10 *séries de coniques. Ainsi des deux quatraines de ces couples de droites qui correspondent à un même cônes de Kummer deux couples d'une même quatraine n'ont pas de points communs, tandis que deux couples de différentes quatraines se coupent en deux points. Etc. etc.**).

Si la conique double est décomposée en deux droites on a comme cas particulier que par chacune de ces droites passent 4 *plans contenant* 4 *couples de droites* (simples) *de la surface, de sorte que* 8 *de ces droites rencontrent une droite double et les autres* 8 *rencontrent l'autre.*

Nous ne nous arrêterons pas sur les autres manières de grouper entre elles les 16 droites, car celle que nous avons vue est la plus importante.

8. Proposons-nous maintenant de trouver les cubiques de Γ. On sait qu'une cubique est toujours contenue dans un espace (au moins). Or un espace qui contienne une cubique de Γ devra encore couper Γ suivant une droite et vice-versa chaque espace qui passe par une droite

*) V. Clebsch, loc. cit., pag. 145.

de Γ coupe encore cette surface suivant une cubique, appuyée en deux points à cette droite (car la cubique et la droite doivent former une quartique de 1e espèce). Comme par une droite il passe ∞^2 espaces, il y aura donc sur Γ 16 systèmes de ∞^2 cubiques, dont chaque système correspondra à l'une des 16 droites de la surface. L'espace qui contient une de ces cubiques, et en conséquence la droite correspondante, est coupé par une autre droite de la surface en un point qui appartient à la cubique s'il n'appartient pas à la première droite. Donc en projetant sur R_3 par un point quelconque P et en remarquant que dans chaque système de ∞^2 cubiques de Γ il y en a ∞^1 placées dans des espaces qui passent par P:

Dans une surface générale du 4e ordre à conique double, générale ou décomposée en deux droites, il y a 16 systèmes de ∞^2 cubiques gauches qui correspondent aux 16 droites de la surface: dans le système qui correspond à l'une de ces droites il y a ∞^1 cubiques planes situées dans des plans passant par cette droite. Les ∞^2 cubiques gauches de ce système coupent en deux points cette droite correspondante, en aucun point les 5 droites de la surface qui s'appuient sur celle-ci et en un point les autres 10 droites de la surface.

*Deux cubiques quelconques de même système se coupent en un seul point, de sorte que par deux points de la surface passe une cubique bien déterminée de chaque système. Deux cubiques de systèmes différents ont trois ou deux points communs suivant que les deux droites correspondantes à ces systèmes se coupent ou non.**) — En effet considérons dans R_4 l'espace qui contient une cubique de Γ et en conséquence aussi une droite r: on voit tout-de-suite que cet espace (et par conséquent cette cubique) sera déterminé si on l'assujettit à passer, outre que par r, par deux points quelconques donnés de Γ. En outre une autre cubique du même système coupera cet espace en 3 points dont deux seront sur r et un, en conséquence, sur la première cubique. Au contraire si l'on considère avec celle-ci une cubique d'un autre système correspondant à une droite coupant ou ne coupant pas r, alors comme cette nouvelle cubique ne coupera pas ou bien coupera en un point r, elle coupera encore l'espace contenant la première cubique, c'est-à-dire celle-ci même en 3 ou resp. en 2 points. Cela prouve justement (en projétant sur R_3) notre dernier énoncé.

Remarquons que le fait que les ∞^2 cubiques d'un système sur Γ, ou bien sur l'une quelconque de ses projections dans R_3, jouissent de la propriété que deux d'entre elles se coupent en un point et qu'il y en a une déterminée qui passe par deux points donnés de la surface nous prouve que toute la géométrie plane projective vaut pour cette

*) V. Clebsch, loc. cit., pag. 155.

surface, pourvu qu'aux droites du plan on substitue ce système de cubiques sur la surface. Ainsi on pourra établir un système de coordonnées (*projectives* en un sens nouveau) de points sur la surface et on peut obtenir de cette manière très-simplement une représentation de la surface sur un plan, à laquelle nous parviendrons plus tard avec autant de simplicité par une projection.

Quartiques de la surface et quadriques doublement tangentes.

9. Chacun des ∞^4 espaces contenus dans R_4 coupe Γ suivant une quartique de 1e espèce. Deux de ces quartiques se coupent en 4 points, placés dans le plan d'intersection des deux espaces qui les contiennent, et par lesquels passent ∞^1 autres quartiques (appartenant au faisceau des espaces qui passent par ce plan). Mais par 4 points quelconques de Γ il ne passe en général qu'un espace déterminé et en conséquence aussi une seule quartique. — Les espaces de R_4 coupent la variété quadratique φ du faisceau qui passe par P dans des quadriques, qui sont projetées par P sur R_3 suivant des quadriques passant par la conique double de S. Donc:

Sur chaque surface du 4e ordre à conique double, générale ou décomposée, S il y a ∞^4 quartiques de 1e espèce, qui sont l'intersection de S avec les ∞^4 quadriques passant par la conique douple. Par 4 points quelconques de S il passe une quartique bien déterminée, mais deux quartiques quelconques se coupent en 4 points (placés dans un plan) par lesquels il en passe encore ∞^1, et dont trois déterminent parfaitement le quatrième.

Un espace quelconque coupe la quartique (générale ou décomposée en deux coniques) k^4, dont la projection est la conique double de S, en 4 points situés dans le plan d'intersection de cet espace avec l'espace π qui contient k^4: les 4 autres points de k^4 placés avec ceux-là resp. en ligne droite avec P seront aussi sur un plan (car ils correspondent à ceux-là dans une homologie harmonique de l'espace π, ayant P pour centre et p pour plan d'homologie), et il passera en conséquence par les uns et par les autres deux faisceaux d'espaces, c'est-à-dire deux systèmes de ∞^1 quartiques. Donc:

*Chacune des ∞^4 quartiques de 1e espèce de S coupe la conique double en 4 points dont 3 suffisent pour déterminer la quatrième; et par 4 tels points sur les mêmes nappes de la surface passent ∞^1 de ces quartiques, tandis que par les 4 mêmes points, mais sur les autres nappes passant par eux, passe un autre système de ∞^1 quartiques.**)

10. Parmi les espaces de R_4 ceux qui touchent l'un quelconque

*) V. Clebsch, loc. cit., pag. 162.

des cônes quadriques passant par Γ coupent ce cône en deux plans et Γ en deux coniques de ce plans, dans lesquelles se décompose la quartique de Γ situé dans un tel espace: les deux points communs à ces deux coniques sont des points de contact d'un tel espace avec Γ et ils sont sur une même génératrice du cône considéré et en conséquence sur une même droite avec le sommet de ce cône. En projetant par un point quelconque sur R_3:

A chaque cône de Kummer de la surface correspond, parmi les ∞^4 *quadriques passant par la conique double, un système de* ∞^2 *quadriques doublement tangentes à S: l'une quelconque de ces quadriques touche S en deux points alignés avec le sommet du cône de Kummer correspondant et coupe en conséquence S en deux coniques se coupant en ces points et appartenant resp. aux deux séries de coniques de la surface qui correspondent à ce cône. Réciproquement, si l'on prend dans les deux séries de coniques de S qui correspondent à un même cône de Kummer deux coniques quelconques, elles appartiendront à une quadrique passant par la conique double de S (et doublement tangente à S).**)

11. Nous avons considéré au n⁰ précédent un cas dans lequel une des ∞^4 quartiques des Γ acquiert deux points doubles et nous avions déjà examiné au n⁰ 8 l'autre cas dans lequel cela arrive. Considérons maintenant les quartiques qui ont un seul point double. En un point quelconque M de Γ il y a, comme nous avons déjà dit, un plan tangent m, qui est l'intersection du faisceau des espaces tangents en M aux variétés du faisceau des F_3^2 passant par Γ. Un tel espace coupe la variété correspondante en un cône quadrique ordinaire ayant M pour sommet et les autres variétés en un faisceau de quadriques ayant m pour plan tangent en M; donc il coupe Γ en une quartique ayant en M un point double dont les tangentes sont les droites d'intersection de m avec la variété quadratique considérée. En faisant varier celle-ci et en conséquence son espace tangent en M on voit que le faisceau des espaces passant par m coupe Γ suivant ∞^1 quartiques ayant en M un point double et que les couples des tangentes en ce point à ces courbes sont les couples de droites d'une involution, dans lesquels le plan m coupe le faisceau de F_3^2. Dans cette involution il y a deux droites doubles qui correspondent à deux variétés tangentes à m le long de ces deux droites. En remarquant encore que dans le faisceau d'espaces passant par m il y en a qui passent par les sommets des cônes

*) Il est bien entendu que ces propriétés, comme presque toutes celles que nous trouvons (tant que nous n'avertissons pas du contraire), ont lieu, comme le montre leur demonstration, non seulement pour la surface S la plus générale, mais aussi pour tous les cas particuliers, soit que sa conique double soit générale, soit qu'elle se décompose.

du faisceau de F_3^2, il y en a un qui touche en M la variété φ passant par le centre de projection P et il y en a un enfin qui passe par P, et en se rappelant en outre que le faisceau des espaces tangents aux F_3^2 en un point quelconque de Γ correspond projectivement au faisceau de ces variétés nous concluons que:

*Un point quelconque M de la surface S est double pour ∞^1 quartiques de 1e espèce de la surface, qui sont l'intersection de celle-ci avec un faisceau de quadriques passant par la conique double et tangentes en M à S: les couples de tangentes en M à ces quartiques forment dans le plan tangent en M à S une involution dont les deux droites doubles sont les tangentes aux deux quartiques qui ont en M un point de rebroussement. A cette involution appartiennent les couples de tangentes aux couples de coniques de la surface (des différents couples de séries) qui passent par M, en outre le couple des droites qui s'appuient sur la conique double, et le couple des tangentes à l'intersection de la surface avec son plan tangent en M (c'est-à-dire des tangentes principales relatives à ce point). — Tous ces couples de l'involution, excepté le dernier, forment un groupe de couples qui reste projectif à soi-même lorsqu'on fait varier le point M sur S. En d'autres termes si en un point quelconque M de S on mène les différentes quadriques passant par la conique double et tangentes en ce point et en un autre à S, elles formeront avec le cône qui a M pour sommet et qui passe par la conique double un groupe de quadriques d'un faisceau et les rapports anharmoniques de ce groupe sont les mêmes, quel que soit le point M de la surface.**)

Ce théorème a lieu quelle que soit la surface S. Si elle est tout-à-fait générale et si sa conique double ne se décompose pas, on a ainsi des groupes de 6 éléments qui restent projectifs entre eux, c'est-à-dire l'on a ainsi 3 rapports anharmoniques indépendants qui seront des invariants absolus de la surface. Si la conique double se décompose en deux droites, au lieu de 5 il y aura seulement plus 4 quadriques (proprement dites) doublement tangentes à la surface; c'est-

*) La première partie de ce théorème est due à Clebsch (loc. cit., pag. 161); la seconde n'est qu'une modification d'un théorème de M. Darboux sur les normales aux cyclides (V. le *Mémoire sur les surfaces cyclides*, Annales de l'Éc. Norm. 2e série, tome 1, à la pag. 277; ou bien l'ouvrage cité, pag. 281). — Nous pouvons retrouver ici par nos méthodes un autre résultat dû à Clebsch. Proposons-nous de chercher le lieu d'un point de S, ou bien de Γ, pour lequel les deux droites doubles de l'involution considérée, c'est à dire les deux tangentes en ce point à des quartiques y ayant un point de rebroussement, coincident. La droite dans laquelle ces deux droites doubles coincident devra appartenir à chaque couple de l'involution, et comme ces couples se composent des droites d'intersection du plan tangent à Γ dans le point considéré avec les F_3^2 du faisceau, cette droite devra appartenir à ces F_3^2 et en conséquence aussi à Γ. Donc seulement pour les points situés sur les droites de Γ ou de S il arrive que les deux tangentes cuspidales considérées coincident.

à-dire dans l'involution des tangentes aux dix coniques de S qui passent par un point quelconque de cette surface le couple des tangentes aux deux coniques placées dans des plans passant par les droites doubles de la surface est aussi le couple, que nous considérions aussi, des deux droites qui s'appuient sur la conique double: au lieu de 6 éléments d'un groupe on en a seulement plus 5 et on a de cette manière seulement 2 invariants absolus de la surface.

12. Les quadriques doublement tangentes nous donnent une manière de construire la surface S au moyen de faisceaux projectifs de quadriques. En effet dans R_4 l'un quelconque des cônes du faisceau de F_3^2 et le lieu des plans d'intersection des espaces correspondants de deux faisceaux projectifs dont les soutiens sont deux plans générateurs de l'autre système du cône. Or ces espaces coupent φ suivant des quadriques qui seront projetées sur R_3 suivant des quadriques doublement tangentes à S et passant par sa conique double. On trouve ainsi le théorème suivant:

*Si dans la surface à conique double S quelconque on prend deux coniques appartenant à la même série, on peut considérer S comme le lieu des coniques d'intersection des surfaces correspondantes de deux faisceaux projectifs de quadriques passant par la conique double et ayant pour soutiens (outre celle-ci) respectivement ces deux coniques. — Les ∞^1 coniques qu'on obtient ainsi forment la série conjuguée à celle qui contient celles-ci, et les quadriques des deux faisceaux appartiennent au système correspondant de quadriques doublement tangentes à S et passant par la conique double.**)

On voit bien quelles légères modifications il faut faire à cet énoncé dans les cas particuliers où S est la projection d'une surface Γ contenue dans un cône quadrique de 2^e^ espèce, cas sur lesquels nous reviendrons d'ailleurs plus tard. Il s'ensuit que *toutes* les surfaces appartenant à la catégorie qui nous occupe peuvent être construites au moyen de deux faisceaux projectifs de quadriques. Et vice-versa deux faisceaux projectifs de quadriques ayant une conique commune donnent toujours lieu par les intersections des quadriques correspondantes à l'une de nos surfaces.

---

*) La possibilité de construire une surface du 4^e^ ordre à conique double au moyen de deux faisceaux projectifs de quadriques semble avoir été remarquée pour la première fois par M. H. Durrande (*Sur les surfaces du quatrième ordre*, Comptes-rendus, 1870, vol. 70, pag. 920—2). Voir aussi le n^0^ 23 du mémoire de M. Sturm: *Ueber Flächen mit einer endlichen Zahl von Geraden* (Math. Ann., Bd. IV, pag. 249—283). — Mais il est étrange que l'on n'ait pas encore pensé à déduire de cette construction par les méthodes de la géométrie de position une théorie synthétique complète de cette espèce de surfaces: il nous semble qu'une telle étude n'aurait pas manqué d'intérêt.

Quadriques inscrites dans la surface. Inversions fondamentales.

13. Le centre de projection P a par rapport aux variétés du faisceau de F_3^2 des espaces polaires qui forment un faisceau dont le soutien est le plan p. Soit f l'une quelconque de ces variétés: l'espace polaire de P par rapport à elle la coupe suivant une quadrique qui coupe Γ suivant la quartique d'intersection de cet espace avec Γ. Dans un point quelconque de cette quartique le plan tangent à la quadrique appartient à l'espace tangent dans le même point à f, espace qui passe par P et dans lequel est aussi le plan tangent dans ce point à Γ: donc ces deux plans sont projetés par P sur R_3 suivant un même plan. C'est-à-dire la projection de cette quadrique est une quadrique touchant la surface à conique double S le long d'une quartique. Cette quadrique et cette quartique passent par les 4 points-pinces de la conique double, puisque dans R_4 l'espace polaire de P par rapport à f passe par le plan p dont les 4 points d'intersection avec Γ ont pour projections ces points-pinces. — Remarquons aussi que cet espace polaire coupe φ en une quadrique qui est projetée sur R_3 suivant une quadrique passant par la quartique considérée et contenant la conique double. Le pôle du plan de celle-ci par rapport à cette quadrique est la projection du pôle de p par rapport à la première quadrique, c'est-à-dire l'intersection de R_3 avec la droite polaire du plan p rapport à φ, car cette droite passe par P et contient ce pôle. Or cette droite ne varie pas si f varie dans le faisceau de F_3^2 et elle coupe R_3 dans le point de rencontre des plans singuliers des 4 points-pinces de S (voir à la fin du n⁰ 3). Donc:

*A la surface S sont inscrites ∞^1 quadriques, qui la touchent le long de ∞^1 quartiques passant par les 4 points-pinces de la conique double, et dont il passe une seule par chaque point de la surface. — Ces quartiques appartiennent à ∞^1 quadriques passant par la conique double et par rapport auxquelles le plan de celle-ci a pour pôle le point de rencontre des plans tangents singuliers dans les 4 points-pinces de la conique double.**)

---

*) Aussi pour cette proposition (dans le cas où la surface S est générale) la première partie est due à Clebsch (loc. cit., pag. 163) et la deuxième à M. Darboux (ouvr. cité, pag. 110). On peut encore établir une autre propriéte des quadriques inscrites dans S due à ce dernier savant. Considérons une quadrique inscrite dans une quelconque de ces ∞^1 quadriques (celle qui correspond à la variété f dans R_4): elle sera projetée par P au moyen d'un cône quadrique (à 3 dimensions) qui touchera f tout le long d'une conique (dont la projection est la conique de contact des deux quadriques de R_3), dont le plan sera en conséquence le plan double d'un couple d'espaces passant par l'intersection de ce cône avec f; donc cette intersection se décomposera en deux quadriques coupant Γ suivant

Cette proposition reste quelle que soit l'espèce de la surface S: cependant si la conique double se décompose en deux droites la dernière remarque devient inutile, car il est bien évident que par rapport aux quadriques passant par ces deux droites le plan de celles-ci a pour pôle leur point d'intersection.

Si pour la variété f on prend successivement les différents cônes du faisceau de F_3^2 on trouve de nouveau, comme quadriques inscrites dans S, les différents cônes de Kummer, dont nous voyons ainsi qu'ils passent par les 4 points-pinces de la conique double et que les points de contact avec la surface S forment sur chacun d'eux une quartique appartenant au système considéré.

On peut se demander avec Clebsch quel est le lieu des points dans lesquels deux coniques de la surface appartenant aux deux séries d'un même couple se touchent: cela équivaut à se demander quel est le lieu des points de contact de S avec les tangentes simples qu'on peut lui mener par le sommet d'un cône de Kummer. Or dans R_4 parmi les génératrices de l'un des cônes du faisceau de F_3^2 celles qui touchent Γ la touchent dans les points dans lesquels elle est coupée par l'espace polaire du sommet du cône relativement à tout le faisceau, c'est-à-dire dans les points d'une quartique. On voit donc que dans la surface S le lieu cherché est aussi une quartique.

14. Considérons encore l'espace polaire du sommet d'un cône du faisceau des F_3^2: cet espace coupe φ suivant une quadrique qui est projetée par P sur R_4 suivant une quadrique passant par la conique double de S et ayant pour pôle du plan de cette conique la projection du sommet considéré; cette quadrique coupe S suivant la quartique jadis considérée et a une autre propriété importante par rapport à S. Un plan quelconque mené par P et par le sommet du cône coupe φ suivant une conique sur laquelle les deux points d'intersection avec l'espace polaire de ce sommet sont conjugués harmoniquement par rapport aux deux couples des points d'intersection avec les deux génératrices du cône contenues dans ce plan. Comme cette conique est projetée sur R_3 suivant une droite passant par le sommet du cône de Kummer correspondant au cône F_3^2 considéré nous avons que:

A chaque cône de Kummer de S correspond une inversion, dans laquelle cette surface S se transforme en soi-même: cette inversion a pour quadrique directrice une quadrique passant par la conique double et ayant pour pôle du plan de celle-ci le sommet du cône de Kummer correspondant et a pour centre d'inversion ce sommet même. Sur chaque

---

deux quartiques. En projetant de nouveau sur R_3 nous avons que: *chaque quadrique inscrite dans l'une quelconque des quadriques inscrites dans la surface S coupe cette surface suivant deux quartiques.*

*droite passant par ce sommet les 4 points d'intersection avec la surface S forment deux couples de points d'une involution dont les points doubles sont les points d'intersection avec cette quadrique.**)

Nous appellerons *inversions fondamentales* pour la surface S les inversions qui la transforment en elle-même. Pour la surface générale, soit que sa conique double soit générale, soit qu'elle se décompose en deux droites, il y a donc 5 inversions fondamentales. Mais dans ce dernier cas le raisonnement même que nous avons tenu nous prouve qu'on a les particularités suivantes:

Si la conique double de S se décompose en deux droites, alors 4 *des inversions fondamentales ont pour quadriques directrices des cônes contenant ces droites (et ayant en conséquence pour sommet leur point d'intersection) et pour centres d'inversion les sommets des* 4 *cônes de Kummer proprement dits (ces centres ayant encore pour plan polaire relativement aux cônes directeurs correspondants le plan de la conique double); tandis que la cinquième inversion fondamentale a pour quadrique directrice une quadrique générale passant par les droites doubles et pour centre d'inversion le point d'intersection de celles-ci (c'est-à-dire un point de la quadrique directrice).*

Représentation de la surface sur un plan.**)

15. Pour avoir une représentation plane univoque de la surface S il suffit évidemment de faire la représentation sur un plan de la surface Γ dont elle est la projection. La méthode que nous exposerons à-présent est générale et sert pour tous les cas: ici nous considérerons avant tout le cas dans lequel Γ soit tout-à-fait générale, de sorte que par sa projection S sur R_3 elle nous donne les surfaces les plus générales du 4e ordre à conique double générale ou décomposée en deux droites.

Cette méthode consiste à projeter Γ par l'une quelconque de ses droites sur un plan R_2. Soit d cette droite: chaque plan passant par

---

*) Si le centre de projection P de Γ se trouve sur l'espace polaire du sommet d'un cône du faisceau, la projection de la quadrique d'intersection de cet espace avec φ se réduit à un plan et la surface S a l'inversion fondamentale correspondante réduite à une homologie harmonique ayant ce plan et son pôle par rapport à la conique double pour plan et pour centre de l'homologie (ce point du plan de la conique double est le sommet d'un cône de Kummer).

**) Tous les résultats que nous trouverons dans ce paragraphe s'accordent parfaitement avec ceux de Clebsch: mais nous les obtenons d'une manière évidemment plus générale (à notre point de vue) et plus simple. Que l'on remarque, par exemple, avec quelle facilité on a la représentation de la conique double et les propriétés de cette représentation sans faire aucun usage de fonctions elliptiques (ce qui se rattache d'ailleurs à la méthode connue pour étudier les cubiques planes, qui consiste à les considérer comme projections de quartiques gauches de 1e espèce).

d coupe deux F_3^2 quelquonques de notre faisceau en deux droites (outre d) qui se coupent en un point de Γ; c'est-à-dire chaque plan par d coupe encore Γ en un point, et il coupe d'ailleurs aussi R_2 en un point. En faisant correspondre entre eux ces deux points nous aurons la représentation plane univoque de Γ et de la surface S. Les 5 droites de Γ qui coupent d seront projetées par autant de plans en 5 points *fondamentaux* de R_2; les autres 10 droites seront projetées par d suivant des droites au moyen d'espaces dont chacun, contenant deux droites de Γ qui ne se coupent pas, contiendra encore 2 autres droites de Γ coupant celles-ci: donc les projections des 10 droites considérées de Γ sont les droites qui joignent deux-à-deux les 5 points fondamentaux de R_2. Quant à la droite d même sa projection sur R_2, ou, pour mieux dire, la projection de l'ensemble de ses points infiniment voisins sur Γ, sera une courbe passant par les 5 points fondamentaux et dont l'ordre est le nombre des points de Γ infiniment voisins à d situés dans un espace passant par d: or comme un tel espace coupe Γ suivant une quartique de 1^e espèce décomposée en cette droite et en une cubique qui la coupe en deux points, il y a dans cette intersection deux de ces points infiniment voisins à d. Donc l'image de d dans R_2 est la conique qui passe par les 5 points fondamentaux. — De même *pour la surface S une droite aura dans le plan R_2 pour image cette conique, les 5 droites qui la coupent auront pour images les 5 points fondamentaux, et les autres 10 droites auront pour images les droites qui joignent ces points fondamentaux deux-à-deux.*

16. Nous avons déjà remarqué que les espaces passant par d coupent Γ suivant les ∞^2 cubiques d'un système. Donc dans notre représentation *aux droites du plan correspondent dans la surface S* (ou Γ) *les ∞^2 cubiques d'un système.*

Un espace quelconque coupe Γ dans une quartique qui rencontre en un point d et chacune des 5 droites appuyées sur d; donc *aux ∞^4 quartiques de* 1^e *espèce de la surface S correspondent sur le plan les ∞^4 cubiques passant par les* 5 *points fondamentaux.* Cela s'accorde avec le fait que l'espace contenant une quartique quelconque de Γ (et cette quartique même en conséquence) coupe chaque cubique en 3 points.

Parmi les espaces de R_4 ceux qui passent par le point P coupent Γ suivant les quartiques qui correspondent aux sections planes de S, et ce système de ∞^3 quartiques sur Γ est tel que par 3 points quelconques de Γ il en passe une bien déterminée; donc *parmi les ∞^4 cubiques de R_2 passant par les* 5 *points fondamentaux il y en a une série linéaire de ∞^3 qui sont les images des sections planes de S.*

Les coniques de Γ sont projetées par d sur R_2 suivant des coniques si elles ne coupent pas d, suivant des droites si elles coupent d.

Or pour l'un quelconque des cônes du faisceau de F_3^2 d forme avec l'une des 5 droites qui la coupent une conique appartenant à un plan générateur du cône: les coniques appartenant aux autres plans générateurs de la même série ne coupent pas ces deux droites, tandis que celles-ci sont coupées par les coniques appartenant aux plans générateurs de l'autre série. En remarquant en outre que ces coniques-ci ne coupent pas les 4 autres droites appuyées sur d, tandis que celles-là les coupent nous concluons que: *à chaque couple de séries de coniques de la surface S correspondent dans R_2 respectivement les coniques passant par 4 des 5 points fondamentaux et les droites passant par le cinquième.*

Ajoutons que si la conique double de S se décompose en deux droites les coniques dans lesquelles S est coupée par les plans qui passent par l'une ou l'autre de ces droites forment l'un des 5 couples de séries de coniques, de sorte qu'aux coniques placées dans les plans qui passent par une droite double correspondent les droites qui passent par un certain parmi les 5 points fondamentaux et aux coniques des plans qui passent par l'autre droite double correspondent dans R_2 les coniques qui passent par les 4 autres points fondamentaux.

Nous avons vu que les cubiques de Γ appartenant au système qui correspond à d ont pour images les droites de R_2. Les cubiques du système, qui correspond à l'une des 5 droites coupant d, ne coupent en aucun point d et coupent en un point les autres 4 de ces 5 droites (n⁰ 8), et sont en conséquence projetées sur R_2 par d suivant des cubiques ayant un point double dans l'un des 5 points fondamentaux et passant par les 4 autres. Enfin les cubiques du système qui correspond à l'une quelconque des autres 10 droites de Γ ne coupent pas les deux droites appuyées sur celle-ci et sur d, mais coupent d et les autres 3 droites appuyées sur d: donc elles sont projetées sur R_2 suivant des coniques passant par 3 points fondamentaux. — On a donc ainsi les images de toutes les cubiques appartenant à Γ, c'est-à-dire de toutes les cubiques appartenant à la surface S.

17. Mais passons à étudier l'image de la conique double de S. Supposons avant tout que cette conique ne se décompose pas. Alors la conique double est, comme nous avons vu, la projection faite par le point P de la quartique k^4 d'intersection de Γ avec l'espace π tangent en P à la variété quadratique φ. Donc en se rappelant ce que nous avons trouvé pour images des quartiques de Γ appartenant à des espaces passant par P dans le plan R_2: *l'image de la conique double de S est une cubique passant par les 5 points fondamentaux et appartenant à la série linéaire des ∞^3 cubiques images des sections planes de S.* — Les couples de points de k^4 qui correspondent aux points de la conique double

(sur deux nappes) sont en ligne droite avec P: si donc P' est le point d'intersection de R_2 avec le plan dP, point qui sera l'image de l'autre point d'intersection avec k^4 de la droite qui joint P au point $d\pi$, nous aurons que: *sur la cubique de R_2 qui est l'image de la conique double de S deux points, qui soient les images d'un même point de cette conique double dans les deux nappes qui y passent, sont en ligne droite avec un point fixe P' de la cubique, point qui est l'image du point d'intersection de la droite correspondant à d avec la conique double mais considéré dans la nappe de S qui ne passe pas par cette droite.*

Deux couples de points de k^4 alignés avec P sont dans un plan passant par P et par lequel passe un faisceau d'espaces coupant Γ suivant un système de quartiques projetées par P suivant des quartiques planes de S et par d suivant des cubiques de R_2. Donc: *deux couples de points de la cubique image de la conique double alignés avec P' forment avec les 5 points fondamentaux un système de 9 points d'intersection d'un faisceau de cubiques appartenant au système linéaire des ∞^3 cubiques images des sections planes de S.*

Aux 4 points d'intersection de k^4 avec p correspondent les 4 points-pinces de la conique double; donc: *les 4 tangentes menées par le point P' à la cubique image de la conique double la touchent dans les 4 points images des points-pinces de la conique double.* Etc. etc.

Supposons maintenant que la conique double se décompose en deux droites d_1, d_2, de manière que, comme nous avons vu, l'un des cinq points fondamentaux, *1*, soit le centre d'un faisceau de droites images des coniques de la surface S situées dans les plans qui passent par l'une d_1 des droites doubles, tandis que les coniques passant par les quatre autres points fondamentaux *2*, *3*, *4*, *5* seront les images des coniques de S situées dans les plans par d_2. Nous avons vu que d_1, d_2 sont les projections par P des deux coniques k_1^2, k_2^2 dans lesquelles se décompose dans ce cas la quartique k^4. Or la droite d de Γ coupe dans nos hypothèses k_2^2 et ne coupe pas k_1^2. Donc la projection de k_2^2 sur R_2 est une certaine droite r_2 passant par le point *1* et la projection de k_1^2 est une conique c_1 par *2, 3, 4, 5*. Les couples de points de k_2^2 ou de k_1^2 alignés avec P ont pour projections sur R_2 des couples de points de r_2 et de c_1 formant deux involutions dont la dernière a le pôle sur r_2, puisque ces involutions ont commun un couple qui correspond aux deux points (alignés avec P) d'intersection de k_1^2 et k_2^2. Donc: *l'image de la droite double d_2 de S est une certaine droite r_2 passant par le point fondamental 1 et celle de la droite double d_1 est une conique c_1 passant par les quatre autres points fondamentaux: à chaque point de d_1 ou de d_2 correspondent deux points conjuguées dans une involution sur c_1 ou sur r_2 et ces deux involutions contiennent le couple des points d'intersection de c_1 et r_2, couple qui correspond au*

point d'intersection des deux droites doubles d_1 et d_2; les points doubles de ces deux involutions sur c_1 et sur r_2 correspondent aux points-pinces de d_1 et de d_2.

18. En supposant que le plan R_2 soit dans l'espace R_3 on voit en projetant la construction, par laquelle nous obtenions la représentation plane de Γ et en conséquence de S, par le point P sur R_3 qu'on peut obtenir cette représentation plane de S sans sortir du R_3 qui la contient en faisant correspondre un point de cette surface S et un point du plan représentatif R_2 lorsque la droite qui les joint coupe la conique double et une droite fixe (la projection de d) de la surface; ou, dans le cas où cette conique se décompose en deux droites, lorsque la droite qui joint ces deux points coupe l'une des deux droites doubles et une droite fixe de la surface qui ne s'appuie pas sur cette droite double*). Cependant il y a des cas particuliers de nos surfaces dans lesquels cette méthode n'est plus applicable (par exemple pour la représentation de la surface de Steiner), tandis que notre méthode s'applique toujours.

Cyclides et leurs séries homofocales. Sphères directrices et quadriques déférentes**).

19. Supposons que la variété φ qui passe par le centre de projection P ne soit pas un cône, c'est-à-dire que la conique double de la surface S ne se décompose pas en deux droites. Alors dans l'espace R_3 nous prendrons cette conique pour *absolu euclidien*, et nous appellerons *cyclide* cette surface S, *sphère* chaque quadrique passant par cette conique, *plan à l'infini* le plan de celle-ci, etc. etc. Nous pourrons alors énoncer plus simplement plusieurs des résultats obtenus. Ainsi la cyclide S contiendra en général 5 couples de séries conjuguées de cercles, et à chaque couple correspondra un système de ∞^2 sphères doublement tangentes à la surface et coupant celle-ci suivant deux cercles. Il y aura ∞^1 quadriques inscrites dans S, parmi lesquelles les 5 cônes de Kummer, et toutes ces surfaces seront homocycliques, car elles couperont l'absolu dans ses 4 points-pinces relatifs à S: les quartiques de contact de ces ∞^1 quadriques avec S appartiendront resp. à ∞^1 sphères ayant pour centre commun le point de rencontre

*) V. Clebsch: *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen*, Math. Ann. I, pag. 256.

**) Presque tous les résultats que l'on trouvera dans ce paragraphe étaient déjà contenus dans les travaux cités, et réunis surtout dans l'ouvrage de M. Darboux et dans le mémoire de M. Casey. Mais on verra encore ici la bonté de notre méthode, qui nous fera retrouver en peu de pages presque toute la théorie exposée dans ces travaux.

des plans tangents singuliers de ces points-pinces. Il y aura en général 5 inversions ordinaires par rapport auxquelles la cyclide correspond à soi-même et les centres (des sphères directrices) de ces inversions seront les sommets des 5 cônes de Kummer. Etc., etc.

Les sphères de R_3 pourront être considérées comme les projections faites par P des sections de φ déterminées par les espaces de R_4. Le centre d'une sphère est la projection du pôle de l'espace correspondant par rapport à φ. Deux sphères sont *orthogonales*, c'est-à-dire conjuguées harmoniquement relativement aux deux sphères nulles (cônes) de leur faisceau, lorsque les deux espaces correspondants seront conjugués par rapport à φ, c'est-à-dire lorsque l'un de ces espaces contiendra le pôle de l'autre.

Or les sommets des cônes quadriques passant par Γ sont conjugués deux-à-deux par rapport à φ, de sorte que l'espace polaire de chacun d'eux passe par tous les autres; d'ailleurs cet espace coupe φ en une quadrique dont la projection est (n^0 14) une *sphère directrice* de la cyclide S (c'est-à-dire d'une inversion fondamentale pour S). Donc: *Les sphères directrices de S sont deux-à-deux orthogonales entre elles.*

De plus les sphères doublement tangentes d'un système étant la projection des intersections de φ avec les espaces passant par le sommet de l'un de ces cônes et tangents à ce cône, espaces qui seront en conséquence conjugués à l'espace polaire de ce sommet par rapport à φ, nous avons que: *les ∞^2 sphères doublement tangentes à la cyclide appartenant à un même système sont orthogonales à la sphère directrice correspondante.*

Les lieu des pôles de ces espaces tangents au cône par rapport à φ est une quadrique (la quadrique polaire du cône par rapport à φ), dont la projection est le lieu des centres des sphères considérées. Donc: *Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à la cyclide appartenant à un même système est une quadrique.* On a ainsi pour la cyclide générale 5 quadriques qu'on appelle *déférentes;* en d'autres termes: *La cyclide générale peut être considérée de 5 manières diverses comme l'enveloppe des ∞^2 sphères orthogonales à une sphère fixe (directrice) et ayant les centres sur une quadrique fixe (déférente).*

20. Passons maintenant aux *cyclides homofocales.* Si l'on prend les variétés polaires des $F_3{}^2$ d'un faisceau contenant φ par rapport à φ même on aura un *système* de ∞^1 $F_3{}^2$ ayant pour espaces tangents communs une série d'espaces doublement infinie et de la 4^e classe, que nous indiquerons par Δ et qui se compose des espaces tangents à φ dans les points de la base du faisceau. Toutes les propriétés de ce système de $F_3{}^2$ s'obtiennent de celles connues du faisceau. Ainsi le lieu des pôles d'un espace quelconque par rapport à ce système de

variétés est une droite. Il y a en général dans le système une seule variété qui touche un espace donné, mais 4 qui passent par un point donné. Il y a dans le cas le plus général 5 variétés du système se réduisant comme lieux de points à 5 espaces doubles et comme enveloppes d'espaces tangents à 5 quadriques situées dans ces espaces (corrélatif aux 5 cônes de 1e espèce d'un faisceau général); cependant il peut arriver que quelques-unes de ces variétés coincident, ou bien qu'il y ait aussi une ou deux coniques dans le système (corrélatif aux cônes de 2e espèce qui peuvent se présenter dans un faisceau). Etc.

Les variétés du système coupent φ en ∞^1 surfaces $F_2^{2\cdot 2}$, parmi lesquelles est la base du faisceau de F_3^2 dont ce système est le système polaire*). Ces surfaces sont projetées par P sur R_3 suivant un système de cyclides dont nous allons étudier les propriétés. Chacun des ∞^2 espaces de Δ touche les variétés du système (parmi lesquelles il y a φ) dans les points d'une droite et les ∞^2 droites que l'on a ainsi forment une *variété développable* (circonscrite au système des variétés quadratiques) que nous indiquerons aussi par Δ. On reconnait immédiatement (par exemple au moyen du principe de correspondance sur une droite quelconque de R_4) que cette variété est dans le cas le plus général de l'ordre 12 et on voit en outre qu'elle touche chacune des variétés quadratiques du système, par exemple φ, suivant la $F_2^{2\cdot 2}$ d'intersection avec la variété infiniment voisine dans le système, et la coupe en outre suivant une surface qui dans le cas le plus général est de l'ordre $2 \cdot 12 - 2 \cdot 4 = 16$ et qui se compose évidemment de ∞^1 droites. Considérons l'une quelconque de ces droites: elle est le lieu des points de contact des variétés du système avec un certain espace; donc la surface d'intersection de φ avec la variété qui a un point quelconque de cette droite pour point de contact a pour plan tangent en ce point le plan d'intersection de l'espace tangent en ce point à φ avec l'espace considéré (tangent dans le même point à cette variété), espace qui est tangent à φ, comme nous l'avons dit, en un autre point de cette droite: ce plan est donc le plan tangent à φ tout le long de cette droite. Donc pour chacune des ∞^1 droites d'intersection de la variété Δ avec φ il y a un même plan tangent aux surfaces d'inter-

*) Voir à ce propos le dernier paragraphe de notre mémoire cité au n° 1, où nous avons étudié un système analogue de $\infty' F_{n-2}^{2.2}$ sur une F_{n-1}^2 du R_n. La demonstration directe du fait qu'un tel système peut être obtenu de ∞^1 manières différentes comme l'intersection de cette F_{n-1}^2 avec le système des F_{n-1}^2 polaires par rapport à elle de celles d'un faisceau ayant pour base l'une quelconque de ces $F_{n-2}^{2.2}$ a été donnée plus tard pour l'espace ordinaire dans notre note *Su una trasformazione irrazionale dello spazio* (Giornale di matematiche, vol. XXI) par une méthode qui s'étend immédiatement au cas de n quelconque.

section de φ avec les variétés du système dans les points de contact de ces surfaces avec cette droite. Mais les plans qui touchent φ le long d'une droite sont projetés par P sur R_3 suivant des plans tangents à l'absolu, car un tel plan coupe l'espace π suivant une droite tangente au cône $\pi\varphi$ dans le point dans lequel la droite de contact coupe π. Donc nous concluons que le système des cyclides qui sont les projections des intersections de φ avec le système considéré de variétés quadratiques est un système de surfaces *homofocales*, c'est-a-dire inscrites dans une même développable avec l'absolu: chaque plan de cette développable touche l'absolu et le système des cyclides dans les points d'une droite. Dans le cas le plus général l'ordre de la surface lieu de ces droites (projection de la série de ∞^1 droites d'intersection de φ avec la variété Δ), c'est-à-dire l'ordre de la développable *focale*, est 16.

Dans R_4 la surface réglée d'intersection de φ avec la variété Δ touche l'une quelconque des variétés quadratiques du système dans les points qu'elle a communs avec la variété du système qui lui est infiniment voisine et avec φ, points qui forment une courbe de l'ordre 8, et ne peut encore couper la variété même que dans des droites, dont le nombre sera en général $2 \cdot 16 - 2 \cdot 8 = 16$. Donc *la développable focale circonscrite à un système de cyclides homofocales coupe chacune de celles-ci dans ses* 16 *droites, c'est-à-dire elle est le lieu des droites contenues dans ces cyclides.*

21. La variété développable Δ circonscrite au systeme des F_3^2 a les quadriques appartenant à ce système pour quadriques *doubles*, c'est-à-dire par chaque point d'une telle quadrique passent deux génératrices de cette variété; car par le plan tangent en ce point à la quadrique passent deux espaces tangents à une autre variété du système et en conséquence à toutes. Si par exception il y a parmi les F_3^2 du système une qui se réduise comme enveloppe d'espaces à une conique, alors celle-ci est aussi *double* pour Δ, mais dans cet autre sens que par chacun de ses points passent ∞^1 génératrices de Δ, lesquelles forment un cône quadrique ordinaire (comme on voit de la même manière). Chaque quadrique double coupe la variété φ suivant une quartique dont la projection sur R_3 sera une quartique située sur une sphère directrice et double pour la développable focale du système de cyclides, c'est-à-dire une courbe dans chaque point de laquelle se croisent deux génératrices de cette développable: nous l'appellerons *quartique focale* des différentes cyclides. S'il y a aussi dans la variété développable une conique double, elle coupera φ suivant 4 points (dont quelques-uns peuvent coincider et) dont les projections sur R_3 seront 4 points d'un cercle (*directeur*) tels que par chacun d'eux passent ∞^1 génératrices de la développable focale formant

le cône quadrique qui par ce cône projette l'absolu, c'est-à-dire la développable se décomposera en 4 cônes quadriques et en une autre développable; nous appellerons ces 4 points *foyers* des différentes cyclides*). — Dans le cas le plus général une cyclide (et toutes celles du système homofocal qui la contient) a 5 quartiques focales et n'a pas de foyers: cependant il y a, comme nous verrons, des cyclides particulières pour lesquelles ces quartiques focales coincident ou pour lesquelles il y a un ou deux quaternes de foyers.

Les quadriques appartenant à notre système de F_3^2 (doubles pour Δ) sont les surfaces polaires des cônes quadriques passant par l'une (quelconque) de nos $F_2^{2\cdot 2}$, et ont en conséquence pour projections les quadriques déférentes de la cyclide projection de celle-ci (n⁰ 19). Donc en se rappelant en outre ce que nous avons vu jadis et au commencement du n⁰ 20 on a que:

Toutes les cyclides d'un système homofocal ont les mêmes sphères directrices, formant elles-mêmes (comptées deux fois) des cyclides du système: chaque quartique focale est l'intersection de l'une de ces sphères avec les quadriques déférentes correspondantes pour les cyclides du système, de sorte que toutes ces quadriques déférentes forment un faisceau.

22. Les quadriques polaires des cônes quadriques passant par Γ appartiennent, comme nous avons vu, à un système de variétés quadratiques inscrites dans la même variété développable Δ avec φ, c'est-à-dire dans la variété enveloppée par les espaces tangents à φ dans les points de Γ: par le point P passe une série de la 4e classe de ∞^1 de ces espaces et les espaces qui la composent sont tangents à toutes les variétés de ce système et en conséquence aussi aux quadriques, touchent φ dans les points d'intersection de Γ avec l'espace π et ils touchent en conséquence la quartique k^4. Or comme les projections de ces quadriques polaires faites par P sont les quadriques déférentes de la cyclide projection de Γ nous aurons que: *les quadriques déférentes d'une même cyclide sont homofocales, étant inscrites dans une même développable avec l'absolu, c'est-à-dire dans le développable des plans tangents à la cyclide dans les points de l'absolu***).

On peut aussi établir une autre propriété des quadriques déférentes. Dans R_4 sur l'espace polaire du sommet de l'un des cônes passant par Γ

*) *Foyer* sera donc pour nous un point tel que la sphère nulle dont il est le centre soit tangente à la surface le long d'une courbe; tandis que M. Darboux et d'autres savants appellent *foyer* le centre d'une sphère nulle ayant seulement deux points de contact avec la surface, c'est-à-dire un point quelconque des *courbes focales* de la surface.

**) En conséquence les coniques focales communes aux quadriques déférentes sont des courbes focales *singulières* ou *doubles* pour la cyclide. (V. Casey, loc. cit., pag. 635; et Darboux, loc. cit., pag. 152).

sont les sommets des autres 4 cônes, lesquels sont conjugués deux-à-deux par rapport à toutes les variétés du faisceau, et en conséquence aussi par rapport à φ, c'est-à-dire à l'intersection de φ avec cet espace, et par rapport au premier cône et à sa quadrique polaire relativement à φ. Donc en projetant sur R_3: *Les centres de 4 quelconques des sphères directrices d'une cyclide générale forment un tétraèdre conjugué par rapport à la cinquième sphère directrice et à sa quadrique déférente.* — On voit bien quelles modifications on devra apporter à ce théorème lorsque la cyclide n'est plus générale, de sorte qu'il n'y a plus 5 sphères directrices (et quadriques déférentes) distinctes. Ce même théorème résulterait d'ailleurs aussi du fait que ces 4 centres de sphères directrices sont les sommets des cônes quadriques passant par la quartique intersection de la cinquième sphère et de sa quadrique déférente, puisqu'une inversion déterminée par l'une des 4 premières sphères doit changer en elle-même cette quartique focale*).

---

*) Pour montrer encore par un exemple comment notre méthode nous permet de résoudre toutes les questions que l'on peut poser sur les cyclides proposons-nous de déterminer le lieu des centres des sphères qui coupent la cyclide projection de la surface Γ de φ, non pas en une quartique quelconque (outre l'absolu) mais en une conique sphérique. L'espace τ coupant φ dans une quadrique dont la projection soit une telle sphère devra être tel que la projection du sommet de l'un des cônes quadriques ordinaires qui passent par la quartique $\Gamma\tau$, c'est-à-dire de l'un T des (4) points de contact de τ avec une variété du faisceau (Γ), soit le centre de cette sphère, c'est-à-dire coïncide avec la projection du pôle T' de τ par rapport à φ: en d'autres termes il faut que les trois points PTT' soient en ligne droite. Donc les espaces polaires de ces 3 points par rapport à φ appartiendront à un faisceau, c'est-à-dire l'espace polaire de T par rapport à φ passe par le plan $\pi\tau$. Or l'espace polaire (tangent) de T par rapport à une autre variété du faisceau (Γ) est par hypothèse τ, donc π est aussi l'espace polaire de T par rapport à une variété de ce faisceau, de sorte que T est un point de la courbe quartique normale qui est le lieu des pôles de l'espace π par rapport à toutes les variétés du faisceau et dont la projection sur R_3 est une cubique gauche dont nous avons déjà vu plusieurs propriétés (v. n° 6). Donc en se rappelant aussi ces propriétés nous voyons que: *le lieu des centres des sphères coupant la cyclide suivant des coniques sphériques est une cubique gauche qui passe par les centres des sphères directrices, par le centre et par les points à l'infini des axes des quadriques déférentes,* etc. (V. Darboux, loc. cit. pag. 168, ou bien le *Mémoire sur les surfaces cyclides* déjà cité, pag. 281).

Nous pouvons aussi trouver une propriété remarquable et que nous croyons nouvelle, commune aux cordes de cette cubique. Nous avons vu en effet au n° 6 que ces cordes sont les intersections de R_3 avec les plans polaires (par rapport à Γ) des points du plan polaire de P. Que l'on considère l'un quelconque de ces points et son plan polaire: l'espace qui les joint coupera Γ suivant une quartique par rapport à laquelle ce point et ce plan sont pôle et polaire. Donc la projection de cette quartique par P, qui est un point de ce plan, sera une quartique plane homologique harmonique par rapport à la projection du pôle et

23. Revenons à notre système de variétés quadratiques inscrites dans la même variété développable. Par chaque point de R_4 il en passe en général 4 dont les espaces tangents en ce point sont conjugués par rapport à toutes les variétés du système. En particulier donc par un point de φ il passe 3 de $F_2^{2\cdot 2}$ d'intersection de φ avec les variétés du système et leurs plans tangents, qui appartiennent à l'espace tangent en ce point à φ, seront conjugués par rapport à φ, c'est-à-dire au cône quadrique d'intersection de cet espace avec φ. Donc en projetant sur R_3: *Par chaque point de l'espace il passe 3 cyclides d'un système homofocal et leurs plans tangents en ce point sont deux-à-deux orthogonaux.*

De là il suivrait, à cause du théorème de Dupin, que *chaque cyclide d'un système homofocal est coupée par les autres suivant ses lignes de courbure.* Mais nous n'avons pas même besoin de recourir à ce théorème pour prouver cette proposition. Car, si f, f', f'' sont les autres variétés quadratiques du système qui dans R_4 passent par un point de φ, il suit de ce que nous avons dit que le plan tangent en ce point à la surface $f\varphi$ est coupé par les plans tangents au même point aux surfaces $f'\varphi$, $f''\varphi$ en deux droites conjuguées par rapport à f et à φ, et en conséquence aussi par rapport aux autres variétés quadratiques du faisceau. Les projections de ces deux droites seront (comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer au n° 11) deux droites tangentes en un point à la cyclide projection de $f\varphi$ et conjuguées harmoniques soit par rapport aux tangentes principales, soit par rapport aux tangentes qui coupent l'absolu, c'est-à-dire orthogonales. Donc ces deux droites seront les tangentes aux deux lignes de courbure de cette cyclide qui passent par ce point. Mais elles sont aussi les tangentes en ce point aux deux courbes d'intersection de cette cyclide avec les deux cyclides homofocales qui y passent (projections de $f'\varphi$, $f''\varphi$): donc notre proposition est prouvée. — En particulier chaque cyclide du système est coupée suivant une ligne de courbure par toutes les sphères directrices.

Remarquons pour finir que par le centre de projection P passeront aussi en général trois des $F_2^{2\cdot 2}$ d'intersection de φ avec les variétés du système. Les projections de ces trois $F_2^{2\cdot 2}$ sur R_3 seront des

---

à la droite d'intersection de R_3 avec le plan polaire comme centre et axe d'homologie. Ou en d'autres termes: *il y a sur chaque cyclide ∞^2 sections planes symétriques par rapport à un axe, et les ∞^2 axes de symétrie que l'on obtient ainsi sont les cordes de notre cubique.* (Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'y a pas d'autres sections planes symétriques et que celles-ci sont produites par des plans, enveloppant en général une surface de la 12e classe et appartenant à un complexe de 12e dégré de sphères coupant la cyclide suivant des courbes ayant un plan de symétrie).

cyclides cubiques*). Comme les cônes quadratiques passant par l'une de ces $F_2^{2 \cdot 2}$, et en conséquence par P, ont leurs quadriques polaires

*) De ces espèces de cyclides, c'est-à-dire en général des surfaces du 4e ordre à conique double décomposées en surfaces cubiques avec le plan de celle-ci nous ne nous occuperons jamais, pour plus de brièveté. Nous supposerons donc toujours que le centre de projection des $F_2^{2 \cdot 2}$ que nous considérons ne soit pas sur celles-ci.

Cependant la méthode d'étudier les surfaces cubiques qui consisterait à les considérer comme projections sur R_3 des $F_2^{2 \cdot 2}$ de R_4 faites par un point de celles-ci présenterait plusieurs avantages dignes de remarque. Ainsi la représentation plane, que nous avons donnée aux nos 15 et suiv., de la $F_2^{2 \cdot 2}$ générale donnerait immédiatement la représentation plane connue, à six points fondamentaux, de la surface cubique. La classification que nous ferons des $F_2^{2 \cdot 2}$ donnerait immédiatement, en prenant le centre de projection en des positions différentes sur ces surfaces, la classification *complète* des surfaces cubiques; par exemple pour la $F_2^{2 \cdot 2}$ générale, suivant qu'on prendrait le centre de projection dans l'un quelconque de ses points, ou bien sur l'une de ses droites, ou sur un point commun à deux de ses droites, on obtiendrait pour projection la surface cubique générale ou bien celles à un ou à deux points coniques (espèces I, II et IV dans la classification de M. Schläfli). L'étude, que nous avons faite dans le cas général et que nous ferons dans les cas particuliers, de la disposition des droites contenues dans la $F_2^{2 \cdot 2}$ nous donnerait la disposition des droites contenues dans les différentes surfaces cubiques. Notre méthode serait féconde particulièrement dans ces propriétés des surfaces cubiques qui ont égard à une droite déterminée de la surfaces. Nous donnerons quelques exemples de telles propriétés déduites de cette manière, en nous bornant cependant aux surfaces cubiques générales.

Soit donc Γ la $F_2^{2 \cdot 2}$ générale et S la surface cubique générale qui en est la projection, faite par un point quelconque P de Γ. Il est clair qu'outre les projections des 16 droites de Γ, S ne contiendra d'autres droites que l'intersection d du plan p tangent en P à Γ avec R_3 et les intersections de R_3 avec les 5 couples de plans générateurs passant par P des ϱ cônes du faisceau (Γ). La surface S a donc $16 + 1 + 10 = 27$ droites. De plus les 10 dernières (projections des coniques de Γ placées dans ces 10 plans générateurs) se trouvent par couples dans 5 plans passant par d, c'est-à-dire dans les plans d'intersection de R_3 avec les espaces tangents en P aux 5 cônes nommés, car ces espaces (qui passent tous par p) contiennent justement les 5 couples de plans générateurs de ces cônes qui passent par P. Les sommets M_i de ces cônes auront pour projections les 5 points C_i d'intersection des 5 couples de droites de S situées dans des plans passant par d: or ces 5 points C_i jouissent par rapport à la surface cubique S de propriétés très-remarquable, qui se déduisent facilement de celles des points M_i. Un espace quelconque passant par p coupe Γ en une quartique ayant un point double en P et projetée suivant une conique d'intersection de S avec un plan quelconque passant par d. Le cône ordinaire projetant cette quartique par P est l'intersection de l'espace considéré avec l'une des variétés du faisceau (Γ). Or les 5 points M_i forment un système polaire de soi-même par rapport à chacune de ces variétés: donc l'espace considéré est coupé par la droite $M_i M_k$ et par le plan $M_l M_m M_n$ (où $iklmn$ sont les 5 indices différents dans un ordre quelconque) en un point et une droite qui sont conjugués par rapport au dit cône quadrique ordinaire. En projetant: *Les 5 points C_i de la surface cubique S sont tels que dans chaque plan passant par la droite d les intersections avec la droite joignant deux*

par rapport à φ tangentes à π, les projections de celles-ci sur R_3 seront tangentes au plan à l'infini, c'est-à-dire: *Dans un système de cyclides homofocales il y a en général 3 cyclides cubiques. Les quadriques déférentes d'une cyclide cubique sont toutes des paraboloïdes.* Etc., etc.

Classification des surfaces du 4e ordre à conique double.

24. Une $F_2^{2\cdot 2}$ quelconque de R_4 a une *caractéristique* qui en donne les particularités projectives les plus importantes et qui se compose des dégrés des diviseurs élémentaires du déterminant d'une F_3^2 indéterminée du faisceau des variétés quadratiques passant par cette surface (en supposant avant tout que ce déterminant ne soit pas identiquement nul). Ces diviseurs élémentaires correspondent aux cônes de ce faisceau; la somme de leurs dégrés est égale à 5. A un cône de 1e espèce correspond un seul diviseur élémentaire et en conséquence un seul dégré de la caractéristique, tandis qu'à un cône de 2e espèce correspondent deux diviseurs élémentaires et deux dégrés que nous mettrons entre crochets*). En projetant cette $F_2^{2\cdot 2}$ sur R_3 par un point P on obtient une surface du 4e ordre à conique double, à laquelle nous donnerons la même caractéristique: seulement si la variété φ du faisceau qui passe par P est un cône du 1e ou de 2e espèce

---

quelconques de ces points et avec le plan joignant les trois autres sont pôle et polaire par rapport à la conique d'intersection avec S. Cette proposition est due, comme l'on sait, à M. Picquet (Voir aussi Sturm: *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung*, Crelle's Journal, 88).

L'espace passant par $M_k M_l M_m M_n$ coupe Γ en une quartique, située dans des cônes ayant ces points pour sommets, et le long de laquelle Γ est touchée par des tangentes passant par M_i. Donc: *Les cônes circonscrits à la surface cubique par les 5 points C_i la touchent respectivement le long de 5 quartiques c_i^4 dont chacune appartient à des cônes quadriques ayant les sommets dans les 4 points non correspondants parmi les 5 C_i.* — Un espace quelconque est coupé par les 5 espaces joignant quatre-à-quatre les 5 points M_i suivant 5 plans qui déterminent un pentaèdre *conjugué* par rapport à chacune des quadriques d'intersection de ce premier espace avec l'une quelconque des variétés du faisceau (Γ) (en entendant par pentaèdre *conjugué* par rapport à une quadrique un pentaèdre tel que chacun des 10 sommets ait le plan polaire par rapport à celle-ci passant par l'arête opposée). De là on a en projetant sur R_3: *Une quelconque des ∞^4 quartiques (de 1 espèce) de la surface cubique S qui correspondent à la droite d (c'est-à-dire qui ne la coupent pas) coupe les 5 quartiques particulières c_i^4 en 5 quaternes de points situés respectivement en 5 plans qui déterminent un pentaèdre conjugué par rapport à toutes les quadriques passant par la quartique considérée. (En variant cette quartique ce pentaèdre change aussi, mais ses 10 sommets sont toujours sur les 10 droites $C_i C_k$).* — Cette proposition remarquable parait être nouvelle.

*) Nous exclurons toujours de notre considération les cas dans lesquels la surface du 4e ordre se décompose en deux quadriques; en conséquence dans le faisceau des F_3^2 il ne pourra pas y avoir de couple d'espaces.

nous mettrons une barre horizontale au-dessus du dégré ou du couple de dégrés qui correspond à ce cône dans la caractéristique*). De cette manière, p. e., la caractéristique [11111] appartiendra à la surface à conique double la plus générale, et [$\bar{1}$1111] à la surface générale parmi celles dont la conique double se décompose en deux droites. Chaque espèce de $F_2^{2\cdot 2}$ nous donne différentes espèces de nos surfaces à conique double suivant la position que l'on donne au centre P de projection, et en particulier suivant que la variété φ passant par P n'est pas un cône, ou bien est tel ou tel autre des cônes du faisceau. Une surface quelconque ne change pas d'espèce lorsqu'on la transforme par une inversion, dont la quadrique directrice est coupée suivant la conique double de la surface donnée par le plan polaire du centre de l'inversion par rapport à elle (car une $F_2^{2\cdot 2}$ ne change pas d'espèce par une homologie harmonique).

25. Si φ n'est pas un cône, la projection de la $F_2^{2\cdot 2}$ par P peut être considérée comme une cyclide et on peut parler de ses focales, de ses foyers et de son système homofocal. On voit immédiatement que les cyclides d'un système homofocal ont la même caractéristique. Quant aux quartiques focales et aux foyers, comme chaque quartique est l'intersection d'un faisceau de quadriques, parmi lesquelles il y a la sphère directrice correspondante (et sa quadrique déférente), et comme chaque quaterne de foyers est l'intersection d'un faisceau de coniques, parmi lesquelles il y a le *cercle directeur* correspondant (et sa *conique déférente,* V. n° 64), on peut donner soit à la quartique, soit au quaterne de foyers, une caractéristique dont le sens est tout-à-fait analogue à celui déjà expliqué de la caractéristique d'une $F_2^{2\cdot 2}$ et que l'on sait déjà interpréter géométriquement**). Dans cette caractéristique, dans laquelle la somme des dégrés est resp. 4 ou 3, nous mettrons une barre sur le dégré ou couple de dégrés qui correspond à la sphère directrice ou au cercle directeur (si la sphère dégénère en un cône, ou le cercle en un couple de droites). Cela posé l'on a le théorème suivant que nous ne nous arrêterons pas à démontrer, car il est contenu dans un théorème plus général relatif à un espace à n dimensions, que nous avons donné ailleurs***).

---

*) Avec cette notation les surfaces étudiées par Korndörfer (ayant égard surtout à leur représentation plane) sont les suivantes: [2111], [221], [(11)111] [(11)21], [(11)(11)1]; [$\bar{1}$1111], [$\bar{1}$211], [$\bar{1}$22], [$\bar{1}$(11)11], [$\bar{1}$(11)2], [$\bar{1}$(11)(11)]; [($\overline{11}$)111], [($\overline{11}$)21], [($\overline{11}$)(11)1].

**) Voir par exemple la 3e édition de l'*Analytische Geometrie des Raumes* de Hesse, pag. 518 (note de M. Gundelfinger).

***) V. le n° 160 du mémoire cité dans la note à la pag. 322.

La caractéristique d'une quartique focale d'une cyclide s'obtient de la caractéristique de celle-ci en y diminuant d'une unité et en barrant le dégré qui correspond à la sphère directrice contenant cette quartique. — La caractéristique d'un quaterne de foyers d'une cyclide s'obtient de la caractéristique de celle-ci en y diminuant d'une unité chacun des deux dégrés du couple qui correspond au cercle directeur contenant ce quaterne. — Dans la caractéristique de la quartique focale ou du quaterne de foyers les dégrés non barrés correspondent à des cônes quadriques ou resp. couples de droites (contenant cette quartique ou ce quaterne de foyers) ayant leurs sommets précisément dans les centres des sphères directrices qui correspondaient à ces mêmes dégrés dans la caractéristique de la cyclide.

26. Nous commencerons par considérer tous les cas dans lesquels par la $F_2^{2\cdot 2}$ Γ il ne passe aucun cône quadrique de 2e espèce, c'est-à-dire dans les caractéristiques il n'y a aucun couple de dégrés, mais seulement des dégrés isolés. Quant à la signification de ces dégrés contenus dans la caractéristique nous nous appuierons sur des propositions établies ailleurs pour les $F_{n-2}^{2\cdot 2}$ du R_n*). Un dégré différent de 1 correspond à un point double M de Γ, qui est le sommet du cône f du faisceau qui correspond à ce dégré. Ce point double de la surface Γ a un cône quadrique ordinaire tangent, qui est l'intersection de f avec l'espace tangent commun en ce point à toutes les variétés du faisceau. Si le dégré dont il s'agit est 2, ce cône tangent est général, mais s'il est > 2 alors ce cône se décompose en deux plans, car f devient aussi tangent à cet espace: le point double M de Γ devient *biplanaire*. Si le dégré est 3, il n'y a pas d'autres particularités, mais s'il est 4, alors la droite d'intersection de ces deux plans vient appartenir à Γ, et s'il est 5 il se présente en outre le fait que l'un de ces deux plans est tangent à φ, et en conséquence à Γ, tout le long de cette droite d'intersection des deux plans. — Pour les projections S de Γ sur R_3 on a ainsi immédiatement les différents cas, car le cône quadrique tangent à Γ en un point double a pour projection le cône tangent dans le point double correspondant de S.

Remarquons aussi que par un tel point double de Γ passent en général 4 droites de Γ (distinctes ou non) car l'espace tangent en ce point aux variétés du faisceau coupe celles-ci en un faisceau de cônes quadriques ordinaires ayant ce point pour sommet (et parmi lesquels il y a le cône tangent à Γ dans ce point): les 4 génératrices communes à ces cônes sont justement les 4 droites de Γ passant par ce

*) V. le § 3 de la 2e Partie du mémoire cité dans la seconde note au no 1.

point double. — En projetant sur R_3 on voit qu'aussi par un point double de S passent 4 droites (distinctes ou coincidentes) de cette surface.

On peut demander si (outre ces 4 droites) il passe par le point double de S des droites ayant un contact quadriponctuel dans ce point avec la surface. Cela équivaut à demander si dans R_4 par la droite qui joint P au sommet M de f il passe des plans dont les 4 points d'intersection avec Γ coincident en M. Un plan passant par P et par une génératrice du cône quadrique tangent en M à Γ coupe f en cette génératrice et une autre droite qui rencontre φ dans le quatrième point d'intersection de ce plan avec Γ (les autres 3 coincidant en M): pour que ce point coincide aussi avec M il faut donc que cette seconde génératrice de f coincide avec la première, c'est-à-dire que le plan touche f le long de cette génératrice. L'espace polaire de P par rapport à f coupe donc le cône tangent à Γ dans les deux seules génératrices dont les plans tangents à f satisfassent aux conditions imposées. Il y a donc en général deux tangentes quadriponctuelles, qu'on construit de la manière dite. — En se rappelant en outre que le cône de Kummer ayant la projection de M pour sommet est la projection du cône d'intersection de f avec l'espace polaire de P par rapport à f même, on voit immédiatement que: *le point double de S a un cône tangent qui est touché par le cône de Kummer dont ce point est le sommet le long de deux droites qui sont des tangentes quadriponctuelles à S en ce point.*

Lorsqu'il y a dans la surface S deux points doubles correspondants à deux dégrés (ou groupes de dégrés) de la caractéristique, la droite qui les joint appartient à la surface, car la même chose arrive dans la surface Γ pour les deux points doubles dont ceux-là sont les projections (puisqu'ils sont conjugués par rapport à toutes les F_3^2 du faisceau et sont en conséquence joints par une droite appartenant à toutes ces variétés). En outre il y a le long de cette droite de S, ou de la droite correspondante de Γ, un plan tangent fixe: en effet les deux espaces qui touchent dans les deux points doubles considérés de Γ toutes les F_3^2 du faisceau se coupent en un plan tangent le long de la droite joignant ces points à chacune de ces variétés et en conséquence aussi à Γ.

27. Ce que nous avons trouvé dans le n° précédent a lieu quelle que soit la variété φ qui passe par P, et doit être modifié seulement si celle-ci est précisément le cône f correspondant à un dégré > 1 de la caractéristique et ayant en conséquence pour sommet un point double M de Γ. Dans ce cas la projection de ce point M sera le point de rencontre D des deux droites doubles de S, et ce point sera maintenant triple pour S, car un plan passant par P et par M coupe

le cône φ en deux droites dont une seule mobile, qui contient outre M un seul autre point de Γ; ce point mobile coincidant aussi avec M si cette droite mobile appartient au cône tangent en M à Γ: en conséquence dans R_3 chaque droite passant par le point D coupe S trois fois en ce point et une seule fois ailleurs. Nous voyons en outre que *le cône cubique tangent à S dans le point triple D (cône des tangentes quadriponctuelles) se décompose dans le plan des deux droites doubles* (v. n⁰ 4) *et un cône quadrique contenant les deux droites doubles et les 4 droites simples de S qui passent par D;* ce cône quadrique est la projection du cône quadrique tangent en M à Γ.

28. Si l'on fait abstraction des points de la conique double, il est clair que chaque point double de la surface S, projection quelconque de Γ, doit être la projection d'un point double de Γ. D'ailleurs chaque point double de Γ est le sommet d'un cône de 1e espèce du faisceau des F_3^2 passant par Γ, ou bien un point de l'arête d'un cône de 2e espèce de ce faisceau; car le cône qui projette Γ par un point double n'a dans chaque plan passant par ce point que deux génératrices, c'est-à-dire il est un cône quadrique (du faisceau), de 1e ou de 2e espèce.

Nous allons appliquer tout-de-suite cette proposition. Mais comme nous aurons à considérer souvent dorénavant les transformées de nos surfaces du 4e ordre par des inversions ayant toujours des quadriques directrices passant par la conique double (générale ou décomposée) de celles-ci et par rapport auxquelles le centre de l'inversion est le pôle du plan de cette conique, nous entendrons toujours que les inversions pour lesquelles nous ne dirons pas le contraire satisfassent à cette condition. Cela posé, considérons une $F_2^{2 \cdot 2}$ quelconque Γ sur la variété quadratique φ et supposons seulement qu'elle ne soit pas de l'espèce la plus générale, c'est-à-dire qu'elle ait un point double M. En projetant Γ par un point P de φ sur R_3 nous avons une surface du 4e ordre à conique double S, laquelle aura en outre un point double D, projection de M. Quel effet a sur S une inversion ayant D pour centre? Comme nous avons vu (n⁰ 14) cela équivaut à trouver la surface correspondant à Γ dans l'homologie harmonique qui transforme φ en soi-même et qui a un certain point de la droite PM pour centre, et ensuite à projeter la nouvelle surface par P sur R_3. Or cette même homologie harmonique transforme dans le cône (à 3 dimensions) qui projette cette nouvelle surface par P le cône qui projette Γ par M, d'où il suit que (comme l'espace R_3 ne passe ni par P ni par M, comme nous pouvons évidemment supposer) ces deux cônes coupent R_3 suivant deux figures projectives*). Donc puisque, par ce que nous

*) Nous avons ainsi en même temps démontré que: *lorsqu'on considère dans l'espace à 3 (ou à $n-1$) dimensions deux figures qui soient les projections*

avons dit au commencement, le cône qui projette Γ par M est un cône quadratique, et puisque les propriétés des figures qui nous importent sont celles projectives, nous concluons que: 1° *la transformée de S par une inversion ayant le point double D pour centre est une quadrique; 2° toutes les particularités de cette quadrique en elle-même et par rapport à la conique double de S peuvent s'obtenir en considérant cette quadrique et cette conique comme l'intersection de R_3 avec le cône du faisceau déterminé par Γ ayant M pour sommet* (*ou pour un point de l'arête*) *et avec le cône quadrique ordinaire d'intersection de φ avec son espace tangent en M.* — Ainsi pour chaque espèce de surface S en même temps que nous reconnaitrons les particularités d'un quelconque D de ses points singuliers par l'examen du cône du faisceau des F_3^2 qui a pour sommet (ou pour un point de l'arête) le point singulier correspondant de Γ nous verrons aussi quelles particularités présente une quadrique par laquelle on puisse obtenir S au moyen d'une inversion ayant D pour centre*).

29. La nature des diviseurs élémentaires montre que les propriétés des différentes espèces de surfaces peuvent se déduire les unes des autres par des considérations de limites, en supposant que deux racines correspondant à deux diviseurs élémentaires différents pour une espèce viennent coincider, de sorte que la nouvelle espèce aura un diviseur élémentaire de dégré somme des dégrés de ceux-là, etc. Cependant cette méthode des limites ne mène pas toujours facilement aux résultats, de sorte que nous nous bornerons à en faire application à la détermination de la classe des différentes surfaces. — La classe de la sur-

---

d'une même figure d'une variété quadratique de l'espace à 4 (ou à n) dimensions faites par deux points différents de cette variété comme centre, on peut obtenir l'une de ces figures de l'autre au moyen d'une inversion et d'une homographie, que l'on peut même supposer être une homologie harmonique ayant le même centre que l'inversion. — M. Klein avait déjà vu l'effet d'un changement du centre de projection lorsqu'on considère la géométrie du R_{n-1} comme la projection de la géométrie sur une $M_{n-1}^{(2)}$ du R_n (*Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann. V; v. pag. 266); mais nous avons aimé à retrouver synthétiquement ce qu'il avait prouvé analytiquement. Il nous semble en outre qu'il n'ait pas bien reconnu que dans la transformation considérée il y a non seulement une inversion, mais la combinaison d'une inversion avec une homographie (qui *ne change pas* en général l'absolu de l'inversion en soi-même).

*) Nos raisonnements montrent qu'il faut seulement excepter le cas dans lequel, φ étant un cône, M en serait le sommet (ou un point de l'arête), car alors les inversions dont il s'agit deviennent illusoires. Cela signifie que seulement pour les surfaces du 4° ordre qui, outre la conique double, générale ou décomposée en deux droites (se coupant ou non en un point triple, et distinctes ou coincidantes), n'ont pas d'autres points doubles, on ne peut pas les obtenir en transformant par des inversions convenables des quadriques convenables.

face S est le nombre des espaces tangents à Γ que l'on peut mener par un plan quelconque passant par P: ce nombre correspond par dualité à l'ordre de la développable Δ circonscrite à un système de $F_3{}^2$, que nous considérions au n° 20. Et comme nous avons vu alors que dans le cas général cet ordre est 12, de même nous concluons que: *La surface générale du 4e ordre à conique double générale ou décomposée en deux droites est de la classe* 12*).

Mais si la surface S n'est plus générale, mais acquiert des points doubles, c'est-à-dire si sa caractéristique n'est plus [11111] ni [$\bar{1}$1111], alors la classe de S n'est plus 12, mais elle diminue en correspondance. Un point conique et un point biplanaire ordinaire (ou *de* 1e *espèce*) correspondent, comme nous avons vu, aux dégrés 2 et 3 de la caractéristique et ils abaissent, comme on sait, la classe de 2 et resp. de 3 unités. Et de là il suit que, comme un dégré 4 ou 5 peut être considéré comme provenant de la coincidence des racines correspondantes à deux dégrés 2, 2 ou bien 2, 3, ils correspondront à des points biplanaires qui abaissent la classe de S de 4 ou resp. de 5 unités (et que nous appellerons *de* 2e ou *de* 3e *espèce*). De même nous verrons qu'au groupe (11) de deux dégrés appartenant à une même racine correspondent deux points coniques de S et en conséquence un abaissement de 4 unités pour la classe; et qu'au groupe (21) correspond un point biplanaire provenant de la coincidence de ces deux points coniques et abaissant en conséquence aussi la classe de 4 unités, c'est-à-dire de la 2e espèce. Enfin nous verrons qu'aux groupes (31) et (41) correspondent des points uniplanaires de S; et puisque ces groupes peuvent être considérés comme provenant de la coincidence des racines correspondant aux dégrés 2 et (11), ou 3 et (11), ces points uniplanaires (dont le premier sera donc équivalent à trois points doubles coniques coincidents, et le second à deux points coniques et un point biplanaire de 1e espèce) produiront un abaissement de la classe resp. de 6 ou de 7 unités (et nous les appellerons respectivement *de* 1e et *de* 2e *espèce*). Etc., etc.**)

Il est indispensable de se rappeler ces remarques pour comprendre de quelle manière nous avons pu, dans la classification que nous ferons de nos surfaces, assigner tout-de-suite, sans aucun calcul, pour chaque

*) Puisque l'ordre de Δ coincide toujours avec la classe de notre surface S on voit en répétant le raisonnement fait au n° 20 sur l'intersection de Δ avec φ qu'on a la proposition suivante: *pour une cyclide quelconque de classe n la développable focale est de l'ordre* $2n - 8$.

**) Nous ne savons pas si l'on déjà remarqué ce fait étrange que M. Casey dans son mémoire (loc. cit., pag. 660, 661) trouve par un raisonnement tout-à-fait inexact que la cyclide générale [11111] est de la classe 16 et qu'en conséquence les cyclides [2111], [311], et [221], [(11)111] sont resp. des classes 14, 13 et 12.

espèce la classe correspondante. Ajoutons encore la remarque suivante, dont nous ferons aussi tacitement un usage continuel. Nous avons dit que la classe de la projection de Γ faite par P est égale au nombre des espaces tangents à Γ, que l'on peut mener par un plan quelconque passant par P. De là il suit que toutes les surfaces obtenues en projetant Γ par les points d'un plan, ayant une position générale par rapport à Γ, ont la même classe. Donc, bien que la classe de la projection de Γ puisse diminuer en donnant au centre de projection P des positions particulières par rapport à Γ, toutefois nous serons sûrs que la classe ne diminue pas lorsque les conditions imposées à P sont telles que dans chaque plan de R_4 il y ait quelque point qui les satisfasse, c'est-à-dire lorsqu'on astreind P seulement à appartenir à une variété ou à une surface quelconques données. Par exemple si, au lieu de prendre P quelconque (auquel cas l'on aurait une surface quartique à conique double), on le prend sur l'un des cônes contenant Γ (de sorte que la conique double se décompose) ou bien sur Γ même (de sorte que l'on obtient une surface cubique), la surface obtenue ainsi aura la même classe que dans le premier cas. — Ce principe nous a donné les classes de presque toutes nos surfaces.

30. Il faut encore que nous fassions une remarque générale pour toutes les espèces de surfaces que nous allons étudier séparément. Nous avons vu qu'en général une surface quelconque parmi celles dont nous nous occupons a dans la conique double 4 points-pinces; mais il peut très-bien arriver que quelques-uns de ceux-ci coincident entre eux. Lorsqu'on transforme par inversion une S de nos surfaces (en prenant, bien entendu, la quadrique directrice de la manière dite au n^0 28) on obtient une autre surface S_1 de la même espèce, dont les points-pinces de la conique double correspondent aux 4 points dans lesquels la quartique d'intersection de S avec le cône projetant la conique double par le centre de l'inversion coupe le plan polaire de ce centre par rapport au faisceau des quadriques passant par cette quartique (les couples de points de cette quartique alignés avec le centre de l'inversion se transformant dans les points de la conique double de S_1). De là il suit que si l'on prend le centre de l'inversion en un point quelconque de la développable circonscrite à S et à sa conique double (développable focale), ou en un point des courbes doubles de cette développable, ou en un point de sa courbe de rebroussement, ou enfin en un point stationnaire de cette courbe, des 4 points-pinces de S_1 deux coincideront, ou bien ils coincideront deux-à-deux en deux points, ou bien trois de ces 4 points, ou enfin tous les quatre, coincideront en un seul. On voit ainsi en même temps que toutes les propriétés de S qui n'ont pas de relation immédiate avec les points-pinces

de la conique double ne cesseront d'avoir lieu pour S_1: nous pourrons donc nous dispenser de considérer les particularisations de nos surfaces qui ne dépendent que des points-pinces et nous nous bornerons à reconnaitre ici quelles singularités ultérieures présente un point A' dans lequel soient venus coincider deux ou trois points-pinces. Dans ces cas la quartique k^4, dont la projection par P sur R_3 est la conique double de notre surface, aura un point A double ou stationnaire (dont la projection sera A') et le plan tangent au cône $\pi\varphi$ le long de PA sera justement le plan tangent en A à Γ. Donc (v. n⁰ 3) *pour le point-pince A' la tangente singulière coincide avec la tangente à la conique double.* Un espace quelconque passant par ce plan sera tangent en A à une variété du faisceau et il coupera Γ en une quartique ayant en A un point double avec les deux tangentes dans ce plan et appartenant à un cône quadrique ayant ce plan pour plan tangent le long de la génératrice PA (le cône d'intersection de cet espace avec φ). Parmi ces espaces il y en a deux qui coupent Γ en des quartiques à point stationnaire en A: l'un de ces deux espaces est évidemment celui qui touche en A la variété φ et qui coupe en conséquence Γ en une quartique ayant en A un point stationnaire dont la tangente est PA; l'autre de ces deux espaces est π dans le second des cas que nous étudions. Donc (en appliquant quelques-unes des propositions de la dernière note au n⁰ 3) nous avons que: *Chaque plan passant par la tangente singulière au point-pince particulier A' coupe la surface suivant une quartique ayant en A' un point d'osculation de deux branches avec cette droite pour tangente commune. Parmi ces plans le plan tangent singulier coupe la surface en une courbe ayant en A' un point triple à trois tangentes coincidentes, et un autre plan détermine une section ayant en A' un point de rebroussement de 3e espèce. Mais ce dernier plan coincide avec le plan de la conique double dans le second des deux cas considérés.*

Ajoutons enfin que lorsque les points-pinces coincident deux-à-deux (ou l'orsqu'ils coincident tous les quatre) le plan de la conique double est tangent à l'un des cônes de Kummer le long de la droite joignant les deux points-pinces distincts et la conique double appartient aux deux séries de coniques qui correspondent à ce cône; car dans ce cas k^4 se décompose en deux coniques.

31. Le cas $\{11111\}$ *) pour Γ, qui donne les surfaces les plus générales à conique double générale ou décomposée en deux droites, a déjà été étudié complètement dans les paragraphes précédents. Nous

*) Pour distinguer les caractéristiques des $F_2^{2\cdot 2}$ Γ de celles des surfaces S de R_3 qui en sont les projections nous mettrons celles-ci entre [ ], et celles-là entre { }.

passerons donc aux autres cas, et comme plusieurs des propriétés de ces surfaces générales ont encore lieu, comme nous avons prouvé, pour celles qu'on obtient dans ces cas, nous nous bornerons aux propriétés qui se modifient de l'un cas à l'autre: les méthodes que nous avons développées, et les avertissements que nous avons donnés dans les différents n^{os} de ce paragraphe nous donneront d'ailleurs immédiatement ces propriétés. Ainsi nous avons déjà vu comment on peut étudier les points doubles des nouvelles espèces de surfaces en considérant les points correspondants de Γ. Ainsi les inversions fondamentales s'obtiennent encore immédiatement pour ces différentes surfaces, car elles correspondent aux points ayant le même espace polaire par rapport aux F_3^2 passant par Γ, c'est-à-dire aux sommets des cônes quadriques passant par Γ; on peut cependant exclure ces sommets qui sont des points doubles de Γ car on voit bien que l'inversion provenant d'un tel point sera illusoire. Nous verrons aussi comment dans chaque cas on détermine les droites de Γ et leur distribution par des considérations analogues à celles qui nous ont permis d'étudier les 16 droites du cas général, mais encore plus faciles: de là nous aurons donc les droites des surfaces projections de Γ dans les différents cas. De même la méthode pour obtenir les représentations planes des différentes surfaces nous servirait encore: seulement il faudra remarquer que généralement l'on pourra prendre de plusieurs manières diverses la droite de Γ par laquelle on projette Γ sur un plan et qu'en conséquence l'on obtiendra autant de représentations planes différentes. Nous nous bornerons en conséquence pour ne pas trop allonger ce travail à donner encore les représentations planes dans deux ou trois cas.

$\{2\,1\,1\,1\}$

32. Dans le cas $\{2\,1\,1\,1\}$ la surface Γ a un point double M, sommet d'un cône f du faisceau de F_3^2, lequel se trouve sur toutes ces variétés. Par ce point passent, comme nous avons vu (n^0 26), 4 droites de Γ contenues dans le cône quadrique ordinaire tangent en ce point à Γ. Si dans Γ il y a une autre droite, le plan qui la joint à M devra appartenir au cône f et il coupera une autre variété du faisceau, et en conséquence Γ même, dans cette droite et dans une autre droite, qui devra nécéssairement passer par M. *Cette considération nous montre immédiatement, soit dans ce cas, soit dans ceux qui suivront, quelles sont les droites de la surface* Γ (*qui ne passent pas par* M). Par chacune des 4 droites passant par M passent deux plans générateurs de f: sur chacun d'eux il y aura encore une droite de Γ. Donc Γ contient encore 8 droites qui deux-à-deux coupent les 4 droites passant par M. — Dans le faisceau il y a encore, outre f, 3 autres cônes qui auront en M pour espace tangent l'espace tangent

commun à toutes les variétés du faisceau. Pour l'un quelconque de ces cônes le plan qui en joint le sommet à une des droites de Γ sera un plan générateur et devra en conséquence contenir encore une autre de ces droites: donc dans chacun des deux systèmes de plans générateurs il y a un plan qui contient deux des 4 droites de Γ passant par M et il y en a deux autres dont chacun contient 2 des autres 8 droites de Γ. On voit ainsi quelle est la distribution des droites de Γ: chacune des 4 qui passent par M est coupée par les autres trois et par deux des 8 autres, chacune de ces 8 est coupée par une des 4 et par trois des 8. — En projetant par un point P sur R_3 nous avons la distribution des droites de la projection S de Γ.

33. [2 1 1 1] *Surface de la* 10e *classe à conique double génerale et un point double conique.* On obtient cette surface S comme projection de Γ si la variété φ qui passe par P n'est pas un cône. Ce point conique D est la projection du point double M de Γ: il passe par lui 4 droites de S, et il y a en outre sur S d'autres 8 droites liées à ces 4 de la manière que nous avons déjà dite. — Cette surface S a 4 cônes de Kummer dont un *singulier**) ayant le sommet en D: pour les 3 cônes non singuliers les couples de séries de coniques de S présentent les mêmes relations qu'en général et il y a dans chacune de ces séries une conique décomposée en 2 droites passant par le point D et deux coniques décomposées chacune en 2 droites ne passant pas par D; pour le cône de Kummer singulier les coniques des deux séries présentent cette particularité qu'elles passent toutes par le point double D de la surface et il y a dans chaque série 4 coniques décomposées en une droite passant par D et une autre droite.

---

*) Nous appelons *cône de Kummer* chaque cône quadrique dont les plans tangents coupent une de nos surfaces suivant des couples de coniques, soit que ce cône soit bitangent à la surface, soit lorsqu'il a pour sommet un point singulier de la surface et ne lui est plus que simplement tangent (car, comme nous l'avons dit au commencement, M. Kummer a aussi considéré ces dernières espèces de cônes); mais dans ce dernier cas nous appellerons *singulier* le cône de Kummer. — Lorsqu'un cône de Kummer est singulier les ∞^2 quadriques qui passent par la conique double (générale ou décomposée) et par deux coniques appartenant resp. aux deux séries qui correspondent à ce cône ne sont plus doublement tangentes à la surface S mais simplement tangentes, car l'un de leurs deux points de contact avec celle ci est venu dans le point double qui est le sommet du cône de Kummer. — Dans l'étude des différentes espèces de nos surfaces nous n'aurons pas besoin d'énumérer pour chaque espèce les systèmes de ∞^2 quadriques passant par la conique double et par deux autres coniques (et en conséquence les manières de générer la surface par deux faisceaux projectifs de quadriques), car lorsque nous aurons donné les différents couples de séries de coniques nous aurons en même temps donné ces systèmes de quadriques.

A chacune des 4 + 8 droites de S correspond encore, comme dans le cas général, une série de ∞^2 cubiques (coupant en deux points cette droite). Les cubiques qui correspondent aux droites passant par le point double D passent aussi par D *).

Si on considère la surface S comme une cyclide, alors elle aura correspondentement aux 3 cônes de Kummer non singuliers 3 sphères directrices d'inversions fondamentales pour S proprement dites, et correspondentement au cône de Kummer singulier un sphère directrice singulière, c'est-à-dire réduite à un cône dont le point double D de S est le sommet: la correspondance de S à soi-même par rapport à une inversion ayant une telle sphère directrice n'a plus aucun sens. Quant aux focales de la cyclide (v. n^0 25), celles qui appartiennent aux 3 sphères directrices propres sont des quartiques [2 1 1], c'est-à-dire ayant un point double en D (point par lequel passent ces sphères) et appartenant chacune à deux cônes quadriques ayant les sommets dans les centres des deux sphères directrices propres sur lesquelles elle ne se trouve pas; et celle qui appartient à la sphère singulière est une quartique [$\bar{1}$ 1 1 1], c'est-à-dire une quartique tout-à-fait générale placée dans 3 autres cônes ayant pour sommets les centres des 3 premières sphères.

*) Si le centre de projection P de Γ est sur l'espace tangent en M au faisceau, la projection D de M ira sur la conique double; et comme chaque espace passant par PM coupera Γ en une quartique ayant M pour point double et l'intersection avec l'espace tangent en M pour plan des tangentes (plan qui passera en conséquence par P), on voit que le point D de la conique double (dans lequel se confondront 2 des 4 points-pinces) sera un *point de contact de deux nappes* de la surface, car chaque plan passant par D coupera la surface en une courbe ayant en D un point de contact de deux branches. Les tangentes en D à ces courbes forment le plan tangent (ou, pour mieux dire, le plan des tangentes quadriponctuelles) en D à la surface; ce plan est l'intersection de R_3 avec l'espace tangent en M au faisceau, et, comme cet espace coupe Γ en 4 droites passant par M et contient les sommets des 3 cônes du faisceau qui n'ont pas M pour sommet, ce plan coupera la surface suivant 4 droites passant par D (ce qui suivait aussi du fait que D devait être, d'après ce que nous avons dit, un point quadruple pour l'intersection du plan avec la surface) et il contiendra en outre les sommets des 3 cônes de Kummer non singuliers. On retrouve ainsi immédiatement les propriétés de cette surface qui ont été données par M. Cremona (*Sulla superficie di quart'ordine dotata di conica doppia*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1871, serie II, vol. IV, pag. 159—162). D'ailleurs cette surface s'obtient de la surface generale [2 1 1 1] par une inversion au moyen de laquelle le point conique va se poser sur la conique double. On pourrait aussi dans les espèces de surfaces que nous considérons ensuite supposer qu'un quelconque des points doubles (ou plusieurs d'entre eux) aillent se poser sur la conique double, mais cet exemple que nous avons donné suffira pour montrer au lecteur quelles particularisations recevraient par cela les propriétés de la surface, et nous nous bornerons à considérer encore dans la suite deux ou trois cas dans lesquels les particularisations qu'on obtient ainsi sont encore plus remarquables.

Il suit de là que les quadriques déférentes des 3 premières sphères les touchent dans le point double D de S (tandis que la quadrique déférente de la sphère directrice nulle a une position tout-à-fait générale par rapport à celle-ci). On peut aussi prouver cela en remarquant que comme dans R_4 un des cônes du faisceau différents de f touche en M l'espace tangent en ce point à φ, l'espace polaire de son sommet par rapport au faisceau coupe φ en une quadrique passant par M et la quadrique polaire du même cône par rapport à φ appartiendra à cet espace polaire et aura en M pour plan tangent l'intersection de cet espace avec l'espace tangent à φ, c'est-à-dire le même plan tangent que la première quadrique. Or les projections de ces deux quadriques sont respectivement une sphère directrice et sa quadrique déférente: donc ces deux surfaces se toucheront dans la projection D de M. — Ainsi les ∞^2 sphères dont la cyclide S peut être considérée comme l'enveloppe forment 4 séries, dont 3 se composent chacune des sphères orthogonales à une sphère fixe et ayant leurs centres sur une quadrique tangente à cette sphère, et dont une se compose de sphères passant par un point fixe et ayant leurs centres sur une quadrique fixe.

Cette cyclide s'obtient par une inversion faite sur une quadrique générale à centre (v. n⁰ 28).

34. [1211] *Surface de la* 10e *classe à deux droites doubles et un point conique.* (En disant *deux droites doubles* nous sous-entendrons toujours qu'elles se coupent). Nous obtenons cette surface en supposant que φ soit un des 3 cônes différents de f du faisceau (Γ). La distribution des droites simples sera donc encore la même que pour la surface précédente; en outre chacune des droites doubles sera coupée par 2 des 4 droites sortant par le point conique et par 4 des 8 autres, lesquelles 4 seront par couples sur 2 plans passant par cette droite double. Les cônes de Kummer non singuliers de la surface sont seulement plus 2 (outre celui qui se décompose dans les deux droites doubles comme enveloppes de plans). Quant aux inversions fondamentales de cette surface, on voit de la même manière que pour la surface générale à deux droites doubles qu'il y en a 2 dont les centres sont les sommets des 2 cônes de Kummer non singuliers et dont les quadriques directrices sont deux cônes (passant par les deux droites doubles), tandis qu'il y en a une dont le centre est le point d'intersection des deux droites doubles et dont la quadrique directrice est une quadrique générale (contenant ces deux droites) passant avec ces deux cônes directeurs par le point conique de la surface. — On obtient une telle surface en transformant une quadrique par une inversion à cône directeur.

Pour cette surface et pour toutes celles, que nous rencontrerons

dans la suite, ayant deux droites doubles et des points doubles, il y a un cas particulier remarquable: celui dans lequel un point double va coincider avec le point de rencontre des deux droites doubles (nous avons déjà examiné dans la dernière note le cas plus général dans lequel ce point double va sur l'une des droites doubles). Dans notre cas cela équivaut à projeter la surface Γ par un point P qui soit en ligne droite avec M et l'un des 3 autres sommets de cônes du faisceau. Un espace passant par cette droite coupe Γ en une quartique ayant un point double en M, et le centre de projection P se trouve en ligne droite avec ce point double et un autre sommet de cône quadrique ordinaire passant par cette quartique. Donc (v. la note au n⁰ 3) dans ce cas: *chaque plan passant par le point D d'intersection des deux droites doubles coupe la surface S en une quartique ayant en D non plus seulement un point de contact de deux branches, mais bien un point d'osculation de deux branches, avec la tangente singulière dans le plan des droites doubles.**) Parmi ces plans ceux qui touchent un certain cône quadrique (de Kummer) ayant le sommet en D coupent la surface en des couples de coniques s'osculant en ce point. Toutes les propriétés de cette surface s'obtiennent d'ailleurs, comme nous l'avons dit, comme cas particuliers de celles de la surface générale $[\bar{1}211]$: les 4 droites de celle-ci sortant du point conique viennent maintenant coincider par couples avec les deux droites doubles, de sorte que notre surface n'a plus, outre celles-ci, que 8 droites. Etc.

35. $[\bar{2}111]$ *Surface de la 10ᵉ classe à deux droites doubles se croisant en un point triple.* Cette surface correspond au cas dans lequel le centre de projection P de Γ se trouve sur le cône f du faisceau correspondant au dégré 2**). Elle a, comme nous avons déjà remarqué

---

*) On voit aussi que dans ce cas les 4 points-pinces des deux droites doubles coincident dans le point d'intersection de celles-ci. Réciproquement notre méthode nous montre immédiatement que, si dans la surface générale à deux droites doubles les 4 points-pinces coincident, on aura justement la surface particulière considérée ci-dessus; tandis que pour la surface générale à conique double nous avons vu (n⁰ 30) que la coincidence des 4 points-pinces n'entrainait pas un abaissement dans la classe.

**) On voit donc que cette surface n'est pas un cas particulier de la surface à deux droites doubles $[\bar{1}211]$. On aurait pu penser que cette surface à point triple pouvait être obtenue en faisant venir dans le point d'intersection des deux droites doubles un ou plusieurs points coniques d'une surface quelconque à deux droites doubles; mais cela n'est pas, car nous avons vu au contraire au n⁰ précédent qu'en faisant coincider le point conique de la surface $[\bar{1}211]$ du point d'intersection des droites doubles, ce point devient un point d'osculation de deux nappes (dénomination expliquée par ce que nous avons dit précédemment). Les deux surfaces $[\bar{1}211]$ et $[\bar{2}111]$ sont tout-à-fait différentes entre elles (*identiques* seulement en ce sens, qu'elles sont les projections d'une même $F_2^{2\cdot 2}$) et elles ne

(n° 27), un cône quadrique de tangentes quadriponctuelles dans le point triple (outre le plan des droites doubles) et ce cône contient les deux droites doubles et les 4 autres droites de la surface passant par ce point. Outre celles-ci la surface contient 8 droites, dont chacune est dans un plan avec l'une des deux droites doubles et l'une des 4 premières droites simples. La surface a encore 3 cônes de Kummer (non singuliers) à chacun desquels correspondent deux séries conjuguées de coniques ayant entre elles les relations connues. A chacune de ces séries de coniques appartient un couple de droites parmi les 4 droites qui passent par le point triple et deux couples de droites parmi les autres 8. La surface a 3 inversions fondamentales ayant pour centres les sommets des 3 cônes de Kummer et ayant des cônes quadriques directeurs. Elle *n'est pas* la transformée par inversion d'une quadrique.

On obtient aussi pour cette surface un cas particulier remarquable en faisant coincider (dans le point triple) les 3 points-pinces des droites doubles. En se rappellant notre méthode pour déterminer ces points-pinces, on voit que cela arrive lorsqu'on prend P sur l'intersection de f avec l'espace tangent en M au faisceau, c'est-à-dire sur le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ. Donc alors la projection de ce cône se réduit à un plan. Chaque espace passant par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point double PM est une tangente. Donc: *lorsque les 4 points-pinces coincident, le cône tangent dans le point triple se décompose dans le plan des droites doubles compté deux fois et un autre plan contenant les 4 droites simples de la surface qui passent par ce point triple; de sorte que chaque section plane passant par ce point y a un point stationnaire, avec la tangente dans le premier plan, par lequel passe une autre branche tangente au second plan.*

36. Pour avoir la représentation des 3 surfaces ainsi obtenues dans les trois nos précédents sur un plan R_2 projetons Γ sur celui-ci par l'une des droites de Γ: nous obtiendrons deux représentations différentes suivant que cette droite passe ou ne passe pas par le point double M de Γ.

Dans le premier cas, les 3 autres droites passant par M seront projetées en trois points 1, 2, 3 du plan situés en ligne droite, puisque elles sont dans un espace passant par l'axe de projection; les deux autres droites de Γ coupant cet axe auront pour images deux autres points quelconques 4, 5 du plan, et les autres six droites de Γ auront pour images dans le plan les six droites qui joignent ces deux points

---

peuvent pas se rattacher comme cas particulier l'une à l'autre. — Les mêmes choses valent pour tous les cas analogues qui se présenteront dans la suite.

fondamentaux 4, 5 aux trois premiers 1, 2, 3. La droite 1 2 3 joignant ceux-ci est l'image du point conique M de Γ ou bien des points coniques des différentes surfaces considérées, car elle est la projection du cône tangent en M à Γ. Dans chaque espace passant par l'axe de projection il y a outre M un seul point de Γ infiniment voisin à cet axe: donc l'image de cette droite de la surface est la droite joignant les points fondamentaux 4, 5, outre la droite 1 2 3 comme image du point conique. Les 3 couples de séries de coniques ne passant pas par ce point ont pour images les faisceaux de droites de centres 1, 2, 3 avec les faisceaux de coniques passant par 2 3 4 5, 1 3 4 5, 1 2 4 5 respectivement. Le couple de séries de coniques passant par le point conique a pour image le couple de faisceau de droites ayant les deux points 4 et 5 pour centres. — Nous avons ainsi en même temps les représentations plans des 3 espèces de surfaces; on verrait aussi sans difficulté ce que sont les images de leurs cubiques, quartiques, etc.

Quant aux images des lignes doubles, pour la surface [2 1 1 1], dont la conique double ne se décompose pas, l'image de celle-ci sera, comme en général, une cubique passant par les points fondamentaux (comme projection d'une quartique de Γ) et dont les points sont conjugués deux-à-deux de la même manière. Pour la surface $[\overline{1} 2 1 1]$ dont la conique double se décompose en deux droites les coniques placées dans les plans passant par ces droites doubles ont pour images, p. e., le faisceau 1 de droites et le faisceau 2 3 4 5 de coniques, et les deux droites doubles une droite et une conique de ces faisceaux respectivement, etc. Enfin pour la surface $[\overline{2} 1 1 1]$ à point triple dans lequel se croisent deux droites doubles les deux séries de coniques passant par ce point et appartenant en conséquence à des plans passant par ces droites ont pour images les deux faisceaux de droites 4 et 5: une droite de chacun de ces faisceaux est l'image d'une droite double de la surface (en y ajoutant, si l'on veut, la droite 1 2 3, qui est l'image du point triple).

Si pour axe de projection de Γ on prend une droite de Γ ne passant pas par le point double M, alors comme elle est coupée par une droite passant par ce point et par d'autres trois droites nous aurons sur R_2 quatre points fondamentaux 1, 2, 3, 4 correspondants à ces quatre droites. L'espace tangent à f le long de la droite représentée par 1 contient aussi l'axe de projection et coupe R_2 suivant une droite 11 passant par 1, droite qui contient les images des points de Γ infiniment voisins à la droite représentée par 1 (images qui coincident dans le point de cette droite qui est infiniment voisin à 1 et que nous représenterons aussi par 1) et qui est en même temps l'image de la droite de Γ appuyée sur celle-ci mais différente de l'axe de projection et de celles qui passent par M. Il s'ensuit que les images des quartiques

de 1e espèce de Γ (ou de S) touchent la droite 11 dans le point 1, ou, comme nous dirons plus brièvement, passent par 1, 1. Le point 1 est en même temps l'image du point conique. Les autres trois droites passant par ce point ont pour images les droites 12, 13, 14; la droite qui sert comme axe de projection a pour image la conique 11234; et enfin les trois droites restantes ont pour images les droites 23, 24, 34. — L'une des deux séries de coniques passant par le point double a pour images les droites passant par 1 et l'autre les coniques passant par 1 2 3 4; les autres trois couples de séries de coniques ont pour images les faisceaux de droites 2, 3, 4 et les faisceaux de coniques 1 1 3 4, 1 1 2 4, 1 1 2 3 respectivement.

Pour la surface [2 1 1 1] l'image de la conique double est une cubique par 1 1 2 3 4. Pour la surface $[\bar{1}\,2\,1\,1]$ les deux droites doubles ont pour images une droite et une conique des faisceaux 2 et 1 1 3 4, par exemple: ces deux faisceaux sont les images des coniques placées dans des plans passant par ces droites doubles. Pour la surface $[\bar{2}\,1\,1\,1]$ les deux droites doubles ont pour images une droite et une conique des faisceaux 1 et 1 2 3 4, qui sont pour cette surface les images des deux séries de coniques placées dans des plans passant par les droites doubles. Le point d'intersection autre que 1 de cette droite et de cette conique forme avec le point 1 l'image du point triple de la surface, en ce sens que les points de R_2 qui lui sont infiniment voisins représentent les points de la surface infiniment voisins au point triple et appartenant à la nappe tangente au plan des deux droites doubles, tandis que les points du plan infiniment voisins à 1 représentent les points de la surface infiniment voisins au point triple et appartenant à la nappe qui a dans ce point le cône quadrique tangent. On voit tout cela par la projection.

$\{2\,2\,1\}$.

37. Dans ce cas la surface Γ de R_4 a deux points doubles M, M', qui sont les sommets de deux cônes f, f' du faisceau de F_3^2. (Un tel faisceau est précisément déterminé par deux cônes de 1e espèce dont chacun passe par le sommet de l'autre) La droite MM' appartient à Γ et le long d'elle cette surface a un seul plan tangent qui est l'intersection des espaces tangents en M et M' à toutes ces variétés (v. à la fin du n° 26). L'espace tangent en M coupe les variétés en un faisceau de cônes quadriques ordinaires ayant le sommet en M: le cône f' du faisceau de F_3^2 et le troisième cône ψ du même faisceau seront donc coupés par cet espace suivant les deux couples de plans de ce faisceau de cônes ordinaires, cônes qui ont le long de l'arête MM' du premier couple de plans un même plan tangent (le plan tangent à Γ), lequel

appartiendra au second couple de plans. De là il suit que par M passent, outre la droite MM', seulement 2 autres droites de Γ; et de même on verrait que par M' passent, outre MM', seulement 2 autres droites de Γ. Les 2 plans générateurs de f' qui passent par MM' coupent encore Γ respectivement suivant les deux autres droites passant par M; mais chacun des plans générateurs de f' qui passent par l'une ou l'autre des deux autres droites passant par M' coupe encore Γ suivant une autre droite ne passant ni par M ni par M'. Donc Γ contient, outre les 5 droites déjà considérées, 4 autres droites, dont deux coupent l'une et deux l'autre des droites passant par M' et différentes de MM'; et de même elles forment deux autres couples de droites coupant respectivement l'une et l'autre des droites, différentes de MM', qui passent par M. Enfin elles forment encore deux couples de droites se coupant mutuellement, car elles appartiennent par couples à deux plans générateurs du cône ψ de même système que le plan générateur qui est tangent à Γ le long de MM', tandis que le couple des droites (différentes de MM') qui passent par M et le couple de celles qui passent par M' appartiennent à deux plans générateurs de ψ de l'autre système. On a ainsi la distribution des droites de Γ et en conséquence aussi de ses projections S.

38. [2 2 1] *Surface de la 8ᵉ classe à conique double générale et deux points coniques.* Elle a deux points coniques D, D' (projections de M, M') joints par une droite qui lui appartient. Par chacun de ces points passent encore 2 droites de la surface S, et il y a en outre sur celle-ci d'autres 4 droites liées à ces 5 et entre elles comme les droites de Γ entre elles. Les deux points coniques D, D' sont les sommets de deux cônes de Kummer singuliers, auxquels correspondent deux couples de séries de coniques passant respectivement par ces points, et il y a en outre un cône de Kummer non singulier auquel correspondent deux séries de coniques jouissant entre elles et par rapport à celles-là des propriétés que nous avons vues en général. Le cône tangent en D ou en D' touche encore le cône de Kummer correspondant dans les deux tangentes quadriponctuelles de ce point conique: ces deux cônes tangents à S se touchent aussi entre eux le long de la droite DD', car *le long de celle-ci la surface* S (est développable, c'est-à-dire) *a un seul plan tangent*, qui la coupe encore en une conique. Ce plan tangent appartient au cône de Kummer non singulier, et cette conique avec cette droite DD' de S comptée deux fois resp. aux deux séries de coniques de S qui lui correspondent.

En considérant cette surface comme une cyclide, au cône de Kummer non singulier correspond une sphère directrice d'une inversion fondamentale proprement dite, qui coupe sa quadrique déférente suivant

la quartique focale correspondante, laquelle ayant pour caractéristique [2 2] se décomposera dans la droite DD' et une cubique passant aussi par les deux points coniques. Aux deux cônes de Kummer singuliers correspondent deux sphères directrices nulles (ou cônes projetant l'absolu) sur lesquelles les quartiques focales, intersections avec leurs quadriques déférentes, ont pour caractéristique $[\bar{1}2\,1]$, c'est-à-dire ont chacune un point double dans le point conique de S qui ne lui correspond pas. De là on a les 3 manières différentes de construire cette cyclide comme l'enveloppe de ∞^2 sphères, etc. — Cette surface est la transformée par inversion d'une quadrique tangente à la conique qui forme l'absolu.*)

39. $[\bar{1}2\,2]$ *Surface de la 8e classe à deux droites doubles et deux points coniques.* La droite qui joint ces deux points coniques D, D' appartient à la surface et celle-ci contient encore comme dans le cas précédent 2 autres droites par chacun de ces points et d'autres 4 droites. On voit par ce que nous avons dit à la fin du n^0 37, et en se rappelant que le centre de projection P se trouve à-présent sur le cône ψ, dont les deux plans générateurs passant par P coupent Γ dans les deux coniques dont les projections sont les droites doubles de S, que dans deux plans passant par une droite double il y a respectivement les deux droites qui passent seulement par le point conique D et celles qui passent seulement par D', tandis qu'un plan passant par l'autre droite double touche la surface le long de la droite DD', et dans deux autres plans passant par cette dernière droite double sont les deux autres couples de droites de S (ne passant ni par D, ni par D'). Il n'y a pas de cône de Kummer non singulier, mais seulement deux cônes de Kummer singuliers ayant leurs sommets dans les deux points coniques D, D': il leur correspond deux couples de séries de coniques de S. La surface a une inversion fondamentale, dont le centre est le point d'intersection des droites doubles et dont la quadrique directrice passe par la droite DD'. — Elle s'obtiendrait par inversion conique d'une quadrique tangente à l'une des deux droites formant l'absolu de l'inversion.

---

*) Si cet absolu est l'absolu éuclidien ordinaire, cette quadrique sera imaginaire et notre cyclide sera en conséquence imaginaire (ce qui résulte aussi du fait que la droite DD' qui coupe l'absolu est imaginaire): mêmes remarques pourront être faites dans plusieurs des cas qui suivront. Mais il importe de se rappeler toujours que nous n'avons introduit les dénominations métriques que pour simplifier les énoncés, de sorte que pour nous l'absolu est une conique quelconque, imaginaire ou réelle. — Dorénavant pour abréger nous appellerons *absolu* d'une inversion la conique d'intersection de la quadrique directrice de l'inversion avec le plan polaire par rapport à elle du centre de l'inversion, même lorsqu'elle se décompose, et nous appellerons ce plan *plan d'inversion.* Une inversion dont la quadrique directrice se réduit à un cône ou à un couple de plans sera appelée inversion *conique* ou resp. *biplanaire.*

40. *Surface de la 8ᵉ classe à une droite double et une droite cuspidale.* — La surface du 4ᵉ ordre à une droite double et une droite cuspidale (se coupant mutuellement) est un cas particulier de la surface à deux droites doubles étudiée au n⁰ précédent. En effet rappelons-nous que la projection S d'une $F_2^{2\cdot 2}$ quelconque Γ a deux droites doubles d_1, d_2 lorsque la variété φ du faisceau déterminé par Γ, laquelle passe par le centre de projection P est un cône de 1ᵉ espèce: l'espace π tangent en P à φ coupe alors ce cône suivant deux plans et coupe Γ suivant deux coniques k_1^2, k_2^2 situées dans ces plans et dont les projections sont justement les deux droites d_1, d_2, qui seront doubles pour S, car chaque point de l'une d'elles est la projection de deux points de la conique correspondante. On voit donc que l'une d de ces deux droites deviendra une droite cuspidale si la conique correspondante k^2 se réduit à une droite r comptée deux fois et seulement alors; dans ce cas le plan de cette conique devient un plan tangent à Γ tout le long de la droite r, et vice-versa si Γ a un tel plan qui la touche le long d'une droite r et l'on projette Γ par un point quelconque P de ce plan (plan qui appartiendra nécéssairement à un cône de 1ᵉ espèce du faisceau), la surface projection S aura une droite cuspidale d dans la projection de cette droite (comme on peut encore se convaincre en remarquant qu'un espace quelconque mené par P coupera Γ en une quartique ayant dans le point d'intersection avec r une tangente qui passe par P, de sorte que dans R_3 chaque plan coupera S en une quartique ayant sur d un point stationnaire). Or on voit facilement que Γ ne peut avoir un tel plan tangent le long d'une droite que lorsqu'elle a deux points doubles (distincts ou coincidents) joints par cette droite. Chacun de ces deux points sera le sommet d'un cône de 1ᵉ espèce du faisceau, ou bien un point de l'arête d'un cône de 2ᵉ espèce: d'où il suit que le cas le plus général dans lequel ce fait a lieu est celui dans lequel Γ a la caractéristique $\{2\,2\,1\}$, mais qu'en outre cela arrive dans les cas plus particuliers $\{3\,2\}$, $\{4\,1\}$, $\{5\}$, $\{(1\,1)\,2\,1\}$, $\{(1\,1)\,3\}$, $\{(2\,1)\,2\}$, $\{(3\,1)\,1\}$, $\{(4\,1)\}$, $\{(1\,1)(1\,1)\,1\}$, $\{(2\,1)(1\,1)\}$.

Quant à la classe de chacune des surfaces à droite cuspidale, que nous obtiendrons ainsi, comme pour les obtenir il suffit de prendre le centre de projection sur un certain plan, nous voyons (en appliquant le principe exposé à la fin du n⁰ 29) que la classe sera la même que pour la projection la plus générale de la $F_2^{2\cdot 2}$ que l'on considère; c'est-à-dire le fait qu'une conique double se décompose en deux droites ne produit aucun abaissement de classe, même lorsque l'une de ces droites devient cuspidale.

Dans notre cas $\{2\,2\,1\}$ la droite r de Γ, qui joint les deux points doubles de cette surface M, M', a en effet un plan tangent qui, comme

nous avons vu (n° 37), appartient au cône ψ, de sorte qu'en prenant P sur ce plan, la surface S à droite cuspidale d (projection de r) que l'on obtiendra sera un cas particulier de la surface $[\bar{1}22]$ étudiée au n° précédent, et précisément le cas particulier que l'on obtient en supposant que la droite joignant les deux points coniques de cette surface aille coincider avec celle des deux droites doubles qu'elle ne coupe pas, dans lequel cas cette droite double devient une droite cuspidale. Les deux points D, D' de cette droite cuspidale d de notre surface S, qui sont les projections de M, M', jouiront de la propriété que chaque plan passant par l'un d'eux coupera S en une quartique ayant en ce point non plus seulement un point stationnaire, mais un point de contact de deux branches, car une telle courbe est la projection de l'intersection de Γ avec un espace passant par PM (ou PM'), intersection qui a évidemment un point double en M avec les deux tangentes dans un plan par PM, c'est-à-dire dans le plan d'intersection de cet espace avec l'espace tangent en M à toutes les variétés du faisceau. Cet espace fixe coupe Γ en la droite r et en deux autres droites passant par M. Donc: *les deux points singuliers D, D' de la droite cuspidale d de S sont tels que chaque plan passant par l'un d'eux coupe la surface en une courbe ayant en ce point un point de contact de deux branches, dont la tangente appartient à un plan singulier de ce point, plan qui coupe la surface suivant la droite d et deux autres droites passant par ce point.* En conséquence D et D' sont deux *points-clos* de la droite cuspidale d. Un autre point remarquable de cette droite est le point d'intersection avec la droite double: chaque section plane de S passant par ce point y a un point de rebroussement de 2e espèce. — Quant à la droite double elle n'a outre celui-ci qu'un seul point remarquable (point-pince), car l'un de ses deux points-pinces est venu coincider dans ce cas avec le point d'intersection des deux droites singulières: en effet l'une des tangentes menées par P à la conique de Γ dont cette droite double de S est la projection coincide avec la génératrice de ψ passant par P.

En un point quelconque de la droite cuspidale d le plan tangent, c'est-à-dire le plan des tangentes triponctuelles, passe par d et coupe encore S en une conique tangente en ce point à d (comme on voit en remarquant que ce plan est l'intersection de R_3 avec l'espace tangent à ψ dans le point correspondant de r): les points et les plans de d se correspondent ainsi projectivement, et les plans contiennent une série de coniques de S; la série conjuguée se trouve dans les plans passant par la droite double. Enfin les points-clos D, D' sont les sommets de deux cônes de Kummer singuliers auxquels correspondent deux autres couples de séries de coniques. Outre les droites déjà nommées la surface S contient deux autres couples de droites dans deux plans passant par la droite double.

41. $[\bar{2}\,2\,1]$ *Surface de la 8^e classe à point conique et deux droites doubles se croisant en un point triple.* Par le point triple passent 3 droites simples de la surface dont une joignant ce point au point conique, et le long de laquelle la surface a un plan tangent constant. Par le point conique passent deux autres droites de la surface, qui sont respectivement dans les deux plans qui joignent les droites doubles au point conique; et la surface contient encore d'autres 4 droites qui sont dans les plans joignant les droites doubles aux deux droites qui passant par le point triple sans passer par le point conique. Il y a deux cônes de Kummer, dont l'un singulier ayant le sommet dans le point conique de la surface, et dont l'autre n'est pas singulier et a son sommet en un point du plan tangent à la surface le long de la droite joignant le point triple et le point conique (et est tangent à ce plan). La surface a une inversion fondamentale dont le centre est le sommet du cône de Kummer non singulier et dont la quadrique directrice est un cône passant par le point conique de la surface. Elle est la transformée par inversion conique d'une quadrique passant par le sommet du cône directeur de cette inversion.

Notre méthode nous donnerait 3 espèces de représentations planes des quatre surfaces que nous avons obtenues de la surface Γ ayant pour caractéristique $\{2\,2\,1\}$, car cour projeter Γ sur un plan nous pouvons choisir comme axe de projection ou la droite qui joint ses deux points coniques, ou une autre droite passant par l'un de ces points, ou enfin une droite de Γ ne passant par aucun point double. Mais nous nous abstiendrons dorénavant de donner les représentations des différentes surfaces que nous étudiérons, car cela allonguerait outre mesure notre travail et d'ailleurs nous avons déjà montré assez par les représentations planes que nous avons faites des surfaces $[1\,1\,1\,1\,1]$, $[\bar{1}\,1\,1\,1\,1]$, $[2\,1\,1\,1]$, $[\bar{1}\,2\,1\,1]$, $[\bar{2}\,1\,1\,1]$ comment notre méthode s'applique facilement à trouver ces représentations: cependant nous donnerons à la fin les représentations de trois surfaces (dont la plus générale est celle de Steiner), dont la représentation plane n'est plus que du second ordre.

$\{3\,1\,1\}$.

42. Nous avons vu (n° 26) que pour la surface Γ ayant cette caractéristique il y a un point double M, sommet d'un cône f du faisceau tel que l'espace tangent en M à toutes les variétés de ce faisceau touche aussi f le long d'une génératrice et le coupe en conséquence en deux plans générateurs μ_1, μ_2, dans lesquels se décomposera donc dans ce cas le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ. Chacun de ces plans coupe (une et en conséquence toutes) les variétés du faisceau en deux droites, de sorte que par M passent 4 droites de

Γ dont deux, $r_1 r_1'$, sont dans l'un μ_1 de ces plans, et deux, $r_2 r_2'$, dans l'autre plan μ_2. Par r_1, r_1' passent deux plans générateurs de f de même système que μ_2, et par r_2, r_2' passent deux plans générateurs de même système que μ_1: ces 4 plans coupent encore Γ suivant 4 droites ne passant plus par M et que nous appellerons respectivement s_1, s_1' et s_2, s_2'. Comme ces deux couples de plans générateurs de f sont de différents systèmes on voit que chacune des droites s_1, s_1' coupera chacune des droites s_2, s_2'. La surface Γ contient donc 8 droites. Les deux autres cônes du faisceau touchent aussi en M le même espace et ont les plans $r_1 r_2$, $r_1' r_2'$, $s_1 s_2$, $s_1' s_2'$ pour l'un, et les plans $r_1 r_2'$, $r_1' r_2$, $s_1 s_2'$, $s_1' s_2$ pour l'autre, pour plans générateurs.

43. [3 1 1] *Surface de la 9e classe à conique double générale et un point biplanaire de la 1e espèce.* Par le point biplanaire D passeront deux couples de droites de la surface appartenant respectivement aux deux plans *nodaux* de D (plans des tangentes triponctuelles): et la surface contiendra encore deux autres couples de droites coupant respectivement celles-ci et se coupant mutuellement de la même manière que les droites de Γ. Il y aura deux cônes de Kummer non singuliers avec deux couples de séries de coniques de la surface: dans chacune de ces séries de coniques il y en aura une décomposée en deux droites passant par D et une autre décomposée dans les deux droites de la surface qui ne coupent pas celles-ci. Il y a en outre un cône de Kummer singulier ayant le sommet en D et qui touche les deux plans nodaux dans les deux tangentes quadriponctuelles du point D. Dans chacune des deux séries de coniques qui lui correspondent il y en a une décomposée dans les deux droites d'un plan nodal et deux décomposées en une droite de l'autre plan nodal et la droite qui la coupe sans passer par D. Ces deux séries de coniques passent par D et y touchent respectivement les deux plans nodaux.

Considérée comme une cyclide, cette surface a deux sphères directrices d'inversions fondamentales proprement dites (ayant leurs centres dans les sommets des deux cônes de Kummer non singuliers) et une sphère directrice réduite à un cône ayant le sommet en D. Des 3 quartiques focales les deux qui appartiennent aux premières sphères ont pour caractéristique [3 1], c'est-à-dire ont un point de rebroussement en D, tandis que l'autre ayant pour caractéristique [$\bar{2}$ 1 1] a seulement un point double en D. Les quadriques déférentes des deux premières les osculent donc en D, tandis que la quadrique déférente de l'autre sphère ne fait que passer par D. — Cette cyclide s'obtient par inversion d'un paraboloïde.

44. [$\bar{1}$ 3 1] *Surface de la 9e classe à deux droites doubles et un point biplanaire de la 1e espèce.* Par le point biplanaire D passent encore

deux couples de droites r_1, r_1' et r_2, r_2' dans les deux plans nodaux, et r_1, r_2, par exemple, coupent une droite double, tandis que r_1', r_2' coupent l'autre droite double. Des autres 4 droites de la surface, deux, s_1, s_2 coupent la seconde droite double (et respectivement r_1, r_2) et les deux autres s_1', s_2' la premiére (et respectivement r_1', r_2'). Il y a un cône de Kummer non singulier et un singulier ayant le sommet en D. La surface a deux inversions fondamentales, dont l'une a pour centre le sommet du premier cône de Kummer et pour quadrique directrice un cône passant par D, et l'autre a pour centre le point d'intersection des deux droites doubles et pour quadrique directrice une quadrique passant aussi par D (et, comme toujours, sans que nous nous arrêtions à le dire, par ces droites doubles). — On obtient une telle surface en transformant par inversion conique une quadrique tangente au plan de l'absolu de cette inversion.

45. $[\bar{3}11]$ *Surface de la 9e classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Cette surface s'obtient, comme le montre sa caractéristique, en projetant Γ par un point du cône f. Les tangentes quadriponctuelles dans le point triple D (projection de M) d'intersection des deux droites doubles d_1, d_2 appartiennent au plan de celles-ci, ou bien à deux autres plans qui passent respectivement par ces droites doubles et sont les projections de μ_1, μ_2: c'est pour cela que nous appelons *triplanaire* ce point triple (nous rencontrerons d'ailleurs plusieurs espèces de points triples dont le cône tangent du 3e ordre se décompose en 3 plans). Dans ces deux autres plans il y a deux autres couples de droites de la surface $r_1 r_1'$ et $r_2 r_2'$ passant par D, et la surface contient encore 4 autres droites $s_1 s_1'$ et $s_2 s_2'$ dans les plans qui joignent d_2 à r_1, r_1' et d_1 à r_2, r_2'. Les coniques de la surface situées dans les plans passant par d_1 ou par d_2 passent toutes par le point triple et y touchent respectivement les deux plans singuliers nommés qui contiennent d_2 et d_1. Il y a deux cônes de Kummer non singuliers et en conséquence deux couples de séries de coniques sur la surface (outre les séries des coniques appartenant aux plans qui passent par d_1 ou par d_2). Il y a deux inversions coniques fondamentales ayant pour centres les sommets des deux cônes de Kummer.

$\{32\}$.

46. La surface Γ ayant cette caractéristique a deux points doubles M, M', dont l'un M est le sommet d'un cône f du faisceau tangent à l'espace qui touche en M toutes les variétés du faisceau, tandis que M' est le sommet de l'autre cône f' du faisceau et ne fait que se trouver sur les autres variétés. Il s'ensuit que le cône quadrique

ordinaire tangent à Γ en M' ne se décompose pas, tandis que le cône tangent en M se décompose en deux plans μ_1, μ_2. Et comme la droite MM' est contenue dans Γ et en conséquence dans l'un μ_1 de ces deux plans, et l'espace tangent en M au faisceau touche f' le long de MM' et le coupe en conséquence suivant deux plans passant par MM' et coupant encore μ_2 en deux droites, il s'ensuit que par le point M passent la droite MM', le long de laquelle Γ a un plan tangent fixe μ_1, et deux autres droites $r r_1$ de la surface Γ situées dans le plan μ_2; et de même on voit que par M' passe seulement une autre droite r' de Γ outre MM'. Le plan générateur de f de même système que μ_2 et qui passe par MM' contient la droite r'; les plans générateurs de f de même système que μ_1 et qui passent par r et r_1 contiendront encore deux droites s et s_1 de Γ, lesquelles seront aussi dans les deux plans générateurs de f' qui passent par r'. Ce sont là toutes les droites de Γ.

47. [3 2]. *Surface de la 7e classe à conique double générale, un point conique et un point biplanaire de la 1e espèce.* La droite qui joint ces deux points doubles appartient à la surface et a dans tous ses points un même plan tangent, qui est un plan nodal pour le point biplanaire: l'autre plan nodal contient les deux autres droites de la surface qui passent par ce point. Par le point conique il ne passe plus qu'une autre droite de la surface; celle-ci contient en outre deux autres droites coupant cette dernière droite et respectivement ces deux-là. Il y a seulement deux cônes de Kummer singuliers ayant leurs sommets dans les deux points doubles (et touchant toujours le cône nodal et le couple de plans nodaux de ces deux points dans leurs couples de tangentes quadriponctuelles), et à chacun desquels correspond un couple de séries de coniques de la surface; et on voit par ce que nous avons dit au n⁰ précédent combien de coniques décomposées en deux droites il y a dans chaque série.

Considérée comme cyclide, cette surface n'a pas d'inversions fondamentales propres; mais dans les deux sphères (directrices) nulles ayant leurs centres dans le point biplanaire et dans le point conique il y a les deux quartiques focales de la surface, qui auront pour caractéristiques $[\bar{2}\,2]$ et $[3\,\bar{1}]$ et seront en conséquence l'une décomposée en une droite et une cubique passant toutes les deux par les deux points doubles, l'autre une quartique ayant un point de rebroussement dans le point biplanaire. On voit par là quelles positions particulières auront les deux quadriques déférentes qui correspondent à ces sphères nulles, puisqu'elles les coupent justement dans ces quartiques. — Cette cyclide est la transformée par inversion d'une quadrique osculant l'absolu (c'est-à-dire coupant le plan à l'infini suivant une conique ayant un

contact triponctuel avec l'absolu), et aussi d'un paraboloïde dont une des génératrices à l'infini soit tangente à l'absolu.

48. [$\bar{2}3$]. *Surface de la* 7ᵉ *classe à point biplanaire de la* 1ᵉ *espèce et deux droites doubles se croisant en un point triple.* Le point triple a, outre le plan des droites doubles, un cône quadrique de tangentes quadriponctuelles: ce cône contient la droite de la surface joignant ce point triple au point biplanaire et en outre une autre droite simple de la surface. La surface a le long de la première droite un seul plan tangent, qui est un plan nodal pour le point biplanaire: l'autre plan nodal contient deux autres droites de la surface passant par ce point et coupant respectivement les deux droites doubles. Les plans qui joignent celles-ci à la seconde droite simple passant par le point triple coupent encore la surface en deux autres droites. — Il y a un cône de Kummer singulier ayant le sommet dans le point biplanaire et auquel correspondent deux séries de coniques de la surface; il n'y a pas d'inversions fondamentales. On a cette surface par une inversion conique sur une quadrique passant par le sommet du cône directeur et tangente (ailleurs) au plan d'inversion.

49. [$\bar{3}2$]. *Surface de la* 7ᵉ *classe à point conique et deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Dans le point triple D (projection de M) les tangentes quadriponctuelles forment outre le plan des deux droites doubles d_1, d_2 deux plans δ_1, δ_2 passant respectivement par celles-ci et dont l'un δ_1 touche la surface le long de la droite qui joint D au point conique D' (projection de M') et l'autre δ_2 contient deux autres droites $r\, r_1$ de la surface passant par D. Le plan joignant la droite DD' à la droite double d_2 coupe encore la surface en une autre droite r' passant par D'; les plans $d_1 r$, $d_1 r_1$ contiennent enfin les deux dernières droites de la surface. Celle-ci a un cône de Kummer singulier dont le sommet est dans le point conique D'. Elle est la transformée par inversion conique d'une quadrique tangente dans le sommet du cône directeur à l'une des deux génératrices de ce cône formant l'absolu de l'inversion.

50. *Surface de la* 7ᵉ *classe à droite double et droite cuspidale se croisant en un point triple.* On obtient (v. n⁰ 40) cette surface S, qui est un cas particulier de celle considérée au n⁰ précédent (le cas dans lequel la droite DD' joignant le point conique avec le point triple va coincider avec la droite double d_2), en projetant Γ par un point P du plan μ_1 tangent à Γ la long dela droite MM'. Alors cette droite sera projetée suivant la droite cuspidale de S, le point M' suivant un point-clos de cette droite et M suivant le point triple (dans lequel

se confondra l'autre points-clos de la droite cuspidale de la surface générale, étudiée au n° 40, douée d'une droite double et une droite cuspidale). Le premier point aura un plan singulier coupant la surface en la droite cuspidale comptée 3 fois et en une droite simple passant par ce point: dans ce plan coincident donc à présent les plans tangents à la surface dans les différents points de la droite cuspidale (ce que l'on peut aussi voir directement par notre méthode). Quant au point triple, remarquons qu'un espace quelconque passant par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point double dont une tangente est sur μ_1, c'est-à-dire est PM même, et l'autre est sur μ_2, de sorte qu'en projetant nous avons que: *chaque section plane de S passant par le point triple a dans ce point un point triple, par lequel passe une branche formant un point stationnaire dont la tangente appartient au plan des deux droites doubles, et une autre branche simple dont la tangente appartient à un plan singulier qui passe par la droite cuspidale et coupe encore la surface suivant deux droites passant par le point triple.* Toutes les coniques de S dans les plans qui passent par la droite double ont en ce point pour tangentes les droites de ce plan singulier; et toutes les coniques de S dans les plans qui passent par la droite cuspidale sont tangentes à cette droite dans le point triple de la surface. Outre les droites nommées la surface contient encore 2 droites, etc.

{4 1}.

51. Le point double M de la surface Γ ayant cette caractéristique est le sommet d'un cône f du faisceau tel que l'espace tangent en M à toutes les variétés de celui-ci touche aussi ce cône f le long d'une droite r appartenant à Γ et coupe en conséquence ce cône dans les deux plans générateurs μ_1, μ_2, qui passent par cette droite: ceux-ci seront les deux plans tangents à Γ dans ce point double et couperont encore Γ respectivement suivant deux droites r_1, r_2 passant par M, de sorte que par M passent 3 droites r et r_1, r_2 de Γ. Dans les deux autres plans générateurs de f qui passent par r_1, r_2 il y aura encore 2 droites s_1, s_2 de Γ se coupant entre elles. L'autre cône du faisceau a un plan générateur tangent à Γ le long de la droite r, un autre, du même système, contenant les deux droites s_1, s_2 et un troisième, de l'autre système, contenant r_1, r_2.

52. [4 1]. *Surface de la 8e classe à conique double générale et un point biplanaire de la 2e espèce.* Outre que par l'abaissement qu'il produit dans la classe de la surface, le point biplanaire D de cette surface et de la surface que nous considérerons ensuite diffère de ceux des surfaces [3 1 1], [$\bar{1}$ 3 1] en ce que par ce point D il ne passe plus

4 droites de la surface, mais seulement 3, l'une desquelles est l'intersection r des deux plans nodaux, tandis que les autres sont deux droites r_1, r_2 appartenant respectivement à ces deux plans. La surface a un seul plan tangent le long de r, et elle contient encore 2 droites s_1, s_2 coupant respectivement r_1, r_2 et se coupant entre elles. Il y a un cône de Kummer singulier ayant le sommet dans le point biplanaire (et tangent aux deux plans nodaux dans les tangentes quadriponctuelles): parmi les deux séries de coniques qui lui correspondent l'une contient les couples de droites rr_1 et r_2s_2, l'autre contient les couples rr_2 et r_1s_1. Il y a encore un cône de Kummer non singulier, qui est tangent au plan touchant la surface le long de r et auquel correspondent deux séries de coniques, dont l'une contient la droite r comptée deux fois et le couple de droites $s_1 s_2$, tandis que l'autre contient seulement le couple $r_1 r_2$.

Comme cyclide cette surface a une sphère directrice d'une inversion fondamentale proprement dite ayant le centre dans le sommet de ce dernier cône de Kummer et coupant sa quadrique déférente suivant une quartique focale, dont la caractéristique est [4] et qui se décompose en conséquence dans la droite r et une cubique tangente en D à r. Le point biplanaire D est le centre d'une autre sphère directrice nulle, qui coupe sa quadrique déférente en une quartique focale $[\bar{3}\,1]$, c'est-à-dire ayant un point de rebroussement en D. — On obtient cette cyclide en transformant par inversion un paraboloïde dont le point de contact avec le plan à l'infini soit sur l'absolu.

53. $[\bar{1}\,4]$. *Surface de la 8e classe à point biplanaire de la 2e espèce et deux droites doubles.* Par le point biplanaire passent encore 3 droites de la surface, dont l'une a un seul plan tangent, qui passe par une droite double, et les deux autres sont dans un même plan avec l'autre droite double. Par la première droite double passe encore un plan coupant la surface en deux droites qui s'appuient respectivement sur ces deux-là. Il y a seulement un cône de Kummer singulier ayant le sommet dans le point biplanaire, et une inversion fondamentale dont la quadrique directrice passe par ce point et dont le centre est le point d'intersection des droites doubles. — Cette surface est la transformée par inversion conique d'une quadrique tangente au plan d'inversion en un point de l'une des deux droites qui forment l'absolu.

Si Γ est projetée par un point du plan tangent le long de r, on obtient comme cas particulier de la surface $[\bar{1}\,4]$ une *surface de la 8e classe à une droite double et une droite cuspidale*, qui s'obtient de celle générale étudiée au n° 40 en supposant que les deux points-clos ordinaires DD' de la droite cuspidale de cette surface-là coincident en un seul. Alors le plan singulier de ce point coupe la surface en

deux droites passant par ce point-même et la surface n'a plus que deux autres droites situées dans un plan qui passe par la droite double. Il y a un cône de Kummer ayant le sommet dans ce point-clos, etc.

54. $[\bar{4}\,1]$. *Surface de la 8e classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Le point triple de cette surface se distingue de celui de la surface $[\bar{3}\,1\,1]$ par exemple, en ce qu'il a, outre le plan des deux droites doubles d_1, d_2, deux autres plans de tangentes quadriponctuelles passant respectivement par celles-ci et se coupant en une droite r de la surface: ces deux plans contiennent encore respectivement deux droites r_1, r_2 de la surface, et les plans $d_2 r_1$, $d_1 r_2$ coupent encore celle-ci suivant deux droites s_1, s_2 se coupant entre elles. La surface a un cône de Kummer non singulier et dans les deux séries de coniques qui lui correspondent l'une contient la droite r comptée deux fois (dans un plan qui touche la surface le long de r) et le couple de droites $s_1 s_2$, l'autre série contient le couple $r_1 r_2$. La surface a une inversion conique fondamentale dont le centre est le sommet de ce cône de Kummer.

{5}.

55. La surface Γ ayant cette caractéristique appartient à un seul cône quadrique f, qui touche l'espace tangent dans son sommet M à toutes les variétés quadratiques du faisceau (Γ) le long d'une droite r de Γ et le coupe en outre en deux plans μ_1, μ_2 passant par r et dont l'un μ_1 touche Γ tout le long de cette droite r, tandis que l'autre μ_2 coupe encore Γ suivant une autre droite r' passant par M. Par celle-ci il passe encore un autre plan générateur de f (de même système que μ_1), lequel coupera encore Γ suivant une autre droite s qui ne passe pas par M. La surface Γ n'a que ces 3 droites r, r', s.

56. [5]. *Surface de la 7e classe à conique double générale et un point biplanaire de la 3e espèce.* Le point biplanaire D de cette surface a non seulement, comme le point biplanaire de la surface [4 1], une droite r de la surface pour intersection des deux plans nodaux, mais en outre pour l'un de ces deux plans le plan tangent à la surface le long de r. Seulement l'autre plan nodal contient encore une droite r' passant par D; la surface a enfin une troisième droite s qui coupe r'. Elle n'a qu'un cône de Kummer singulier dont le sommet est le point biplanaire: des deux séries de coniques qui lui correspondent l'une contient la droite r comptée deux fois et le couple $r's$, tandis que l'autre contient seulement le couple rr'.

Comme cyclide cette surface n'a qu'une quartique focale sur la sphère nulle ayant le centre en D: cette quartique ayant la caractéristi-

que $[\bar{4}]$ se décompose en la droite r et une cubique qui la touche en D. Il n'y a pas d'inversion fondamentale, mais cette sphère (directrice) a une quadrique déférente contenant cette quartique focale et qui est, comme en général, le lieu des centres des sphères passant par D et coupant la cyclide suivant des couples de cercles. — On obtient cette cyclide en transformant par inversion un paraboloïde dont une des génératrices à l'infini touche l'absolu dans le point d'intersection avec l'autre.

57. $[\bar{5}]$. *Surface de la 7ᵉ classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Des deux plans de tangentes quadriponctuelles dans le point triple de cette surface, autres que le plan des deux droites doubles, l'un passe par une droite double d_1 et touche la surface le long d'une autre droite r passant par le point triple, tandis que l'autre joint la seconde droite double d_2 à r et coupe encore la surface en une autre droite r' passant par ce point. La plan $d_1 r'$ coupe enfin la surface en une troisième droite simple s. Cette surface n'a aucun cône de Kummer et ne contient en conséquence d'autres coniques que celles qui appartiennent aux plans passant par l'une ou l'autre des deux droites doubles.

Comme cas particulier de cette surface on a, en supposant que le centre de projection de Γ soit pris sur μ_1, une *surface de la 7ᵉ classe à droite double et droite cuspidale se coupant en un point triple;* surface qui n'est qu'un cas particulier de celle étudiée au nº 50: le cas dans lequel le point-clos qu'il y avait sur la droite cuspidale se confond avec le point triple. Ce point triple jouira encore des mêmes propriétés, mais le plan singulier dont nous parlions alors coupera maintenant la surface dans la droite cuspidale comptée 3 fois (le long de laquelle il sera donc le plan tangent constant) et une droite simple passant par le point triple. Dans le plan qui joint cette droite à la droite double il y aura encore une deuxième droite simple de la surface.

Nous avons ainsi fini d'étudier toutes les espèces de surfaces qui sont des projections de $F_2^{2 \cdot 2}$ contenues dans des faisceaux de variétés quadratiques dans lesquels tous les cônes sont de 1ᵉ espèce. Nous allons maintenant nous occuper des autres espèces de surfaces.

Propriétés des espèces de surfaces douées de couples de points doubles.*)

58. Considérons les projections de ces surfaces Γ, qui sont l'intersection d'un faisceau de variétés quadratiques dans lequel il y a un

*) Par *couple* de points doubles nous entendrons deux points doubles (distincts ou coincidents) joints par une droite qui n'appartient pas à la surface: nous verrons qu'en effet deux tels points doubles s'obtiennent ensemble, comme couple de points.

cône de 2e espèce, et dont la caractéristique contient en conséquence un couple d'exposants de diviseurs élémentaires correspondant tous les deux à ce cône.

Un cône de 2e espèce f contient ∞^1 plans générateurs formant un seul système et passant tous par la droite double ou *arête* de ce cône. Ces plans coupent une autre variété du faisceau, et en conséquence aussi la surface Γ en ∞^1 coniques *formant une seule série* (tandis que les plans générateurs d'un cône de 1e espèce du faisceau donnent lieu à deux séries de coniques): toutes ces coniques passent par les points d'intersection de l'arête du cône avec une autre variété du faisceau, c'est-à-dire avec Γ. Ces points d'intersection sont deux si le groupe de la caractéristique qui correspond à ce cône est $(1\,1)$, ils coincident en un seul si ce groupe est $(2\,1)$, $(3\,1)$, ou $(4\,1)$, et enfin ils sont tous les points de l'arête lorsque la caractéristique est $\{(2\,2)\,1\}$ ou bien $\{(3\,2)\}$ *). Dans ces deux derniers cas l'arête étant contenue dans Γ, tous les plans générateurs du cône coupent Γ en cette arête et en une autre droite, de sorte que la surface Γ contient (non plus ∞^1 coniques proprement dites mais) ∞^1 droites appuyées sur l'arête, c'est-à-dire elle est *réglée*. Dans les autres cas au contraire on voit facilement que le nombre des droites contenues dans Γ est fini et on peut aussi construire ces droites sans peine.

En effet remarquons avant tout qu'un point de l'arête qui appartienne aussi à Γ en sera un point double; d'où il suit que les surfaces réglées $\{(2\,2)\,1\}$ et $\{(3\,2)\}$ ont une droite double et que toutes les autres surfaces Γ, dont nous nous occupons à-présent, ont sur l'arête du cône de 2e espèce un couple de points doubles, qui peuvent aussi devenir infiniment voisins. Or une droite de Γ doit nécésairement couper cette arête, car autrement l'espace qui la joindrait à l'arête appartiendrait à ce cône f, c'est-à-dire celui-ci se décomposerait en deux espaces, ce que nous excluons. Donc dans les cas $\{(2\,2)\,1\}$, $\{(3\,2)\}$ nous pouvons dire que toutes les droites de la surface Γ, sans excéptions, couperont sa droite double; dans les autres cas que toutes les droites de Γ passent par l'un ou l'autre des deux points doubles situés sur l'arête du cône de 2e espèce. Soit M l'un de ces deux points: les droites de Γ qui y passent s'obtiennent encore comme lorsqu'il s'agissait d'un point double de Γ appartenant comme sommet à un cône de 1e espèce du faisceau. L'espace tangent en M commun à toutes les variétés du faisceau les coupe en un faisceau de cônes ordinaires ayant le sommet en M: les 4 génératrices, distinctes ou non, communes à ces

*) Nous renverrons encore pour cette proposition et pour d'autres, que nous énoncerons bientôt et dont la demonstration ne présente d'ailleurs aucune difficulté à notre mémoire *Studio sulle quadriche*, etc. déjà cité.

cônes seront les droites de Γ qui passent par M. Parmi ces cônes celui d'intersection de cet espace tangent avec f est le *cône quadrique tangent* en M à Γ. Nous voyons donc que, excepté dans les cas $\{(2\,2)\,1\}$, $\{(3\,2)\}$, que nous exclurons dorénavant, la surface Γ ne peut avoir plus que 8 droites, et que chaque droite de Γ doit passer par l'un ou par l'autre des deux points doubles de Γ situés sur l'arête de f, de manière que par chacun de ceux-ci il en passe en général et au plus 4. Ajoutons que les droites de l'un et de l'autre groupe sont par couples sur autant de plans générateurs de f et forment dans la série de coniques de Γ, que nous avions considérée, autant de coniques décomposées en des couples de droites.

59. En projetant ces surfaces Γ sur R_3 nous obtenons des surfaces S du 4^e ordre ayant deux points doubles, distincts ou coincidents, tels que la droite qui les joint (projection de l'arête a de f) *n'appartient pas* à ces surfaces (tandis que pour les deux points doubles des surfaces $[2\,2\,1]$, $[3\,2]$, etc. nous avons vu que la droite qui les joint appartient à celles-ci). Ces surfaces S auront une conique double générale ou bien décomposée en deux droites suivant que le centre de projection P est sur une variété quelconque du faisceau (Γ) ou bien sur un cône de 1^e espèce. Mais ici il se présente encore un autre cas que nous n'avions pas à considérer pour les espèces de surfaces déjà étudiées: celui dans lequel le centre de projection P se trouve sur un cône de 2^e espèce f du faisceau. Dans ce cas par le point P il ne passe plus qu'un seul plan générateur de f: le plan qui le joint à l'arête a de f. Ce plan coupe Γ suivant une conique qui est projetée par P sur R_3 suivant une droite d de S, droite dont chaque point correspondra à deux points de cette conique et qui sera en conséquence double pour S. Pour mieux voir le caractère de cette droite double d de S cherchons l'intersection de S avec un plan quelconque de R_3: elle est la projection de l'intersection de Γ avec un espace quelconque passant par P. Un tel espace coupe f suivant un cône quadrique ordinaire passant par P, et Γ suivant une quartique de 1^e espèce située dans ce cône. La génératrice de ce cône qui passe par P coupe la quartique en deux points dont les tangentes à cette courbe sont dans le plan tangent à ce cône le long de cette génératrice, plan qui appartient à l'espace π tangent à f en P (c'est-à-dire le long du plan générateur Pa): donc la projection de cette quartique est une courbe plane du 4^e ordre ayant dans le point d'intersection de son plan avec d un point de contact de deux branches, dans lequel la tangente commune aux deux branches appartient à un plan fixe ϱ passant par d (le plan d'intersection de l'espace π avec R_3). Cela nous montre que la droite double d de S est la limite de deux droites doubles

qui dans le plan ϱ viennent coincider l'une avec l'autre: ce qui nous est confirmé par ce fait que lorsque le centre P de projection est sur un cône de 1^e espèce la surface S projection de Γ a deux droites doubles, intersections de R_3 avec les deux plans générateurs de ce cône qui passent par P, et que si ce cône devient de 2^e espèce les deux systèmes de plans générateurs, et en conséquence aussi ces deux plans passant par P, viennent coincider, et les deux droites doubles de S coincideront aussi entre elles. Nous appellerons en conséquence et pour abréger *bidouble* la droite double particulière d de S.

Elle contient deux points triples, distincts ou coincidents, qui sont les projections des deux points doubles de Γ appartenant à l'arête a de f. Comme les plans générateurs de f coupent Γ suivant des coniques passant par ces deux points, de même les plans menés par la droite bidouble d coupent S, outre que dans cette droite, suivant des coniques passant par les deux points triples; pour le plan ϱ tangent à S le long de d l'intersection avec la surface se compose de la droite d comptée 4 fois. Parmi les plans passant par d il y en a 4 dans le cas le plus général $[(\overline{1\,1})\,1\,1\,1]$ qui coupent S en des coniques décomposées en deux droites.

Outre les deux points triples il y a encore sur d deux points remarquables: ceux dans lesquels R_3 est coupé par les tangentes menées de P à la conique d'intersection de Γ avec le plan Pa. Chaque espace passant par l'une de ces tangentes coupe Γ en une quartique située sur un cône ordinaire dont cette droite est une génératrice tangente à la quartique; donc en projetant: *il y a sur la droite bidouble de S deux points-pinces tels que chaque section plane passant par l'un d'eux y a un point de rebroussement de 2^e espèce.* — Ces deux points-pinces coincident si P est sur l'un des plans générateurs de f qui coupent Γ en un couple de droites: alors deux droites de S se confondent avec d.

60. En supposant maintenant que le centre de projection P soit sur une variété φ du faisceau générale ou réduite à un cône de 1^e ou de 2^e espèce nous appellerons M', M'' les deux points d'intersection (distincts ou coincidents) de l'arête a de f avec Γ et D', D'' leurs projections sur R_3, qui sont des points doubles (ou triples) de S, points qui sont joints par une droite d qui ne cesse d'être déterminée, même lorsqu'ils viennent coincider, puisque cette droite est la projection de l'arête a. Cela posé remarquons que le système des ∞^2 espaces tangents à une F_3^2 qui soit un cône se réduit, lorsque ce cône passe de la 1^e espèce à la 2^e, au système des espaces passant par l'arête de ce cône, car chacun de ces espaces coupe le cône de 2^e espèce en un couple de ses plans générateurs. Les ∞^1 espaces tangents (en un sens plus étroit) au cône de la 2^e espèce f le coupent chacun en un plan

générateur compté deux fois et touchent en conséquence la surface Γ le long de coniques. En considérant donc les intersections de ces systèmes de ∞^2 et de ∞^1 espaces avec φ et avec Γ et en projetant par P nous voyons que, comme pour chaque cône quadrique de 1e espèce passant par Γ on obtient dans R_3 une série de ∞^2 quadriques passant par la conique double et doublement tangentes à S, ou, pour mieux dire, coupant encore S suivant des couples de coniques, de même pour un cône quadrique de la 2e espèce f on a que: *Chacune des ∞^2 quadriques passant par la conique double et par les deux points doubles D', D'' de S coupe encore cette surface en deux coniques passant par ces points doubles.* Et en particulier *tous les plans qui passent par la droite d joignant ces deux points doubles D', D'' coupent S en des couples de coniques. Toutes les coniques de S ainsi obtenues forment un même système.* Le faisceau de ces plans tient ici la place du système des plans tangents d'un cône de Kummer correspondant à un cône de 1e espèce passant par Γ. — *Parmi les ∞^2 quadriques passant par la conique double et par D', D'' il y en a ∞^1 dont chacune touche la surface S le long d'une conique.* Et comme par chaque point de R_4, et en particulier par le point P, passent en général deux espaces tangents (proprement dits) du cône de la 2e espèce f, nous avons que: *Chacune des surfaces S que nous considérons est l'enveloppe d'un système simplement infini du 2e ordre de quadriques passant par la conique double et par les deux points doubles D', D''. Il y a dans ce système de quadriques deux plans* (avec le plan de la conique double), *c'est-à-dire pour une telle surface S il passe par la droite d deux plans qui la touchent respectivement le long de deux coniques.* Ces deux plans remplacent le cône de Kummer, comme lieu de points*). Ils sont touchés par les deux cônes quadratiques tangents à S en D', D'' suivant deux couples de droites qui sont les tangentes quadriponctuelles de ces points doubles, c'est-à-dire les tangentes en ces points aux deux coniques de contact de ces deux plans avec S.

Nous pouvons aussi voir facilement que la propriété d'être touchées le long d'une conique par une quadrique passant par la conique double caractérise les surfaces S que nous considérons à-présent par rapport à celles déjà étudiées. Car s'il existe pour une surface S une telle quadrique, il y aura dans R_4 un espace coupant Γ en une conique comptée deux fois: cet espace coupera donc le faisceau des F_3^2 passant par Γ en un faisceau de quadriques se touchant le long de cette conique; parmi ces quadriques il y a le plan de celle-ci comptée deux fois: donc parmi ces variétés il y en a une qui est touchée le long de ce plan par cet espace, ce qui ne peut arriver que pour un cône de la 2e espèce.

*) Comme l'a déjà remarqué M. Kummer même.

Les raisonnements faits dans ce n⁰ ont lieu, quelle que soit la position du centre de projection P: cependant si P se trouve sur le cône de 2e espèce f dont il s'agit, ils ne nous donnent pour la surface à droite bidouble que des propriétés que nous connaissions déjà, c'est-à-dire que chaque plan passant par cette droite d coupe encore la surface en une conique, qui ne coincide avec cette droite que pour le plan ϱ.

61. La conique double de S est encore la projection de la quartique d'intersection k^4 de Γ avec l'espace π tangent en P à φ; on trouve encore comme en général les 4 points-pinces de cette conique double, etc., etc. Il y a seulement à remarquer que la cubique gauche qui passait en général par les sommets des cônes de Kummer, par les points diagonaux du quadrangle formé par les 4 points-pinces et par le point d'intersection des plans tangents singuliers de ceux-ci, et qui avait pour cordes les tangentes singulières de ces points, se décomposera (comme il résulte immédiatement de la demonstration que nous avions donnée de cette proposition) en la droite d du couple de points doubles D', D'', droite qui contiendra un de ces points diagonaux et sera coupée par ces 4 tangentes singulières, de sorte qu'il y aura encore une conique contenant les deux autres points diagonaux, les sommets des cônes de Kummer proprement dits et le point d'intersection des plans tangents singuliers des 4 points-pinces, et qui coupera les tangentes singulières de ceux-ci et la droite d. Cette conique se décomposera encore en deux droites si la surface a un autre couple de points doubles semblable à $D'D''$, c'est-à-dire si Γ appartient à deux cônes quadriques de 2e espèce.

62. Dans les cas étudiés les surfaces S avaient un nombre fini d'inversions fondamentales; dans les cas que nous considérons à-présent il y en a au contraire ∞^1. Car nous avons vu qu'on obtenait une quadrique directrice d'une inversion fondamentale en projetant par P sur R_3 l'intersection de φ avec un espace ayant un même pôle par rapport à toutes les $F_3{}^2$ du faisceau. Un tel espace est l'espace polaire d'un point double d'un cône du faisceau. Si donc dans celui-ci il y a un cône de 2e espèce f chaque point de son arête a ayant un seul espace polaire par rapport au faisceau, aux ∞^1 points de a correspondront ∞^1 espaces polaires formant un faisceau d'espaces dont le plan commun, plan polaire de a par rapport à Γ, contient les sommets des autres cônes du faisceau (et, s'il y a encore un autre cône de 2e espèce, l'arête de celui-ci). Parmi ces espaces il y en a deux qui touchent φ (et tout le faisceau) dans les deux points D', D'' et un qui passe par le centre P. Donc:

La surface S a un système de ∞^1 inversions fondamentales: les centres de ces inversions ont pour lieu la droite d, et les quadriques

directrices (par rapport auxquelles ces centres sont les pôles du plan de la conique double) forment un faisceau, car elles passent toutes par la conique double de S et par une conique δ^2 placée dans un plan qui contient les sommets des cônes de Kummer de S. Parmi ces quadriques il y a deux cônes ayant pour sommets les points D', D'' (auxquels correspondent des inversions impropres ayant aussi ces points resp. pour centres) et il y a la quadrique décomposée dans le plan de δ^2 et le plan de la conique double, quadrique dont le centre d'inversion correspondant est sur ce dernier plan. Donc parmi les inversions fondamentales il y a une homologie harmonique, c'est-à-dire la surface S se correspond à soi-même dans une homologie harmonique ayant pour plan d'homologie le plan de δ^2 et pour centre d'homologie le point d'intersection de la droite d avec le plan de la conique double.

Outre ces ∞^1 inversions fondamentales la surface S peut en avoir des autres en nombre fini correspondentement aux sommets des cônes de 1e espèce passant par Γ et aussi un autre système de ∞^1 si Γ est sur deux cônes de 2e espèce. Dans le cas [(1 1) 1 1 1], qui est le plus général pour nos surfaces, il y a outre le système de ∞^1 inversions 3 autres inversions fondamentales. Les quadriques directrices de ces nouvelles inversions fondamentales passeront dans chaque cas par D', D'', car les espaces polaires des sommets (et des points des arêtes) de cônes du faisceau différents de f passent par a.

63. Ces importantes propositions ne cessent de valoir si la conique double de S se décompose, c'est-à-dire si on prend P sur un cône (de 1e ou de 2e espèce) du faisceau des F_3^2. On voit ainsi que:

Si la conique double de S se décompose en deux droites, les quadriques directrices de ces ∞^1 inversions fondamentales sont des cônes d'un faisceau dans lequel deux des droites communes sont les deux droites doubles et les deux autres passent en conséquence par le point d'intersection de celles-ci (sommet commun à ces cônes) et sont dans un plan avec les sommets des cônes de Kummer de S. Ce plan est le plan d'homologie pour une homologie harmonique qui transforme en soi-même la surface S et dont le centre d'homologie est le point d'intersection du plan des droites doubles avec la droite $D'D''$ (qui est toujours le lieu des centres des inversions fondamentales).

Pour la surface à droite bidouble d avec le plan tangent ϱ il y a une ∞^1 d'inversions fondamentales dont les centres sont sur cette même droite et les quadriques directrices sont des cônes touchant le plan ϱ le long de cette droite d et se coupant encore mutuellement en une conique δ^2 (qui se décompose seulement lorsque les deux points triples D', D'' coincident). Le centre d'une telle inversion et le sommet du cône directeur correspondant sont conjugués harmoniquement par rapport aux deux

points triples D', D''. En particulier il y a parmi ces inversions une homologie ayant pour plan d'homologie le plan de δ^2 et pour centre d'homologie le conjugué harmonique de ce plan par rapport aux deux points triples (et aux deux points-pinces).

64. En prenant la conique double (non décomposée), réelle ou imaginaire, de la surface S comme absolu, c'est-à-dire en considérant S comme une cyclide nous aurons d'autres propriétés de cette surface. Elle contient ∞^1 cercles passent par les deux points doubles D', D'', et le long desquels elle est touchée par ∞^1 sphères, parmi lesquelles il y a deux plans tangents le long de deux cercles. Dans le plan perpendiculaire au segment $D'D''$ dans son point de milieu il y a un cercle δ^2 d'intersection des deux sphères nulles ayant pour centres D', D'': toutes les sphères qui passant par ce cercle (c'est-à-dire toutes les sphères du faisceau déterminé par ces deux sphères nulles) sont directrices pour des inversions qui transforment la cyclide en elle-même. En particulier cette cyclide est symétrique par rapport au plan de δ^2.

Les centres des sphères inscrites dans la cyclide sont sur une conique, car ces centres sont les projections des pôles par rapport à φ des espaces tangents à f et ces pôles forment effectivement une conique appartenant au plan polaire de l'arête a de f, plan dont la projection est, comme nous avons vu, le plan de δ^2. Donc cette conique, lieu des centres des sphères inscrites dans la cyclide est dans un plan avec le cercle δ^2: nous l'appellerons *conique déférente* de ce *cercle directeur*, par analogie avec la quadrique déférente d'une sphère directrice, qui correspond à un cône de 1e espèce du faisceau. Comme toutes ces sphères inscrites dans la cyclide passent par les deux points D', D'', elles seront orthogonales au faisceau de sphères (δ^2). Lorsque la conique déférente et le cercle directeur δ^2 sont donnés la cyclide est parfaitement déterminée comme l'enveloppe des sphères ayant leurs centres sur la conique déférente et (orthogonales au faisceau des sphères passant par δ^2, c'est-à-dire) passant par D', D''.

Les quadriques et les coniques déférentes d'une cyclide appartiennent à un système de quadriques homofocales; car la demonstration donnée (n^0 22) de cette proposition pour les quadriques déférentes s'applique à la lettre aux cas où il y a aussi des coniques déférentes. Et on voit aussi de la même manière que les points d'intersection du cercle δ^2 avec sa conique déférente sont des *foyers* pour la cyclide, ce qui résulte d'ailleurs de ce que lorsque le centre d'une sphère inscrite dans la cyclide vient en un de ces points (points communs à un faisceau de sphères orthogonales à celle-là), elle s'annulle, c'est-à-dire se réduit à un cône passant par l'absolu et touchant la cyclide le long d'un cercle, et son centre sera en conséquence un véritable foyer. — Ces foyers sont les projections

des points de φ dont les espaces tangents à cette variété sont aussi tangents à f. Cela montre que lorsque notre cyclide a des points doubles différents de D', D'' ils paraissent aussi parmi les foyers: le cercle de contact de la surface avec la sphère nulle ayant un tel foyer pour centre s'annulle, ou, si l'on veut, se réduit à deux droites passant par ce point et le long desquelles la surface est touchée par cette sphère nulle. Cependant il est bien clair que de tels points doubles ne sont pas des foyers proprement dits.

Nous avons aussi déjà vu (n° 25) comment on peut déterminer dans chaque cas la caractéristique de ce quaterne de foyers et en conséquence ses particularisations. Quant aux quartiques focales la même méthode nous en donnera encore les particularisations; ainsi dans le cas le plus général [(1 1) 1 1 1] il y aura 3 quartiques focales ayant la caractéristique [(1 1) 1 1], et se décomposant en conséquence en des couples de cercles.*) Donc les 3 sphères directrices touchent leurs quadriques déférentes dans les deux points D', D'' et les coupent en conséquence en des couples de cercles passant par ceux-ci.

Une cyclide appartenant aux espèces que nous considérons à-présent a une série de lignes de courbure composée des cercles passant par les deux points doubles D', D''. En effet en un point quelconque de Γ le plan tangent est coupé par le cône de 2^e espèce f suivant une droite double (puisque ce plan appartient à l'espace tangent en ce même point à f, espace qui coupe f suivant un plan double), et cette droite est, comme l'on voit, la tangente en ce point de Γ à la conique de Γ qui y passe et qui appartient à un plan générateur de f. Donc (n° 23) en projetant sur R_3 on a qu'en un point quelconque de la cyclide la tangente au cercle de la cyclide passant par D', D'' est l'une des deux directions de courbure de la surface dans ce points, c'est-à-dire toute cette série de cercles de la cyclide forme l'une des deux séries de lignes de courbure.

65. Il y a un cas particulier remarquable des espèces de surfaces à conique double générale dont nous nous occupons à-présent: celui dans lequel les deux points doubles D', D'' vont se poser sur la conique double**). On obtient ce cas en projetant la surface Γ correspon-

*) Comme dans les cas présents la développable focale se décompose dans les cônes projetant l'absolu par les foyers, il est clair que les cercles focaux, lignes doubles de cette développable, ne sont que les intersections de ces cônes deux-à-deux.

**) Nous nous sommes déjà occupés dans la note au n° 33 du cas dans lequel un seul point double d'une surface va se poser sur la conique double et nous retrouverons en effet à-présent quelques-unes des propriétés que nous avons alors obtenues pour cette surface-là. — Il faut remarquer que si l'on fait aller sur la conique double les deux points coniques non pas des surfaces [(1 1) 1 1 1], etc. (pour

dante par un point P d'une variété générale φ du faisceau, qui soit sur le plan polaire de l'arête a de f par rapport à φ (et à toutes les variétés du faisceau), car alors l'espace π tangent en P à φ passe par a, de sorte que les deux points doubles M', M'' de Γ situés sur a seront projetés en deux points D', D'' de la conique double γ^2 de S. Voyons quelles singularités présenteront alors ces deux points pour S. Un espace mené par PM', par exemple, coupe Γ en une quartique ayant en M' un point double dont le plan des tangentes passe par P (car il appartient à l'espace tangent en M' au faisceau, espace qui passe par le plan polaire de a et en conséquence par P): donc la projection plane de cette quartique a dans la projection de M' un point de contact de deux branches. Donc *les deux points D', D'' de S sont tels que chaque plan passant par l'un d'eux coupe S en une quartique ayant en ce point un point de contact de deux branches:* il sont donc deux *points de contact de deux nappes de la surface* (*Selbstberührungspunkte*). On voit immédiatement que dans chacun de ces deux points singuliers coincident deux des 4 points-pinces de la conique double. En outre comme pour obtenir cette surface on peut prendre le centre de projection arbitrairement sur un plan nous avons que: *la classe d'une telle surface est la même que celle de la surface la plus générale ayant la même caractéristique.* Ainsi la surface du 4e ordre à conique double douée de deux points de contact de deux nappes est dans le cas le plus général de la classe 8.

Parmi les espaces passant par PM' chacun de ceux, qui touchent φ en un point de cette droite et qui forment en conséquence un faisceau autour du plan tangent le long de PM' à φ, coupe φ en un cône ordinaire et Γ en une quartique de ce cône ayant M' pour point double. Donc la projection de cette quartique par P a en D' un point d'osculation de deux branches. Remarquons en outre que parmi les espaces tangents à φ dans les points de PM' et de PM'' il y a l'espace π tangent en P et les espaces tangents en M', M'' chacun desquels coupe Γ, comme nous avons vu, en 4 droites (distinctes ou non). Donc: *les plans passant par la tangente à la conique double en un des deux points singuliers D', D'' coupent S en des courbes ayant en ce point un point d'osculation de deux branches. Chacun des plans tangents singuliers δ', δ'' de D', D'' (plans des tangentes singulières en ces points aux sections planes de S qui y passent) coupe S suivant* 4 *droites* (*qui dans des cas particuliers peuvent coincider entre elles*), *et ces deux quaternes de droites de S sont dans* 4 *plans passant par D' D''.* — La série de coniques de Γ situées dans les plans générateurs de f nous montre que: *Chaque plan passant*

lesquelles ces deux points forment un *couple*), mais des surfaces [2 2 1], etc., alors cette conique double se décompose en deux droites, dont l'une devient cuspidale (v. n° 40).

par la droite $D' D''$ coupe la surface S suivant deux coniques ayant double contact en D' et D'' avec les droites d'intersection de ce plan avec δ' et δ'' pour tangentes communes en ces points. On a ainsi une série de ∞^1 coniques sur la surface. Parmi ces plans passant par $D' D''$ il y a outre le plan de la conique double deux plans touchant la surface resp. le long de deux coniques.

La droite $\delta' \delta''$ contient les sommets des 3 cônes de Kummer de la surface S; car elle est l'intersection de R_3 avec le plan polaire de a, plan qui passe par P et qui contient les sommets des 3 cônes de 1^e^ espèce passant par Γ. En remarquant en outre que les espaces polaires des points de a forment un faisceau autour du plan polaire de a et passent tous en conséquence par P, nous voyons qu'une propriété qui caractérise notre surface, parmi celles plus générales qu'on obtient par des projections de Γ, est que *toutes* les ∞^1 inversions fondamentales de S que nous considérions au n⁰ 62 (et non plus une seule) se réduisent à des homologies harmoniques. *La surface S correspond à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques dont les centres sont sur la droite $D' D''$ et les plans passent par $\delta' \delta''$.*

Ces propriétés de la surface S*) nous montrent que, considérée comme une cyclide, elle est une *cyclide de révolution* provenant de la rotation d'une cyclique plane douée d'un axe de symétrie autour de cet axe.**) D'ailleurs la position particulière donnée sur φ au centre de projection P montre que pour obtenir une telle cyclide de la cyclide générale $[(1\,1)\,1\,1\,1]$ à couple de points coniques (ou bien de ses cas particuliers) il suffit de la transformer par inversion en mettant le centre en un point quelconque du cercle directeur (le cercle des foyers): on voit alors (ce qui résulte aussi immédiatement de la projection), que sur l'axe de révolution $\delta' \delta''$ se trouveront non seulement les sommets des 3 cônes de Kummer, mais aussi les 4 foyers de la surface. Etc., etc.

---

*) Cette surface intéressante n'a pas encore été étudiée ailleurs, à ce que nous croyons. Cependant dans le mémoire de M. Kummer il est remarqué que, si pour une surface du 4^e^ ordre à deux points de contact de deux nappes deux des 4 plans qui passent par ces points et touchent la surface le long de coniques viennent coincider, la conique de contact correspondante devient une conique double de la surface. On a alors précisément la surface dont il s'agit. L'équation donnée par M. Kummer d'une surface du 4^e^ ordre à deux points de contact de deux nappes peut se réduire pour cette surface à la forme $\Phi^2 = p^2(ap^2 + 2bpq + cq^2)$, où Φ est une quadrique et p, q sont des plans. Si la constante c était nulle, des deux plans tangents le long de coniques $ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0$ l'un viendrait coincider avec le plan p de la conique double, et celle-ci deviendrait une conique cuspidale.

**) M. Darboux ne fait que nommer dans une note (ouvr. cit., pag. 159) cette cyclide particulière.

Surface du 4e ordre à conique cuspidale.*)

66. Supposons que, la variété φ du faisceau étant générale, on y prenne le centre de projection P non seulement sur le plan polaire de l'arête a de f, comme nous faisions au n^0 précédent, mais précisément en un des points de ce plan qui sont communs à φ et à la conique polaire de f par rapport à φ, c'est-à-dire en un point tel que l'espace π tangent à φ en ce point soit aussi tangent à f le long d'un certain plan générateur p. Alors nous verrons que la plupart des propriétés trouvées au n^0 précédent pour les surfaces à conique double douée de deux points de contact de deux nappes seront encore vraies pour les nouvelles espèces, plus particulières, de surfaces; mais l'importance de celles-ci nous fait préférer de les retrouver directement en partie.

La quartique k^4 d'intersection de π avec Γ, que nous considérions au commencement de ce travail, et dont la projection sur R_3 était la conique double de S, se réduira à la conique k^2 d'intersection de Γ avec le plan p (conique comptée deux fois), et sa projection γ^2 sur R_3 sera en conséquence une *conique cuspidale* de S, car les deux plans tangents dans chaque point de la conique double qu'on considérait auparavant viennent coincider. Cela résulte d'ailleurs aussi de ce fait que le plan p, appartenant aux espaces polaires de P par rapport à φ et à f, sera le plan polaire de P par rapport à tout le faisceau de F_3^2, c'est-à-dire par rapport à Γ: il est donc le même plan que nous appellions p dans le cas général. Et comme alors p coupait Γ en 4 points dont les projections étaient les 4 points-pinces de la conique double, et dans notre cas toute la courbe k^2 se trouve sur p, il s'ensuit que tous les points de γ^2 sont des points-pinces, c'est-à-dire que γ^2 est maintenant une conique cuspidale de S. Et de la même manière par laquelle nous avions prouvé que les plans tangents singuliers dans ces points-pinces passaient par un même point, on prouve immédiatement que: *Les plans tangents à la surface S dans les points*

---

*) La plupart des résultats que nous trouverons ici sont déjà contenus dans le mémoire cité à la pag. 315 de M. Béla Tötössy, où cependant ils sont obtenus d'une manière tout-à-fait différente de la nôtre. Une partie de ces résultats avaient déjà été trouvés auparavant par M. Cremona (dans la note citée à la même page) au moyen de la représentation plane de la surface et par M. Zeuthen (mém. cité, pag. 541) comme application de ses formules générales. — La représentation de M. Cremona est du 4e ordre: il l'obtient au fond en considérant la surface comme l'inverse d'une surface cubique à deux points coniques par rapport à une inversion convenable. Notre méthode nous donnerait au contraire directement une représentation plane du 3e ordre; mais nous l'omettons par brièveté.

de sa conique cuspidale passent tous par un même point. Car ces plans sont les intersections de R_3 avec les espaces tangents à φ dans les points de k^2 et comme tous ces espaces passent par la droite polaire du plan p par rapport à φ, droite passant par P, le point commun à tous ces plans sera le point d'intersection de cette droite avec R_3.

Dans le cas présent l'espace π est l'un des deux espaces tangents à f qui passent par P, espaces qui touchent Γ le long de coniques et dont les intersections avec R_3 étaient les deux plans touchant S le long de coniques. Appelons π_1 l'autre de ces deux espaces tangents et γ_1^2 la projection sur R_3 de sa conique de contact: nous voyons que l'une des deux coniques, le long de chacune desquelles la surface S étudiée au n° précédent était touchée par un plan, est venue à-présent coincider avec la conique double en la faisant devenir conique cuspidale, et qu' *il y a encore pour la surface S un plan qui la touche le long d'une conique γ_1^2.*

67. La conique γ_1^2 et la conique cuspidale γ^2 se coupent en deux points D', D'', qui sont les projections des deux points M', M'' d'intersection de l'arête a de f avec φ, et dont nous allons reconnaitre la singularité. Un espace quelconque passant par P coupe f suivant un cône quadrique ordinaire et φ suivant une quadrique dont le plan tangent en P est aussi tangent à ce cône ordinaire le long de la droite d'intersection de cet espace avec p: cet espace coupe donc Γ suivant une quartique dont deux tangentes passent par P. Ainsi chaque plan coupe notre surface S suivant une quartique ayant deux points stationnaires sur la conique γ^2, ce qui prouve de nouveau que cette conique est cuspidale pour S. Mais supposons maintenant que l'espace mené par P passe aussi par l'un des deux points d'intersection de a avec φ, par exemple par M'. Alors la quadrique d'intersection de cet espace avec φ passera par le sommet M' du cône ordinaire d'intersection avec f, et elle aura pour une génératrice la droite PM': donc l'intersection de cet espace avec Γ sera une quartique ayant en M' un point double tel que le plan des deux tangentes passe par P. En projetant sur R_3 nous voyons que: *Un plan quelconque passant par l'un ou l'autre des deux points singuliers D', D'' de la conique cuspidale coupe la surface S en une quartique ayant en ce point un point de contact de deux branches.* Donc ces deux points sont*) les *points-clos* de la conique cuspidale de S.

Il se présente la question si parmi ces plans passant par un point-clos il y en a qui coupent S en une quartique ayant en ce point un

*) V. Zeuthen loc. cit., pag. 479. On trouve aussi dans ce mémoire les autres propriétés des points-clos que nous aimons à trouver par notre méthode dans ce qui suit.

point de rebroussement de 2e espèce (singularité d'ordre supérieur au point de contact de deux branches). Cette quartique étant la projection de la quartique gauche que nous considérions jadis ayant un point double en M' dans lequel le plan des tangentes passe par P, on voit que cela arrive lorsque ces deux tangentes coincident, c'est-à-dire lorsque M' est un point stationnaire pour cette courbe gauche et a un plan tangent singulier passant par P. L'espace mené par PM' coupe Γ en une telle courbe s'il est tangent au cône quadrique ordinaire tangent à Γ dans le point double M', c'est-à-dire si le plan dans lequel cet espace coupe l'espace tangent en M' à φ, plan qui passe par P, est tangent à ce cône (intersection de f avec cet espace tangent en M' à φ). Or par P il ne passe que deux plans tangents à ce cône: tous les espaces qui passent par l'un ou l'autre de ces deux plans satisfont donc à la question. Ces deux plans sont évidemment les intersections de l'espace tangent en M' à φ avec les deux espaces π, π_1 tangents à f menés par P. Un espace qui passe par le second de ces plans coupe Γ en une quartique ayant en M' un point stationnaire, dans le plan tangent duquel P est un point quelconque. Mais un espace qui passe par le premier de ces plans, c'est-à-dire par un plan qui, appartenant à π et à l'espace tangent en M' à φ, touche φ le long de la droite PM', coupera Γ en une quartique ayant un point stationnaire en M' avec ce plan pour plan tangent, et la quadrique d'intersection de cet espace avec φ sera un cône tangent à ce plan le long de la droite PM' (et n'ayant pas le sommet en M'); donc (voir la note à pag. 326) la projection de cette quartique faite par P a dans la projection de M' un point de rebroussement de 3e espèce (coincidence d'un point stationnaire avec un point de contact de deux branches). En remarquant encore que les deux plans considérés appartenant aux espaces π, π_1 devront être tangents en M' aux deux coniques de Γ placées dans ces espaces, nous concluons pour R_3:

Parmi les plans passant par un point-clos D' de la conique cuspidale γ^2 de la surface S ceux qui passent par la tangente en ce point à γ_1^2 coupent S en des courbes ayant en ce point un point de rebroussement de seconde espèce avec cette droite pour tangente singulière; et les plans qui passent par la tangente en ce point à la conique cuspidale γ^2 coupent S en des courbes ayant en ce point-clos un point de rebroussement de 3e espèce. — Il suit de là que les tangentes en D', D'' à la conique γ_1^2 sont les *tangentes singulières* des deux points-clos.

68. De même que pour les surfaces étudiées au n° 65, nous avons à-présent comme cas particuliers:

Sur la surface du 4e ordre à conique cuspidale il y a dans le cas le plus général deux quaternes de droites: chaque quaterne embrasse 4

droites qui passent par un point-clos D' ou D'' et appartiennent au plan δ' ou δ'' des tangentes en ce même point à γ^2 et γ_1^2, plan qui est aussi le lieu des tangentes quadriponctuelles à la surface dans le point-clos correspondant.

Ces deux quaternes de droites forment aussi 4 couples dans 4 plans passant par la droite $D'\,D''$ des deux points-clos. Les plans qui passent par cette droite coupent la surface suivant des couples de coniques (formant un seul système de ∞^1) touchant dans les deux points D', D'' les deux plans δ', δ''. Pour deux plans de ce faisceau les deux coniques coincident, resp. en γ^2 et en γ_1^2.

La surface correspond à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques ayant les centres sur la droite $D'\,D''$ des points-clos et les plans d'homologie passant par la droite $\delta'\,\delta''$. De là il suit aussi que cette surface correspond à soi-même par rapport à une involution réglée (involutorisch-geschaarte Collineation) *ayant les droites $D'\,D''$ et $\delta'\,\delta''$ pour axes.* — En outre elle a en général 3 inversions fondamentales.

69. Proposons-nous maintenant la recherche des cônes de Kummer pour cette surface. Il suffit de se rappeler que ces cônes sont les projections faites par P des cônes quadriques ordinaires dans lesquels les cônes de 1^e espèce du faisceau des F_3^2 sont coupés par les espaces polaires de P par rapport à ces cônes-mêmes. Or ces espaces polaires de P devront passer par le plan polaire p de P par rapport à Γ, plan qui contient la conique k^2 de Γ, et en se rappelant en outre que les sommets de ces cônes du faisceau sont sur le plan polaire de a par rapport à φ nous concluons que: *La surface à conique cuspidale a en général 3 cônes de Kummer dont les sommets sont sur la droite $\delta'\,\delta''$ et qui passent par la conique cuspidale.*

A chacun de ces cônes correspondent deux séries de coniques sur la surface. Il y a en outre, comme nous avons déjà vu, une série de coniques situées dans les plans passant par $D'\,D''$. Entre ces différentes séries de coniques passent les mêmes relations que dans la surface à conique double et un couple de points doubles.

De même il n'y a presque pas de modifications à faire à ce que nous avons dit en général sur les cubiques et les quartiques de la surface. Il y aura sur la surface en général 8 séries doublement infinies de cubiques gauches, correspondant aux 8 droites de la surface, et une série quatre fois infinie de quartiques de 1^e espèce*), etc. etc.

---

*) M. Tötössy trouve que cette série de quartiques est seulement trois fois infinie (loc. cit., pag. 319, 320), parce qu'il s'appuie sur le fait que par la conique cuspidale passent ∞^3 quadriques, tandis qu'il en passe ∞^4.

70. Nous retrouverons les cônes de Kummer en cherchant les quadriques qui passent par la conique cuspidale et sont inscrites dans la surface (c'est-à-dire la touchent le long de coniques). De même que lorsque P avait une position quelconque sur φ on voit que ces quadriques sont les projections des intersections de φ avec les espaces tangents à f. Les pôles de ces espaces par rapport à φ ont pour lieu une conique dans le plan polaire de a. Parmi ces espaces il y en a en général, outre π, trois qui sont aussi tangents à φ, c'est-à-dire qui coupent φ suivant des cônes quadriques ordinaires. Leurs sommets sont 3 des 4 points d'intersection de la conique nommèe avec φ: le quatrième est P; et les points diagonaux du quadrangle déterminé par ces 4 points sont les sommets des 3 cônes de 1e espèce du faisceau de F_3^2. Donc les sommets des projections des 3 cônes quadriques ordinaires dont nous parlions sont aussi les sommets des 3 cônes de Kummer et comme ces projections passent aussi, comme ces cônes de Kummer, par γ^2, elles coincideront avec eux. Donc:

La surface S est enveloppée (c'est-à-dire touchée le long de coniques) par ∞^1 quadriques passant par la conique cuspidale et telles que le lieu des pôles du plan de celle-ci par rapport à elles est la droite $\delta' \delta''$. Parmi ces quadriques il y a les 3 cônes de Kummer. Par chaque point de l'espace passent deux de ces quadriques. Les coniques de contact forment le système des coniques passant par D' et D''.

On peut encore considérer un autre système de quadriques. Les espaces passant par p coupent Γ suivant la conique fixe k^2 et une conique mobile; en projetant sur R_3 et en remarquant que les pôles de ces espaces par rapport à φ sont sur la droite polaire de p nous avons que: *les ∞^1 quadriques qui touchent S le long de sa conique cuspidale, c'est-à-dire qui passent par cette conique et ont pour pôle de son plan le point d'intersection des plans tangents à S dans les points de la conique cuspidale, coupent encore S suivant une conique mobile appartenant au système des coniques passant par D' et D''.* — Ce point d'intersection des plans tangents dans les points de la conique cuspidale est évidemment sur la droite $\delta' \delta''$.

71. En supposant que la conique cuspidale γ^2 soit l'absolu, la surface S sera une cyclide de révolution ayant la droite $\delta' \delta''$ pour axe (n⁰ 68). Comme un plan passant par cet axe coupe S suivant une courbe quartique ayant les points cycliques du plan pour points stationnaires, c'est-à-dire suivant une quartique *cartésienne* (ovales de Descartes) ayant cet axe pour axe de symétrie, nous l'appellerons pour

*) Loc. cit., pag. 635. — M. Darboux donne au contraire ce nom de *cartésiennes* aux cyclides ayant des quadriques déférentes de révolution (ouvr. cité, pag. 154). Nous rencontrerons bientôt ces cyclides.

abréger *cyclide cartésienne*, avec M. Casey*). Les cônes de Kummer ont leurs 3 sommets sur l'axe: ces sommets sont les foyers de la cyclide, puisque ces cônes sont tangents le long de coniques à la cyclide et passent par l'absolu. Comme les quadriques déférentes ont en général pour développable focale la développable des plans tangents à la cyclide dans les points de l'absolu, et dans le cas présent cette développable se réduit à un cône quadrique nous concluons que *les quadriques déférentes d'une cyclide cartésienne sont des sphères ayant pour centre commun le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de l'absolu*. Ce point se trouve sur l'axe de révolution.

Dans le cas le plus général, qui correspond à la caractéristique $[(1\,1)\,1\,1\,1]$, outre les 3 foyers la surface a 3 quartiques focales, intersections des 3 sphères directrices, dont ces foyers sont les centres, avec leurs 3 sphères déférentes: ces intersections se décomposent dans l'absolu et 3 cercles. Donc *la cyclide cartésienne générale a trois foyers et trois cercles focaux* (intersections des sphères nulles ayant ces foyers pour centres prises deux-à-deux).

En prenant la conique cuspidale pour absolu on obtient très-facilement les propriétés de la surface S (ce qui équivaut d'ailleurs à faire usage dans les demonstrations du système des ∞^1 homologies harmoniques qui transforment la surface S en soi-même). Ainsi, comme la section méridienne de la cyclide cartésienne est de la 6e classe, il suit que par un point de l'axe le cône circonscrit à la cyclide se décompose en 3 cônes quadriques de révolution, c'est-à-dire: *pour chaque surface du 4e ordre à conique cuspidale le cône circonscrit à la surface par un point quelconque de la droite $\delta'\delta''$ se décompose en trois cônes quadriques touchés par les plans δ', δ'' dans les deux points-clos D', D''.*

Remarquons enfin que chaque cyclide cartésienne, même lorsqu'elle n'est pas générale, peut être obtenue par une cyclide douée de foyers (c'est-à-dire appartenant aux espèces qui dans leurs caractéristiques ont un groupe de deux dégrés) et ayant la même caractéristique en la transformant par inversion avec un foyer proprement dit pour centre. Cela correspond au fait que les deux surfaces sont les projections d'une même surface Γ de la variété quadratique φ: seulement pour l'une d'elles le centre de projection est un point quelconque de φ, tandis que pour l'autre ce centre est un point déterminé, et précisément l'un de ces points dont la projection faite par le premier centre est un foyer pour la première surface.

Nous allons maintenant reprendre la classification de nos surfaces, en donnant pour les différentes espèces, dont nous avons vu les propriétés communes dans les dernières pages, les propriétés particulières qui les distinguent entre elles.

$\{(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\}$.

72. La surface Γ ayant cette caractéristique est la plus générale parmi celles qui ont été considérées depuis le n⁰ 58. Elle est sur 3 cônes quadriques de 1e espèce et sur un cône de 2e espece, sur l'arête duquel elle a deux points doubles; etc. En conséquence en la projetant sur R_3 nous aurons les surfaces suivantes qui ont déjà été étudiées presque complètement dans ce qui précède.

73. $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$. *Surface de la 8e classe à conique double générale et un couple de points coniques.* Par chacun de ces points coniques passent 4 droites de la surface, qui coupent respectivement les 4 passant par l'autre en 4 points d'un plan: les 3 points diagonaux du quadrangle déterminé par ceux-ci sont les sommets des 3 cônes de Kummer de la surface. En considérant celle-ci comme une cyclide, ces 4 points se trouvent sur le cercle directeur (dont les points d'intersection avec la conique déférente sont les 4 foyers de la surface) et ils sont les points de contact du cercle avec les tangentes qu'il a communes avec cette conique. La surface a 3 couples de cercles focaux passant par les deux points coniques et appartenant aux 3 sphères directrices (dont les centres sont les sommets des cônes de Kummer). Elle contient une série de coniques passant par les deux points coniques et en outre 3 couples de séries, correspondant aux 3 cônes de Kummer. Etc. etc.

74. $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$. *Surface de la 6e classe à conique cuspidale.* Nous en avons vu jadis les propriétés, car celle-ci est la surface du 4e ordre la plus générale à conique cuspidale. Il est facile de voir que pour cette surface, qui est un cas particulier de celle du n⁰ précédent, la classe n'est plus 8, mais 6; c'est que les centres de projection de Γ propres à donner comme projection une telle surface ne forment plus qu'une ∞^1 (tandis que, comme ils formaient une ∞^2 pour les surfaces un peu plus générales à deux points de contact de deux nappes sur la conique double, nous avons pu conclure au n⁰ 65 qu'elles sont de la classe 8). Cette surface a deux points-clos distincts sur la conique cuspidale et n'a pas de points doubles hors de la conique cuspidale. Nous avons vu ses propriétés relatives aux droites qu'elle contient, aux cônes de Kummer, etc. On peut aussi la considérer comme la cyclide cartésienne la plus générale et nous avons vu aussi comment se particularisent alors métriquement ses propriétés.

Les cyclides $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$, cartésiennes ou non, sont les transformées par inversion d'un cône quadrique général (comme on voit si sur φ le

centre de projection de Γ est pris sur M' ou sur M'', car alors Γ est projetée justement suivant un cône quadrique).

75. $[\bar{1}(1\,1)\,1\,1]$. *Surface de la 8e classe à deux droites doubles et un couple de points coniques.* Les 4 plans qui joignent ces points à ces droites coupent encore la surface en des couples de droites et on a ainsi les 8 droites simples de la surface. Les 4 droites passant par un point conique coupent respectivement celles qui passent par l'autre en 4 points d'un plan passant par le point d'intersection des droites doubles: ce plan contient les sommets des deux cônes de Kummer (propres) de la surface. Parmi les plans passant par les deux points coniques et coupant la surface en deux coniques il y en a deux, dont chacun la touche le long d'une conique, et 4 qui contiennent des couples de droites. Nous avons vu (n⁰ 63) qu'il y a ∞^1 inversions fondamentales ayant des cônes quadriques directeurs passant par les droites doubles et par deux droites fixes du plan nommé qui contient les sommets des cônes de Kummer. Mais il y a en outre 3 autres inversions fondamentales, dont deux ayant pour centres les sommets des deux cônes de Kummer proprement dits et pour quadriques directrices deux cônes passant par les points coniques, et une ayant pour centre le point de rencontre des droites doubles et une quadrique directrice qui passe aussi par les points coniques.*) — On obtient une telle surface par une inversion conique sur un cône quadrique.

76. $[(\overline{1\,1})\,1\,1\,1]$. *Surface de la 8e classe à droite bidouble (et deux points triples).* Les deux quaternes de droites simples de la surface passant par les deux points triples D', D'' sont, comme nous l'avons déjà remarqué, sur quatre plans passant par la droite bidouble. Il y a ∞^1 inversions fondamentales dont les quadriques directrices sont des cônes quadriques touchant le plan ϱ le long de la droite bidouble d et se coupant en une conique fixe δ^2, et dont les centres sont sur d les conjugués harmoniques des sommets de ces cônes par rapport à D', D'' (n⁰ 63). Parmi ces cônes ceux qui ont leurs sommets en D', D'' se composent de tangentes quadriponctuelles en ces points triples à la surface (les autres tangentes quadriponctuelles dans ces points forment deux faisceaux dans le plan ϱ), et ils passent respectivement par les deux quaternes de droites. Celles-ci se rencontrent donc en 4 points de la conique δ^2 et les points diagonaux du quadrangle de ces 4 points sont les sommets des 3 cônes de Kummer de la surface. Dans chacune des 6 séries de coniques de la surface qui correspondent

*) Nous rappellerons encore une fois que les quadriques directrices des inversions fondamentales de toutes nos surfaces passent toujours par leurs coniques doubles (générales ou décomposées), de sorte que nous nous épargnons la peine de le dire dans chaque cas.

à ces cônes il y a deux coniques décomposées en couples de droites, etc. Les sommets des 3 cônes de Kummer sont aussi les centres de 3 inversions fondamentales, qu'a la surface outre les ∞^1 considérées: les quadriques directrices de ces 3 inversions fondamentales sont 3 couples de plans passant par la droite bidouble d.

$$\{(1\,1)\,2\,1\}.$$

77. Une telle surface Γ se trouve, outre que dans le cône de 2e espèce f dont l'arête la coupe en deux points doubles M', M'', sur un cône de 1e espèce f_1 dont le sommet M se trouve sur Γ et en est en conséquence un autre point double. Les droites MM', MM'' appartiendront donc à Γ et auront deux plans touchant Γ le long d'elles: ces plans seront les intersections de l'espace tangent en M à toutes les variétés du faisceau avec les espaces tangents en M' et M''; ils se coupent donc en une droite qui contient le sommet du troisième cône du faisceau (de 1e espèce). Comme toutes les droites de Γ doivent passer ou par M' ou par M'', on voit qu'elles sont, outre les droites MM', MM'', celles dans lesquelles Γ est encore coupée par les plans générateurs de f_1 qui passent par l'une ou par l'autre de celles-ci, c'est-à-dire deux droites passant par M' et deux droites passant par M''. Il y a donc en tout 6 droites sur Γ. Le troisieme cône du faisceau a parmi ses plans générateurs les plans tangents à Γ le long de MM' et MM'' et les plans des deux couples des autres droites qui passent par M' et M''.

Suivant la position du centre de projection P nous aurons de Γ 7 espèces différentes de surfaces de R_3.

78. $[(1\,1)\,2\,1]$. *Surface de la 6e classe à conique double générale et trois points coniques* (dont deux formant un couple). Le couple de points coniques D', D'' est joint à l'autre point conique D par deux droites de la surface, le long de chacune desquelles la surface est touchée par un plan. Ces deux plans sont tangents au cône de Kummer non singulier de la surface. Celle-ci a aussi un cône de Kummer singulier ayant le sommet en D, et outre les deux couples de séries de coniques qui correspondent à ces deux cônes de Kummer elle contient une série de coniques dans les plans qui passent par $D'D''$. Parmi ces plans deux touchent la surface le long de deux de ces coniques, et deux autres, outre celui qui passe par D, coupent la surface en deux couples de droites (et deux coniques); de sorte que la surface contient 6 droites. Dans chacune des deux séries de coniques correspondant au cône de Kummer singulier il y a deux coniques qui se décomposent respectivement en DD' et une droite passant par D' et en DD'' et une droite passant par D''. Pour le cône de Kummer

non singulier dans l'une des deux séries de coniques qui lui correspondent il y a la droite DD' comptée deux fois et le couple des droites qui passent par D'' sans passer par D, tandis que dans l'autre il y a la droite DD'' comptée deux fois et le couple des droites qui passent par D' sans passer par D. De là il suit que les deux points de rencontre des deux couples nommés de droites sont en un plan avec les sommets des deux cônes de Kummer (ou, plus encore, qu'ils sont en ligne droite avec le sommet du cône de Kummer non singulier).

Comme cyclide cette surface a ce dernier plan pour plan de symétrie et les deux points coniques D', D'' disposés symétriquement par rapport à lui: le cercle δ^2 d'intersection des deux sphères nulles ayant D', D'' pour centres est sur ce plan et contient le point conique D et les deux autres points de rencontre de droites de la surface. La conique déférente touche les tangentes à ce cercle directeur dans ces deux points et elle touche ce cercle même en D, ayant en ce point pour tangente commune la droite d'intersection des plans tangents à la surface le long des droites DD', DD''. Comme ce cercle directeur et cette conique déférente se touchent en D, elles ne se couperont plus qu'en deux points qui seront les foyers de la surface. Cela résulte aussi du théorème du n° 25, en force duquel le quaterne de foyers a pour caractéristique [2 1] et se réduit en conséquence au point double D avec deux autres points; mais D n'est pas un véritable foyer, comme nous avons vu (n° 64). — Outre le faisceau des sphères passant par le cercle directeur δ^2, qui correspondent à autant d'inversions fondamentales pour la cyclide, il y a encore une sphère directrice d'une inversion fondamentale proprement dite, laquelle a son centre dans le sommet du cône de Kummer non singulier et passe par les 3 points coniques D, D', D'': la quadrique déférente de cette sphère directrice passe aussi par ces points et coupe la sphère en une quartique focale [(1 1) 2] qui se décompose dans les deux droites DD', DD'' et un cercle focal passant par D', D''. (On voit donc la position mutuelle de cette sphère directrice et de cette quadrique déférente). Il y a encore une sphère directrice nulle ayant le centre en D et sur laquelle se trouve une quartique focale [(1 1) $\bar{1}$ 1], décomposée en deux cercles passant par D', D'': la quadrique déférente passe donc par ces deux points coniques.

79. [(1 1) 2 1]. *Surface de la 4e classe à conique cuspidale et un point conique.* Outre le plan de la conique cuspidale γ^2 il y a encore un plan qui touche la surface le long d'une conique γ_1^2: ces deux coniques se coupent dans les deux points-clos D', D'' de γ^2. Les plans tangents singuliers δ', δ'' de ceux-ci se coupent en une droite passant par le point conique D et ils touchent la surface le long des droites

$D\,D'$, $D\,D''$, tandis qu'ils la coupent encore en deux autres couples de droites passant respectivement par D', D'' et se coupant mutuellement sur la droite $\delta'\,\delta''$. Outre le cône de Kummer singulier ayant le sommet en D, il y a un autre cône de Kummer non singulier dont le sommet est aussi sur la droite $\delta'\,\delta''$. On obtient cette surface de la surface générale à conique cuspidale en supposant que deux des 3 cônes de Kummer viennent coincider (en un cône de Kummer singulier): alors deux des 4 couples de droites de la surface générale, situés dans 4 plans par $D'\,D''$, coincideront aussi*).

Comme cyclide cartésienne cette surface s'obtient de la cyclide précédente par une inversion ayant pour centre l'un des deux foyers. Elle est douée d'un seul foyer, qui est le sommet du cône de Kummer non singulier, et comme son méridien a les points cycliques de son plan pour points stationnaires et le point D (sommet du cône de Kummer singulier) pour point double, elle provient de la rotation d'un *limaçon de Pascal* autour de son axe. On peut donc la construire en portant un segment donné sur les droites qui passent par un point D d'une sphère à partir du second point d'intersection de ces droites avec la sphère. Cette simple construction de la surface permet aussi de vérifier facilement qu'elle est bien l'enveloppe des ∞^2 sphères passant par le point D et ayant leurs centres sur une sphère *déférente* fixe (ne contenant pas D) ou bien l'enveloppe des ∞^2 sphères orthogonales à une sphère directrice et ayant leurs centres sur une sphère déférente qui touche celle-ci en un point D.

Cette cyclide cartésienne et la cyclide plus générale considérée au n⁰ précédent sont les transformées par inversion d'un cône quadrique tangent à l'absolu, ou bien d'une quadrique de révolution.

80. $[\bar{1}(1\,1)\,2]$ *Surface de la 6e classe à deux droites doubles et trois points coniques.* Soient D', D'' les deux points coniques formant un couple et D l'autre. Les plans qui joignent D aux deux droites doubles d_1, d_2 touchent la surface le long des deux droites $D\,D'$, DD'' et la surface contient encore deux droites passant par D' dans le plan

*) M. Tötössy (loc. cit., pag. 312) trouve, à ce propos, par le calcul, que le discriminant de l'équation du 3e dégré, qui détermine les 3 cônes de Kummer pour la surface générale à conique cuspidale, est identique à celui de l'équation du 4e dégré qui détermine les 4 plans passant par $D'\,D''$ et contenant les 4 couples de droites de la surface. Or cela est conséquence d'un fait que nous montre notre méthode de la projection: si sur la droite $\delta'\,\delta''$ on considère les 4 points d'intersection avec ces couples de droites et aussi les 3 sommets des cônes de Kummer avec le point d'intersection de $\delta'\,\delta''$ avec le plan de γ^2, ces deux quaternes de points ont le même covariant sextique, qui est formé par les 3 couples de points dans lesquels cette droite rencontre les 3 quadriques directrices des inversions fondamentales (isolées) de la surface.

$D'd_2$ et deux droites passant par D'' dans le plan $D''d_1$. Il n'y a qu'un cône de Kummer singulier ayant le sommet en D, auquel correspondent deux séries de coniques de la surface: celle-ci contient encore deux séries de coniques dans les plans par d_1 ou par d_2 et une série dans les plans par $D'D''$. Il y a ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur la droite $D'D''$ et les quadriques directrices forment un faisceau de cônes passant, outre que par d_1, d_2, par D et par une autre droite fixe (parmi ces inversions il y a une homologie harmonique); et il y a en outre une inversion fondamentale dont le centre est le point de rencontre des droites doubles et la quadrique directrice passe par les trois points coniques.

Cette surface s'obtient par inversion conique soit d'un cône quadrique tangent à l'une des deux droites formant l'absolu de l'inversion, soit d'une quadrique tangente à toutes les deux ces droites.

81. *Surface de la 6e classe à droite double et droite cuspidale et un point conique.* Cette surface, qui est un cas particulier de la précédente, s'obtient en projetant Γ par un point quelconque du plan tangent le long de l'une des deux droites MM', MM'', par exemple de la première. Alors les projections D, D' de M, M' seront les deux points-clos de la droite cuspidale, et la projection D'' de M'' sera un point conique pour notre surface. Ces deux points-clos joueront des rôles différents: les plans par le point conique D'' et l'un D' de ces deux points-clos couperont la surface en une série de coniques (tangentes en D' à son plan singulier), tandis que les plans passant par l'autre point-clos D et tangents à un certain cône quadrique (de Kummer) ayant ce point pour sommet couperont la surface en deux autres séries de coniques.

Les droites simples de cette surface sont: DD'', le long de laquelle la surface est touchée par un plan passant par la droite cuspidale, c'est-à-dire par le plan singulier de D; deux droites passant par D' et appartenant au plan singulier de ce point-clos; et enfin deux autres droites passant par D'' et coupant la droite double. Parmi les plans passant par $D'D''$ il y en a un touchant la surface le long d'une conique (et un autre jouissant de la même propriété, mais avec la conique de contact décomposée dans les deux droites DD', DD'').

82. *Surface de la 6e classe à deux droites cuspidales.* — Nous avons vu en général qu'on obtient une surface à conique cuspidale en projetant une $F_2^{2\cdot 2}$ Γ contenue dans un cône de 2e espèce f par un point P de ceux dans lesquels un espace tangent à ce cône et à une autre variété quadratique φ du faisceau touche celle-ci. Mais afin que cette conique cuspidale se décompose en deux droites il faut que

φ soit un cône de 1e espèce. En supposant donc qu'il existe un espace π tangent en même temps au cône de 2e espèce f le long d'un certain plan p et au cône de 1e espèce φ le long d'une certaine génératrice passant par P, cet espace coupera φ en deux plans p_1, p_2 et il touchera f et φ, et en conséquence toutes les variétés de notre faisceau, dans le point d'intersection de p et $p_1 p_2$, de sorte que ce point sera double pour Γ et sera le sommet d'un cône de 1e espèce du faisceau (ou un point de l'arête d'un cône de 2e espèce). De là il suit que le cas le plus général dans lequel on obtient une surface à deux droites cuspidales est celui dans lequel on projette une surface Γ ayant pour caractéristique $\{(11)21\}$ par l'un des points de contact du cône de 1e espèce correspondant au dégré 1 avec l'espace tangent au faisceau dans le sommet du cône correspondant au dégré 2. Des cas particuliers correspondront aux caractéristiques $\{(11)3\}$, $\{(31)1\}$, etc., de Γ.

En nous bornant ici au cas le plus général, qu'on peut d'ailleurs étudier comme cas particulier de la surface du n⁰ précédent (qu'on obtenait en prenant le centre de projection sur l'un seul des deux plans tangents à Γ le long des droites MM', MM'', tandis que pour avoir deux droites cuspidales on doit prendre ce centre sur la droite commune à ces deux plans), ou bien de celle du n⁰ 80, nous voyons par ce que nous avons dit au n⁰ 77 sur la $F_2^{2 \cdot 2}$ $\{(11)21\}$ que: *Une surface du 4e ordre à deux droites cuspidales se coupant mutuellement a sur chacune de ces droites un point-clos ordinaire* (jouissant des propriétés déjà vues des points-clos) *dont le plan singulier passe par la droite cuspidale correspondante et contient encore deux droites de la surface passant par ce point. Il y a donc dans la surface* 4 *droites simples: elles sont par couples sur deux plans passant par la droite qui joint les deux points-clos. Les plans qui passent par cette droite coupent la surface suivant des couples de coniques tangentes dans ces points-clos à leurs plans singuliers; l'un de ces plans touche la surface le long d'une de ces coniques. Outre cette série de coniques et le couple de séries de coniques situées dans les plans passant par les deux droites cuspidales, la surface a encore un couple de séries de coniques passant par le point d'intersection des deux droites cuspidales et situées dans des plans qui enveloppent un cône quadrique* (*de* Kummer) *ayant ce point pour sommet.*

Un espace passant par la droite $p_1 p_2$ coupe Γ en une quartique à point double $p p_1 p_2$ (c'est-à-dire M) et φ en un cône contenant cette droite et cette quartique, et n'ayant pas pour sommet ce point double. Donc *chaque section plane de notre surface passant par le point d'intersection des deux droites cuspidales a en ce point un point d'osculation de deux branches avec la tangente dans le plan de ces droites.* D'ailleurs cela est une conséquence du fait que cette surface est un cas

particulier de celles que nous avons rencontrées dans la seconde moitié du n° 34. On voit effectivement que si l'on suppose que le point conique, n'appartenant pas au couple, de la surface à deux droites doubles $[\overline{1}(11)2]$ vienne coincider avec le point d'intersection de celles-ci, ces droites deviendront des droites cuspidales et on aura justement notre surface, c'est-à-dire la surface du 4e ordre la plus générale à deux droites cuspidales.

83. $[\overline{2}(\overline{1}1)1]$ *Surface de la 6e classe à deux droites doubles se croisant en un point triple et deux points coniques.* Le long des deux droites de la surface qui joignent le point triple D aux deux points coniques D', D'' la surface est touchée par deux plans qui sont aussi tangents au cône de Kummer (non singulier) de la surface. Les tangentes quadriponctuelles dans le point triple forment un faisceau avec les deux droites doubles et un cône quadrique qui touche aussi ces deux plans le long des droites DD', DD''. Par les deux points coniques D', D'' passent encore deux couples de droites dans les plans qui joignent ces points aux droites doubles. Il y a encore 5 séries de coniques, dont deux correspondent au cône de Kummer, une aux plans passant par $D'D''$ et deux aux plans qui passent par les droites doubles. Il y a une inversion fondamentale ayant pour centre le sommet du cône de Kummer et pour quadrique directrice un cône passant par D' et D'', et il y a ∞^1 autres inversions coniques fondamentales ayant les centres sur la droite $D'D''$. Cette surface s'obtient en transformant par inversion conique un cône quadrique contenant le sommet du cône directeur.

84. $[(\overline{1}\overline{1})21]$ *Surface de la 6e classe à droite bidouble et un point conique.* Par les deux points triples D', D'' de la droite bidouble d passent les 6 droites simples de la surface, dont deux vont au point conique D et touchent le cône de Kummer non singulier de la surface, et les autres sont sur deux plans passant par d et se coupent en deux points qui avec D déterminent un plan. La conique δ^2 de ce plan, qui est tangente au plan ϱ dans l'intersection avec d et qui passe par les 3 points nommés de ce plan, appartient à un faisceau de cônes quadriques tangents à ϱ le long de d et directeurs de ∞^1 inversions fondamentales: ceux parmi ces cônes qui ont D' et D'' pour sommets se composent de tangentes quadriponctuelles en ces points triples. La surface a encore une inversion fondamentale biplanaire dont le centre est le sommet du cône de Kummer non singulier (sommet qui appartient au plan de δ^2). Le cône de Kummer nommé, un cône de Kummer singulier ayant D pour sommet et enfin le faisceau

des plans qui passent par d déterminent les 5 séries de coniques de la surface. Celle-ci est la transformée d'une quadrique par une inversion biplanaire.

$\{(11)3\}$

85. Cette surface Γ se trouve seulement sur un cône de 2e espèce f, dont l'arête contient deux points doubles M', M'' de Γ et sur un cône de 1e espèce f_1 dont le sommet M appartenant à Γ en est un point double. L'espace tangent en M au faisceau des F_3^2 est dans ce cas aussi tangent à f_1 et le coupe en conséquence en deux plans générateurs qui passent par les droites MM', MM'' de Γ et touchent cette surface le long de ces droites; le cône quadrique tangent à Γ en ce point double M se décompose en ces deux plans. Par les droites MM', MM'' passent deux autres plans générateurs de f_1, lesquels contiendront deux autres droites de Γ. Donc la surface Γ contient 4 droites, c'est-à-dire les 2 droites MM', MM'' et deux autres droites passant respectivement par M', M'' et appartenant au même plan générateur de f. D'ailleurs Γ n'a que 3 séries de coniques dans les plans générateurs de f et dans les deux séries de plans générateurs de f_1.

86. [(11)3] *Surface de la 5e classe à conique double générale, deux points coniques et un point biplanaire de la 1e espèce.* Cette surface a 4 droites: celles qui joignent les deux points coniques D', D'' au point biplanaire D, le long desquelles la surface est touchée par les deux plans nodaux de ce point, et deux autres droites passant par D', D'' et se coupant mutuellement. Les plans passant par $D'D''$ contiennent une série de coniques (et il y a parmi eux deux plans touchant la surface le long d'une conique), et les plans tangents au cône de Kummer singulier qui a D pour sommet contiennent les deux autres séries de coniques de la surface. En dehors des ∞^1 inversions fondamentales qu'il y a dans tous les cas que nous considérons maintenant, il n'y en a pas d'autres dans le cas présent.

Comme cyclide cette surface a un plan de symétrie, sur lequel se trouve le cercle directeur (intersection des sphères nulles D', D''): sur ce cercle il y a le point D et la conique déférente a avec ce cercle un contact triponctuel en D, de sorte qu'elle le coupe encore en un seul autre point, qui sera un foyer proprement dit pour la cyclide; on prouve cela, soit en considérant notre cas comme limite de cas précédents, soit en remarquant que le théorème du n° 25 nous donne pour le quaterne de foyers la caractéristique [3], qui prouve que 3 des foyers viennent coincider en un seul point D qui devient un foyer impropre. Outre le foyer propre considéré la cyclide a une quartique

focale $[(11)\bar{2}]$ décomposée en une conique et deux droites et située sur la sphère nulle (directrice) D et sur sa quadrique déférente. Donc cette quadrique a le point D pour un ombilic et notre cyclide est l'enveloppe des sphères ayant les centres sur une quadrique fixe et passant par l'un de ses ombilics.

87. $[(11)3]$ *Surface de la* 3e *classe à conique cuspidale et un point biplanaire de* 1e *espèce**). Les plans nodaux du point biplanaire D sont les plans singuliers des deux points-clos D', D'' de la conique cuspidale et ils osculent la surface le long des droites DD', DD''. Dans ces plans δ', δ'' et par ces points-clos D', D'' passent encore deux autres droites de la surface (dans un plan passant par $D'D''$). Parmi les plans passant par $D'D''$ il y a, outre le plan de la conique cuspidale, un autre plan tangent à la surface le long d'une conique. Il y a encore un cône de Kummer (singulier) dont le sommet est en D.

Comme cyclide cette surface peut s'obtenir en transformant par inversion la surface du n° précédent avec le centre d'inversion dans le foyer. Elle est une *cyclide cartésienne à point biplanaire:* ce point biplanaire D se trouve sur l'axe de révolution $\delta'\delta''$ de la cyclide, et comme dans cet axe se coupent les deux plans nodaux de D, chaque plan passant par lui coupe la surface en une quartique ayant un point de rebroussement en D et deux autres dans les points cycliques, c'est-à-dire en une *cardioïde.* Donc cette cyclide cartésienne s'obtient par la révolution d'une cardioïde autour de son axe; et de la construction connue de la cardioïde on déduit une construction simple de cette cyclide analogue à celle de la cyclide cartésienne à point conique (n° 79): seulement le segment que l'on porte sur les différentes droites devra être égal au diamètre de la sphère. Il suit en outre de notre théorie que cette surface n'a pas de foyers, mais qu'elle a une sphère déférente passant par D et correspondant à la sphère directrice nulle D, de sorte qu'on peut la construire comme l'enveloppe des sphères passant par un point fixe D et ayant leurs centres sur une sphère fixe contenant ce point.

Les cyclides considérées dans les deux derniers nos peuvent se transformer par inversion en un cône quadrique osculant l'absolu (c'est-à-dire ayant avec lui un contact triponctuel) ou bien en un parabaloïde de révolution.

88. $[\bar{3}(11)]$ *Surface de la* 5e *classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire et à deux points coniques.* Par le point triple

*) Cette surface est la réciproque de celle du 3e ordre de la XVII. espèce dans la classification de Schläfli. Voir Cayley: *A Memoir on Cubic Surfaces* (Phil. Trans. 1869, vol. 159, pag. 231), à la page 316.

D passent deux droites de la surface, qui vont aux deux points coniques D', D'', et le long desquelles la surface est touchée par deux plans passant respectivement par les deux droites doubles: ces deux plans avec le plan des droites doubles forment le lieu des tangentes quadriponctuelles dans le point triple. Par chacun des points coniques passe encore une droite de la surface et ces deux droites se coupent entre elles. La surface contient 3 séries de coniques dans les plans passant par les deux droites doubles et par la droite $D'D''$. Il y a ∞^1 inversions fondamentales (parmi lesquelles une homologie harmonique), dont les centres sont sur la droite $D'D''$ et les quadriques directrices forment un faisceau de cônes. Etc. — Cette surface s'obtient en transformant par inversion conique un cône tangent dans le sommet du cône directeur à l'une des deux génératrices formant l'absolu.

89. *Surface de la 5e classe à droite double et droite cuspidale se croisant en un point triple et à un point conique.* Nous obtenons une telle surface, cas particulier de la précédente, en projetant notre $F_2^{2\cdot 2}$ Γ par un point du plan tangent le long de MM', par exemple. Alors la projection D de M sera un point triple (présentant les mêmes caractères que celui de la surface étudiée au n° 50), la projection D' de M' sera un point-clos de la droite cuspidale, et la projection D'' de M'' sera le point conique. La surface contient la droite DD'', le long de laquelle elle est touchée par un plan singulier du point triple D, plan passant par la droite cuspidale et qui avec le plan (compté deux fois) de celle-ci et de la droite double forme le lieu des tangentes quadriponctuelles en D; et elle contient encore une droite passant par D'' et coupant la droite double, et une autre droite passant par D' et appartenant au plan singulier de ce point-clos. Les plans passant par $D'D''$, par la droite double et par la droite cuspidale déterminent les 3 séries de coniques de la surface. Etc.

90. *Surface de la 5e classe à deux droites cuspidales se croisant en un point triple.* On a cette surface en projetant Γ par un point P de la droite d'intersection des deux plans tangents le long de MM', MM''. On voit ainsi que, de même que pour la surface générale à deux droites cuspidales (n° 82), il y a sur chacune de ces droites, outre le point triple, un point-clos; et la droite qui joint ces deux points-clos est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en une série de coniques tangentes en ces deux points à leurs plans singuliers. Parmi ces plans il y en a un qui touche la surface le long d'une conique et un autre qui contient les deux seules droites simples de la surface (sortant respectivement par ces points-clos). Il n'y a pas de cônes de Kummer. Pour avoir la singularité du point triple il suffit de remar-

quer qu'un espace passant par PM coupe Γ suivant une quartique ayant en M un point stationnaire dont PM est la tangente (puisque les deux plans tangents en M à Γ se coupent suivant PM). Donc chaque section plane de notre surface passant par le point triple y a un point triple dont les 3 tangentes coincident en une droite du plan des deux droites cuspidales, de sorte que ce point singulier de la surface est un *point triple uniplanaire.*

91. $[(\overline{1\,1})\,3]$ *Surface de la* 5^e *classe à droite bidouble et un point biplanaire de la* 1^e *espèce.* Sur la droite bidouble il y a deux points triples D', D'', par chacun desquels passe une droite de la surface, outre les deux droites DD', DD'' qui vont au point biplanaire D et le long desquelles la surface est touchée par les deux plans nodaux de D. Le point D est le sommet d'un cône de Kummer singulier auquel correspondent deux séries de coniques de la surface. Il y a ∞^1 inversions fondamentales avec les autres propriétés qui s'y rattachent comme dans les cas $[(\overline{1\,1})\,1\,1\,1]$, $[(\overline{1\,1})\,2\,1]$. On obtient cette surface par une inversion biplanaire appliquée à une quadrique tangente au plan d'inversion.

$\{(2\,1)\,1\,1\}$

92. Dans ce cas et dans les suivants l'arête a du cône de 2^e espèce f passant par Γ est tangente aux $F_3{}^2$ du faisceau, c'est-à-dire les deux points doubles M', M'' de Γ contenus auparavant dans cette arête coincideront dans ce cas et dans les suivants en un seul point double, que nous appellerons M. L'espace tangent en M au faisceau contient donc l'arête a de f et coupe en conséquence f en deux plans générateurs, dans lesquels se décomposera le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ. En projetant sur R_3 par un point quelconque P, la projection de M sera donc un point double D biplanaire pour la surface S projection de Γ, et les plans nodaux de ce point se couperont suivant la projection d de a. En se rappelant la construction donnée (n° 26) des droites dont les projections sur R_3 sont les tangentes quadriponctuelles dans un point double de S, et en remarquant que l'espace polaire de P par rapport à f coupe dans notre cas le cône ordinaire tangent en M à Γ suivant la droite a comptée deux fois, on voit que pour le point biplanaire D de la surface S les deux tangentes quadriponctuelles coincident en d*). D'ailleurs cela résulte aussi du fait que,

*) Cette différence entre les points biplanaires des deux surfaces $[3\,1\,1]$, $[(2\,1)\,1\,1]$ dans R_3 a déjà été remarquée par M. Loria. Mais à cela nous pouvons ajouter que, tandis que pour la première surface le point biplanaire est de 1^e espèce, pour l'autre il est de 2^e espèce, puisqu'il provient de la coincidence des deux points coniques de la surface $[(1\,1)\,1\,1\,1]$.

comme les plans générateurs de f coupent Γ en des coniques tangentes à a en M, de même pour toutes les surfaces S que nous considérerons il y a une série de ∞^1 coniques dans des plans passant par d et toutes ces coniques touchent d en D. Les espaces passant par P et par a coupent f en deux plans et Γ en deux coniques; mais parmi eux il y en a en général deux tangents à f et touchant en conséquence Γ le long de deux coniques. Donc pour chaque surface S il y a en général parmi les plans passant par d et coupant S en deux coniques deux plans dont chacun touche cette surface le long d'une conique. — En nous bornant à-présent à notre cas $\{(21)11\}$, Γ contient 4 droites, car chacun des deux plans générateurs de f qui sont tangents en M à Γ coupe une quelconque des variétés du faisceau en 2 droites, et ces 4 droites sont les seules droites de Γ. Il y a dans le faisceau 2 cônes de 1^e espèce (passant par M) auxquels correspondent deux couples de séries de coniques de Γ. Comme dans chaque système de plans générateurs d'un tel cône il y en a un qui passe par M, il y aura dans une telle série de coniques une conique décomposée en deux droites. — Chaque point de a a même espace polaire par rapport au faisceau des F_3^2; ces ∞^1 espaces polaires qui correspondent aux points de a forment un faisceau et leur plan d'intersection passe par M et appartient à l'espace tangent en M aux variétés: il est donc tangent en M à celles-ci, c'est-à-dire coupe chacune d'elles en deux droites, et il contient les sommets des deux cônes de 1^e espèce.

93. $[(21)11]$ *Surface de la 8^e classe à conique double générale et un point biplanaire de 2^e espèce.* Les deux plans nodaux du point biplanaire D passent par la droite d et sont, parmi les plans qui passent par cette droite et coupent la surface S en deux coniques tangentes en D à d, les seuls pour lesquels l'une de ces coniques se décompose en deux droites (passant par D). On a ainsi les 4 droites de S. Cette surface a deux cônes de Kummer, à chacun desquels correspondent deux autres séries de coniques de la surface: chacune de ces séries de coniques contient une conique décomposée en deux droites. Il y a ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur d et les quadriques directrices touchent en D le plan qui passe par D et par les sommets des cônes de Kummer (et forment en conséquence un faisceau ayant pour base la conique double et deux droites passant par D): parmi ces inversions il y en a une qui se réduit à une homologie harmonique ayant ce plan pour plan d'homologie et le point d'intersection de d avec le plan de la conique double pour centre d'homologie. Il y a en outre deux inversions fondamentales ayant leurs centres dans les sommets des cônes de Kummer et des quadriques directrices tangentes en D à d.

Considérée comme cyclide cette surface a donc un plan de symétrie perpendiculaire en D à d et contenant un cercle directeur réduit au cercle nul D et une conique déférente coupée par ce cercle dans les 4 foyers de la cyclide et telle que celle-ci est l'enveloppe des ∞^1 sphères ayant leurs centres sur cette conique et tangentes en D à d. Les deux points diagonaux différents de D du quadrangle déterminé par les 4 foyers sont les sommets des deux cônes de Kummer et les centres de deux inversions fondamentales ayant deux sphères directrices passant par D. Chacune de ces sphères contient deux cercles focaux tangents en D à d, d'où l'on voit quelle position ont par rapport à ces deux sphères leurs quadriques déférentes. — Cette cyclide s'obtient en transformant par inversion un cylindre quadrique.

94. [(21)11] *Surface de la* 6^e^ *classe à conique cuspidale.* Elle présente cette différence de celle du n^0^ 74, que les deux points-clos de la conique cuspidale coincident pour cette surface en un point D: la tangente d en ce point à la conique cuspidale est telle que dans chaque plan passant par d l'intersection avec la surface se compose de deux coniques ayant en D un contact quadriponctuel avec d pour tangente commune. Parmi ces plans il y en a un qui touche la surface le long d'une conique, et un autre, qui est le plan tangent singulier du point-clos particulier D et qui coupe la surface dans ses 4 droites (qui passent par D). Pour ce point-clos D la tangente singulière coincide avec la tangente d à la courbe cuspidale. Dans le plan singulier il y a une droite passant par D (la droite d'intersection de R_3 avec le plan polaire de a) qui contient les sommets des deux cônes de Kummer de la surface, cônes qui passent par la conique cuspidale, et le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de cette conique. La surface correspond à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques dont les plans passent par la droite nommée et les centres sont sur d. Elle a en outre deux inversions fondamentales.

Cette surface considérée comme cyclide (cartésienne) a pour foyers les sommets des deux cônes de Kummer et elle a en outre deux cercles focaux. Cependant si l'absolu est véritablement le cercle imaginaire à l'infini, cette cyclide est imaginaire; et le même fait arrive pour les autres cyclides cartésiennes, que nous aurons encore à considérer.

95. [$\overline{1}$(21)1] *Surface de la* 8^e^ *classe à deux droites doubles et un point biplanaire de* 2^e^ *espèce.* Des 4 droites de la surface, qui passent toutes par le point biplanaire D, deux coupent l'une et deux l'autre des droites doubles. Il y a un cône de Kummer auquel correspondent deux séries de coniques, qui, avec celles situées dans les

plans passant par les droites doubles et par l'intersection d des deux plans nodaux de D, forment les 5 séries de coniques de la surface. Il y a ∞^1 inversions fondamentales ayant les centres sur d et pour quadriques directrices des cônes (d'un faisceau), et en outre une autre inversion fondamentale conique ayant le centre dans le sommet du cône de Kummer, et une inversion fondamentale non plus conique ayant pour centre le point d'intersection des droites doubles. — On obtient cette surface par une inversion conique sur un cône quadrique dont le sommet soit sur le plan d'inversion.

96. $[(\overline{21})11]$ *Surface de la 8e classe à droite bidouble (contenant deux points triples infiniment voisins).* Cette surface à droite bidouble d diffère de celles considérées jusqu'à-présent en ce que les deux points triples de cette droite viennent coincider en un seul point D et la projection nous montre immédiatement que le cône nodal de ce point triple se décompose dans le plan ϱ qui touche la surface le long de d et deux autres plans passant aussi par d et dont chacun coupe la surface outre qu'en d en un couple de droites passant par D. La surface a deux cônes de Kummer, à chacun desquels correspondent deux séries de coniques. Elle a deux inversions fondamentales dont les centres sont les sommets de ces cônes et les quadriques directrices sont des couples de plans (passant par d), et ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont les points de d et les quadriques directrices sont des cônes ayant le sommet en D: parmi ces inversions il y a une homologie harmonique.

$\{(21)2\}$

97. Lorsque la surface Γ a cette caractéristique, elle appartient encore à un cône de 2e espèce f dont l'arête a touche le faisceau en un point double M de Γ, mais en outre elle appartient à un cône quadrique de 1e espèce f_1 dont le sommet M_1 est un autre point double de Γ. La droite MM_1 appartient à Γ et cette surface a le long d'elle pour plan tangent le plan générateur de f qui la contient et qui est l'un des deux plans tangents en M à Γ: l'autre de ces plans coupe Γ en deux droites passant par M et appartenant aux deux plans générateurs de f_1 qui passent par la droite MM_1; et on a ainsi les 3 droites de Γ. Les plans générateurs de f et de f_1 déterminent dans Γ 3 séries de coniques.

98. $[(21)2]$ *Surface de la 6e classe à conique double générale, un point conique et un point biplanaire de la 2e espèce.* Des deux plans nodaux du point biplanaire D l'un touche la surface S le long de la droite qui joint ce point au point conique D_1, l'autre la coupe en deux

droites passant par D. L'intersection d de ces deux plans est l'axe d'un faisceau de plans coupant S en des couples de coniques d'une série de coniques tangentes en D à d. Parmi ces plans il y en a deux qui touchent S le long de deux coniques. Le point conique D_1 est le sommet d'un cône de Kummer singulier, auquel correspondent deux autres séries de coniques de S.

Comme cyclide cette surface a dans le plan perpendiculaire en D à d (plan de symétrie qui contient aussi le point conique D_1) une conique déférente qui coupe le cercle nul D (cercle directeur) en un quaterne $[\overline{1}2]$ de foyers dont deux coincident en D_1, qui n'est plus un véritable foyer, de sorte qu'il reste seulement deux foyers proprement dits sur l'une des deux droites qui joignent D aux deux points cycliques du plan. Il y a en outre un couple de cercles focaux tangents à d en D: ces cercles appartiennent à la quadrique déférente de la sphère directrice nulle D_1 et cette quadrique déférente est le lieu des centres des sphères passant par D_1 et tangentes à la cyclide. Celle-ci n'a pas d'inversions fondamentales, outre celles qui correspondent aux sphères tangentes en D au plan de symétrie. — Elle est l'inverse d'une quadrique ayant un contact quadriponctuel avec l'absolu, ou bien d'un cylindre quadrique dont l'une des génératrices à l'infini soit tangente à l'absolu.

99. $[(21)2]$ *Surface de la* 4^e^ *classe à conique cuspidale et un point conique.* La conique cuspidale a, comme pour la surface du n° 94, les deux points-clos confondus en un point D; la tangente d en D à cette conique et le plan tangent singulier de ce point-clos jouissent encore des mêmes propriétés que pour cette surface-là. Seulement à-présent ce plan singulier touche la surface le long de la droite joignant le point conique D_1 au point D et la coupe encore en 2 droites passant par ce point D. Le point conique D_1 est maintenant le sommet d'un cône de Kummer singulier (dans lequel coincident les deux cônes de Kummer non singuliers de cette surface-là). — Parmi les plans passant par la droite d il y a d'ailleurs toujours un plan tangent à la surface le long d'une conique. La surface correspond encore à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques ayant les centres sur d et les plans qui passent par la droite DD_1, mais elle n'a pas d'autres inversions fondamentales. Si on la considérait comme cyclide cartésienne, elle n'aurait pas de foyers.

100. $[\overline{2}(21)]$ *Surface de la* 6^e^ *classe à deux droites doubles se croisant en un point triple et à un point biplanaire de la* 2^e^ *espèce.* Le point biplanaire D a deux plans nodaux, dont l'un touche la surface le long de la droite qui joint ce point au point triple D_1, et

l'autre coupe la surface en deux droites passant par D et appuyées respectivement sur les deux droites doubles. Le point triple D_1 a un cône tangent décomposé dans le plan des droites doubles et un cône quadrique passant par ces droites. La surface a une série de coniques dans les plans qui passent par l'intersection d des deux plans nodaux de D. Les points de cette droite d sont les centres de ∞^1 inversions fondamentales dont les quadriques directrices forment un faisceau de cônes. — Cette surface est l'inverse conique d'un cône quadrique dont une génératrice appartient au faisceau des deux droites qui composent l'absolu de l'inversion.

101. $[(\overline{21})2]$ *Surface de la* 6e *classe à droite bidouble et un point conique.* Les deux points triples de la droite bidouble d coincident pour cette surface en un point D dont le cône tangent se décompose dans ϱ et deux autres plans passant aussi par d. L'un de ces plans touche la surface le long de la droite qui joint le point triple D au point conique D_1, tandis que l'autre coupe la surface (outre qu'en d) en deux droites passant par D. La surface a un cône de Kummer singulier ayant le sommet en D_1 et tangent aux deux plans qui joignent la droite DD_1 aux deux autres droites simples de la surface. Elle a aussi ∞^1 inversions fondamentales ayant les centres sur d et les quadriques directrices formant un faisceau de cônes ayant le sommet en D. — Elle est l'inverse d'une quadrique par rapport a un couple de plans dont l'axe soit tangent à cette quadrique.

102. *Surface du* 4e *ordre et de la* 6e *classe à droite cuspidale de* 2e *espèce.* Nous entendons par ce dernier mot une droite telle que chaque section plane de la surface ait dans le point d'intersection avec cette droite un point de rebroussement de 2e espèce. Or on obtient une surface douée d'une telle droite singulière en projetant Γ (no 97) par un point P du plan tangent le long de la droite MM_1 (et comme ce plan appartient à f on voit que cette surface est un cas particulier de la précédente). Car un espace passant par P coupe Γ en une quartique située sur le cône d'intersection de cet espace avec f, c'est-à-dire sur un cône dont le sommet est sur a et une génératrice passant par P est tangente à la quartique en un point de la droite MM_1: d'où, en projetant par P cette quartique, il suit que dans R_3 chaque plan coupe notre surface en une quartique ayant sur la droite d, projection de a, un point de rebroussement de 2e espèce avec la tangente singulière en un plan fixe ϱ (le plan d'intersection de R_3 avec l'espace tangent en P à f). Si l'espace considéré passe par M, sa quartique d'intersection avec Γ a en M un point double dont l'une des deux tangentes passe par P (et l'autre appartient au second plan tangent en M à Γ); si cet espace passe au contraire par M_1 sa quartique

d'intersection avec Γ aura en ce point un point double et appartiendra à un cône quadrique (intersection avec f) qui sans avoir le sommet en ce point a pour génératrice passant par ce point double une droite qui passe par P. Donc en nommant D, D_1 les projections de M, M_1 sur R_3 (et en appliquant le contenu de la note à pag. 325) nous aurons: *La droite cuspidale de 2ᵉ espèce d contient deux points singuliers, c'est-à-dire un point triple D dont le cône nodal se décompose dans le plan* ϱ *compté deux fois et un autre plan passant par d et coupant la surface en deux autres droites qui passent par D, et un point* D_1 *d'osculation de deux nappes, c'est-à-dire un point double tel que les sections planes passant par lui ont en ce point un point d'osculation de deux branches avec la tangente située sur* ϱ. — La surface ne contient d'autres droites simples que les deux nommées. Elle a un cône de Kummer singulier avec le sommet en D_1.

$\{(31)1\}$

103. La surface Γ appartient dans ce cas à un cône quadrique de 1ᵉ espèce et à un cône de 2ᵉ espèce f qui, non seulement a l'arête a tangente aux autres variétés du faisceau en un point M double pour Γ, mais en outre est lui-même tangent à l'espace qui touche en M toutes ces variétés. En conséquence le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ se réduit dans ce cas au plan générateur de contact de f avec cet espace compté deux fois, c'est-à-dire M est un *point uniplanaire* pour Γ. Les surfaces S projections de Γ auront donc dans les points doubles qui sont les projections de M des points uniplanaires. Ce plan générateur de f coupe (une autre variété du faisceau et en conséquence) Γ suivant deux droites passant par M et qui seront les seules droites de Γ. Les deux plans générateurs du cône de 1ᵉ espèce qui passent par M touchent Γ le long de ces deux droites respectivement (comme on voit, par exemple, dans le faisceau des cônes ordinaires d'intersection des variétés du faisceau avec l'espace tangent en M). La conique polaire de f par rapport à une variété φ du faisceau qui ne soit pas un cône est dans le plan polaire de a et passe par M: elle coupe en conséquence φ seulement en deux autres points.

104. [(31)1] *Surface de la 6ᵉ classe à conique double générale et un point uniplanaire.* Ce point uniplanaire est de la 1ᵉ espèce, c'est-à-dire il abaisse de 6 la classe de la surface; effectivement on peut dire qu'il provient de la coincidence des trois points coniques de la surface [(11)21] (nº 78) lorsqu'on les fait approcher entre eux (non en une même direction). Le plan nodal de ce point uniplanaire D coupe la surface S en deux droites passant par ce point et qui sont

les seules droites de la surface, et en outre en une conique passant par D et dont la tangente d en D (*tangente singulière* du point uniplanaire) jouit de la propriété que chaque plan passant par elle coupe la surface en deux coniques tangentes en D à d. Deux de ces plans touchent S le long d'une conique. Cette surface est touchée le long de ses deux droites par deux plans tangents à un cône de Kummer de la surface: à ce cône de Kummer correspondent deux autres séries de coniques de S contenant respectivement les coniques formées par ces droites comptées deux fois. Il y a une inversion fondamentale ayant le centre dans le sommet de ce cône de Kummer et la quadrique directrice tangente en D au plan nodal et ∞^1 autres inversions fondamentales ayant les centres sur d et les quadriques directrices formant un faisceau de quadriques se touchant en D; parmi ces inversions il y a une homologie harmonique.

Comme cyclide cette surface a donc un plan de symétrie perpendiculaire à d dans le point uniplanaire D et dans lequel se trouve le sommet du cône de Kummer. Dans ce plan il y a la conique déférente, laquelle passe par D et est en outre coupée par les deux droites joignant D aux points cycliques du plan (cercle directeur) en deux points qui sont les foyers de la cyclide. On peut donc définir cette cyclide comme l'enveloppe des sphères qui ont les centres sur une conique donnée et qui passent par un de ses points donné (lequel sera le point uniplanaire). Le fait que deux des foyers coincident en D (foyer impropre) nous est aussi prouvé par la caractéristique $[\bar{2}1]$ qu'a dans ce cas sur le cercle nul D le quaterne de foyers: cela nous prouve aussi que la droite qui joint les deux foyers coupe la tangente en D à la conique déférente en un point qui est le sommet du cône de Kummer et le centre d'une sphère directrice passant par D et coupant sa quadrique déférente en une quartique [(31)], c'est-à-dire en une quartique décomposée dans les deux droites de la cyclide passant par D et un cercle focal qui touche d en D. — Cette cyclide s'obtient en transformant par inversion un cylindre parabolique.

105. [(31)1] *Surface de la 4e classe à conique cuspidale.* La conique cuspidale de cette surface a les deux points-clos coincidents en un D, dans lequel la tangente d à cette conique (tangente singulière du point-clos D) est telle que les plans passant par d coupent la surface en deux coniques ayant un contact quadriponctuel en D avec d pour tangente, et parmi ces plans le plan tangent singulier de D touche la surface le long d'une conique décomposée en deux droites passant par D et qui sont les seules droites de la surface. Ce même plan contient (en ligne droite avec D) le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de la conique cuspidale et le

sommet du cône de Kummer de la surface, cône qui passe par la conique cuspidale. Il y a ∞^1 homologies harmoniques et une inversion proprement dite, qui transforment la surface en elle-même.

106. [1(31)] *Surface de la 6e classe à deux droites doubles et un point uniplanaire.* Par le point uniplanaire D dans le plan nodal passent encore (comme pour la surface du n° 104) deux droites de la surface et une droite d qui est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface suivant des couples de coniques (parmi lesquels deux plans la touchent le long de deux coniques). Le long de ces deux droites la surface est touchée par deux plans qui passent respectivement par les deux droites doubles. Les plans qui passent par l'une ou l'autre des droites doubles, ou par d, déterminent les 3 séries de coniques de la surface. Celle-ci n'a donc pas de cônes de Kummer, et elle a ∞^1 inversions fondamentales coniques ayant les points de d pour centres, et une inversion fondamentale non conique ayant pour centre le point de rencontre des deux droites doubles. — Elle est la transformée par inversion conique d'un cône quadrique tangent au plan d'inversion

107. *Surface de la 6e classe à droite double et droite cuspidale.* La surface dont nous voulons parler s'obtient en projetant Γ (n° 103) par un point P du plan tangent à Γ le long de l'une des deux droites passant par M. Cette droite aura pour projection la droite cuspidale, qui contiendra deux points remarquables: le point d'intersection avec la droite double, point qui jouira encore comme en général (v. n° 40) de la propriété que toutes les sections planes passant par lui y ont un point de rebroussement de 2e espèce, et le point D projection de M. Un espace passant par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point stationnaire avec la tangente dans le plan tangent à Γ en M et avec un plan tangent qui passe par P. Donc le point D de la droite cuspidale est tel que toutes les sections planes passant par lui y ont encore un point de rebroussement de 2e espèce dont la tangente appartient à un plan singulier fixe, qui passe par la droite cuspidale et touche encore la surface le long d'une droite passant par D, la seule droite simple de la surface. Dans ce plan et par D passe une droite d qui est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en une série de coniques tangentes en D à d. On peut considérer le point singulier D comme provenant du point conique de la surface du n° 81 lorsqu'il va se poser sur la droite cuspidale.

108. En projetant Γ par un point P de la droite d'intersection des plans tangents le long des deux droites de Γ on a une *surface de la 6e classe à deux droites cuspidales* remarquable, qui diffère de celle générale étudiée au n° 82 en ce que dans le point de rencontre des deux droites cuspi-

dales sont venus coincider les deux points-clos qu'avaient ailleurs ces droites. Pour voir la singularité de ce point D de rencontre des droites cuspidales dans notre cas, remarquons qu'il est la projection de M et qu'un espace quelconque mené par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point stationnaire et située sur un cône n'ayant pas le sommet en M mais passant par PM (l'intersection de cet espace avec le cône de 1e espèce de notre faisceau). Donc en projetant cette quartique par P nous voyons (v. la note à pag. 326) que le point singulier D de notre surface est pour chaque section plane passant par lui un point de rebroussement de 3e espèce ayant pour tangente une droite du plan des droites cuspidales. Celles-ci sont les seules droites de la surface et il y a dans leur faisceau une droite d telle que tous les plans passant par elle coupent la surface en deux coniques ayant en D un contact quadriponctuel (avec d pour tangente commune). Les faisceaux de plans ayant pour axes les deux droites cuspidales et d déterminent les 3 séries de coniques de la surface.

109. $[(\overline{31})1]$ *Surface de la 6e classe à droite bidouble.* Les deux points triples de la droite bidouble d coincident en un D par lequel passent les deux droites simples de la surface, lesquelles se trouvent dans un plan passant par d: ce plan compté deux fois et le plan ϱ qui touche la surface tout le long de d forment le cône cubique tangent à la surface dans le point triple D. Les plans tangents à la surface le long de ses deux droites simples sont aussi tangents au cône de Kummer qu'a dans ce cas la surface, cône auquel correspondent deux séries de coniques de celle-ci.

Pour obtenir cette surface on projette Γ par un point quelconque du cône de 2e espèce f. Mais si plus en particulier on prend le centre de projection sur le plan tangent en M à Γ on a un cas particulier remarquable de cette surface, c'est-à-dire une *surface de la 6e classe à droite bidouble douée d'un point triple uniplanaire.* Car on voit facilement que dans ce cas le point triple D aura pour cône tangent le plan ϱ compté 3 fois; et on voit aussi que maintenant la surface n'a plus d'autres droites que la droite bidouble d et que le cône de Kummer a le sommet sur le plan ϱ, etc.

$\{(41)\}$

110. Cette surface Γ appartient à un faisceau de F_3^2, dans lequel il n'y a qu'un seul cône f: ce cône est de 2e espèce et a son arête a tangente aux autres F_3^2 en un point M dont l'espace tangent à celles-ci touche aussi f le long d'un plan générateur, qui (à différence du cas $\{(31)1\}$ du n° 103) touche le long d'une droite les variétés du faisceau. Donc dans ce cas la surface Γ contient seulement cette droite et a pour plan tangent le long d'elle le plan tangent en M à Γ, c'est-

à-dire le plan générateur de f nommé. Il n'y a dans Γ d'autres coniques que celles appartenant aux plans générateurs de f. Remarquons enfin encore, car il nous faudra appliquer cela dans la suite, que la conique polaire de f par rapport à une autre variété quelconque φ du faisceau touche en M la droite de Γ et coupe en conséquence φ en un seul autre point.

111. [(41)] *Surface de la 5ᵉ classe à conique double générale et un point uniplanaire.* Ce point uniplanaire D est de 2ᵉ espèce, c'est-à-dire il abaisse de 7 unités la classe de la surface; et en effet on peut dire qu'en lui sont venus coincider les deux points coniques et le point biplanaire (de 1ᵉ espèce) de la surface [(1 1)3] du nº 86. Le plan nodal de ce point uniplanaire D touche la surface le long de la seule droite contenue dans celle-ci, droite qui passe par D, et la coupe encore suivant une conique passant par D et dont la tangente d en ce point est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en une série de coniques tangentes à d en D. Parmi ces plans deux touchent la surface le long de deux coniques. La surface ne contient que cette seule série de coniques. Elle a ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur d et les quadriques directrices forment un faisceau, etc.

Considérée comme cyclide cette surface a donc un plan de symétrie perpendiculaire en D à d et dans lequel se trouve la droite de la surface. La conique déférente touche en D cette droite et coupe l'autre droite qui compose le cercle nul D en un point qui est le seul foyer de la surface. On voit ainsi que cette cyclide est l'enveloppe des ∞^1 sphères ayant leurs centres sur une conique fixe et passant par un point de contact de celle-ci avec une tangente menée par un point cyclique. Comme il n'y a pas de cône de Kummer, de même il n'y a pas d'autres sphères coupant la cyclide suivant des couples de cercles que celles tangentes en D à d. — Cette surface s'obtient en transformant par inversion un cylindre parabolique dont la droite à l'infini soit tangente à l'absolu.

112. [(41)] *Surface de la 3ᵉ classe à conique cuspidale.* Dans le point D de coincidence des deux points-clos de la conique cuspidale de cette surface la tangente d à cette conique est l'axe du faisceau de plans contenant la seule série de coniques de la surface. Parmi ces plans le plan singulier de D coupe la surface en une droite passant par D (la seule droite de la surface) comptée 4 fois. Cette droite contient le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de la conique cuspidale. Comme cyclide cartésienne cette surface n'aurait pas de foyers*).

*) Cette surface à conique cuspidale est la réciproque de la surface du 3ᵉ ordre de l'espèce XX de Schläfli (voir à la pag. 320 du mémoire de Cayley cité dans la note au nº 87).

113. $[(\overline{41})]$ *Surface de la 5e classe à droite bidouble.* Les plans passant par cette droite bidouble contiennent la seule série de coniques de la surface, coniques qui touchent d dans le point triple D. L'un de ces plans touche la surface le long d'une droite passant par D, qui est la seule droite simple de la surface; et ce plan, compté deux fois, forme avec le plan ϱ tangent à la surface le long de d le cône cubique tangent à la surface dans le point triple D.

114. *Surface de la 5e classe à droite cuspidale de 2e espèce.* On obtient une telle surface en projetant Γ (n° 110) par un point P du plan tangent en M, plan qui est aussi tangent le long de la droite de Γ; de sorte que cette surface est un cas particulier de la précédente (que l'on obtenait en projetant Γ par un point quelconque de f), c'est-à-dire le cas dans lequel la droite simple de celle-là coincide avec d. Elle est aussi un cas particulier de la surface du n° 102, comme le montrent leurs caractéristiques; et on voit de même que pour celle-ci que chaque section plane a sur la droite d (projection de a) un point de rebroussement de 2e espèce avec la tangente dans un plan fixe ϱ. Mais les deux points singuliers que nous trouvions sur la droite d pour cette surface coincident maintenant en un point triple D, projection de M. Comme chaque section de Γ faite par un espace passant par PM a en M un point stationnaire dont PM est la tangente, chaque section plane de notre surface passant par D aura en ce point un point triple à trois tangentes coincidantes; donc pour notre surface le point triple D est uniplanaire et a pour plan tangent le plan ϱ tangent à la surface le long de d. — Cette surface ne contient d'autres droites que d, ni d'autres séries de coniques que celle appartenant aux plans qui passent par d; etc.

$\{(11)(11)1\}$

115. Dans ce cas et dans le cas suivant $\{(21)(11)\}$ la surface Γ appartient à deux différents cônes quadriques de 2e espèce f, f_1, auxquels correspondent deux séries de coniques de Γ, deux séries d'espaces touchant Γ le long de ces coniques (espaces tangents à f, f_1), etc. Chacune des arêtes a, a_1 de f, f_1 coupe Γ en deux points doubles $M'M''$ et $M_1'M_1''$; et comme a et a_1 sont conjuguées par rapport à toutes les variétés du faisceau, les droites $M'M_1'$, $M'M_1''$, $M''M_1'$, $M''M_1''$ joignant les deux points doubles de l'une arête aux points doubles de l'autre appartiendront à Γ. Elles sont même les seules droites de Γ, car nous avons vu qu'une droite de Γ doit nécéssairement couper l'arête de chaque cône de 2e espèce passant par Γ. Et comme dans le cas présent il y aussi dans le faisceau des F_3^2 un cône de 1e espèce ψ, on voit bien que les plans générateurs de ce cône qui

passent respectivement par ces 4 droites (et parmi lesquels ceux qui passent par $M' M_1'$, $M'' M_1''$ appartiennent à un système de plans générateurs, et ceux qui passent par $M'' M_1'$, $M' M_1''$ appartiennent à l'autre système) sont tangents à Γ le long de ces droites. A ce cône ψ de 1e espèce correspondent deux séries de coniques de Γ, qui présentent toujours la relation que deux coniques de même série n'ont pas de points communs, tandis que deux coniques de séries différentes ont deux points communs. En outre aux deux cônes de 2e espèce f, f_1 correspondent, comme nous avons déjà dit, deux séries de coniques, dont l'une passant par M', M'' et l'autre par M_1', M_1''. Comme chaque plan générateur de l'un des 3 cônes du faisceau coupe chaque plan générateur d'un autre de ces cônes en un point de Γ, deux coniques de différentes séries de Γ (pourvu qu'elles ne correspondent pas toutes les deux à ψ) se couperont en un seul point.

Considérons deux espaces tangents respectivement aux deux cônes de 2e espèce f, f_1: les coniques le long desquelles ils touchent Γ ont un point commun. En ce point de Γ ces deux espaces touchent f, f_1, c'est-à-dire deux des variétés du faisceau: en conséquence leur intersection est le plan tangent en ce point à Γ et ce plan sera aussi tangent en ce point aux quadriques dans lesquelles ces deux espaces coupent une variété quelconque φ du faisceau. En projetant par un point quelconque de φ nous voyons donc que dans R_3 la surface à conique double qui est la projection de Γ est touchée le long de deux séries de coniques par deux systèmes simplement infinis de quadriques passant par la conique double (c'est-à-dire est l'enveloppe de chacun de ces systèmes de quadriques), tels que deux quadriques de différents systèmes se touchent en un point.

Comme le cône de 2e espèce f est touché en M_1', M_1'' par les espaces tangents en ces points à toutes les variétés du faisceau, la conique polaire de f par rapport à une autre quelconque φ de ces variétés sera tangente à ces espaces en ces deux mêmes points, de sorte que les points d'intersection de cette conique avec φ se réduisent à M_1', M_1'' (comptés deux fois). De même la conique polaire de f_1 par rapport à φ touche φ en M', M''. De là il suit que l'on ne peut plus prendre un centre de projection tel que la surface projection de Γ ait une conique cuspidale, et il suit aussi que la surface projection de Γ n'a pas, considérée comme cyclide, de véritables foyers.

116. [(1 1) (1 1) 1]. *Surface de la 4e classe à conique double générale et deux couples de points coniques.* Soient D', D'' et D_1', D_1'' les deux couples de points coniques (projections de M', M'' et M_1', M_1''): les droites contenues dans la surface sont $D' D_1'$, $D' D_1''$, $D'' D_1'$, $D'' D_1''$ et le long d'elles la surface est touchée par 4 plans

se rencontrant en un point, qui est le sommet du cône de Kummer de la surface (cône tangent à ces plans). A ce cône de Kummer correspondent deux séries de coniques de la surface. En outre les deux faisceaux de plans ayant $D' D''$ et $D_1' D_1''$ pour axes déterminent deux autres séries de coniques de la surface: dans chacun de ces faisceaux il y a deux plans touchant la surface le long de coniques. Par chaque point de la surface il passe une conique pour chaque série: deux coniques qui correspondent au cône de Kummer ne se coupent pas si elles sont de la même série et se coupent en deux points si elles sont de séries différentes (en 4 points seulement si elles sont dans un même plan); ce cas excepté, deux coniques de séries différentes se coupent toujours en un seul point. — Il y a une inversion fondamentale dont le centre est dans le sommet du cône de Kummer et la quadrique directrice passe par les 4 droites de la surface; et ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur $D' D''$ et ∞^1 dont les centres sont sur $D_1' D_1''$. En particulier il y a parmi ces inversions deux homologies harmoniques ayant les centres dans les points d'intersection des deux droites $D' D''$, $D_1' D_1''$ avec le plan de la conique double.

Cette surface (qui est elle-même sa réciproque) offre beaucoup d'interêt lorsqu'on la considère comme cyclide: elle est alors la *cyclide du Dupin*. Nous voyons que cette cyclide a deux couples de points coniques $D' D''$, $D_1' D_1''$ et deux plans de symétrie respectivement perpendiculaires aux segments $D' D''$, $D_1' D_1''$ dans leurs points de milieu. Dans ces deux plans sont les deux coniques déférentes, dont l'une touche en D_1', D_1'' le cercle (directeur) d'intersection des sphères nulles D', D'' et l'autre touche en D', D'' le cercle directeur d'intersection des sphères nulles D_1', D_1''. Les tangentes en D_1', D_1'' et en D', D'' à ces deux coniques déférentes ou à leurs cercles directeurs passent par un même point, qui est le sommet du cône de Kummer. Ces deux coniques déférentes sont les lieux des centres de deux séries de ∞^1 sphères passant respectivement par D', D'' et par D_1', D_1'', chacune desquelles a la cyclide pour enveloppe. Chaque sphère touche la cyclide de long d'un cercle: deux sphères de différentes séries se touchent en un point commun à leurs cercles de contact avec la cyclide. Si donc l'on prend d'une manière quelconque 3 sphères de l'une série, on peut définir la cyclide de Dupin comme l'enveloppe d'une série de sphères tangentes à ces 3 sphères (sur chacun de celles-ci le lieu des points de contact avec ces sphères tangentes sera un cercle de contact avec la cyclide): l'on obtient ainsi l'une des deux séries de sphères; l'autre se composera des 3 sphères données et d'une infinité d'autres, qui touchent aussi toutes les sphères de la série déjà obtenue. Les deux séries des cercles de contact de la cyclide avec ces deux séries de sphères passent respectivement par les deux couples de

points coniques, et ils sont (v. à la fin du n⁰ 64) les lignes de courbure de la cyclide. De plus les deux tangentes en un point quelconque de la surface aux deux lignes de courbure passant par lui sont les bissectrices des deux tangentes en ce point à chacune des ∞^1 quartiques de la cyclide qui y ont un point double et en particulier des tangentes aux cercles des deux autres séries qui passent par ce point (v. n⁰ 11).

Cette cyclide n'a pas de foyers: elle a sur la sphère directrice dont le centre est le sommet du cône de Kummer une quartique focale décomposée dans les 4 droites de la surface. Donc la quadrique déférente, qui est le lieu des centres des ∞^2 sphères doublement tangentes à la cyclide (et orthogonales à cette sphère directrice), devant couper cette sphère en ces droites, en sera touchée dans 4 de ses ombilics (les points coniques de la cyclide). Cette quadrique et les coniques déférentes appartiennent à un système homofocal de quadriques.

La cyclide de Dupin est l'inverse d'un cône quadrique de révolution.

117. $[\bar{1}(11)(11)]$. *Surface de la 4ᵉ classe à deux droites doubles et deux couples de points coniques.* En nommant encore D', D'' et D_1', D_1'' les deux couples de points coniques, les droites $D'D_1'$, $D''D_1''$ et $D'D_1''$, $D''D_1'$ appartiennent à la surface et coupent respectivement l'une et l'autre des deux droites doubles et ont précisément pour plans tangents le long d'elles à la surface les plans qui les joignent respectivement à celles-ci. Outre les coniques situées dans les plans qui passent par l'une ou l'autre des droites doubles, la surface a deux séries de coniques passant respectivement par D', D'' et par D_1', D_1'': dans chacune de ces deux séries il y a deux coniques de contact de la surface avec des plans. Il y a une inversion fondamentale ayant le centre à l'intersection de deux droites doubles et une quadrique directrice qui passe par celles-ci et par les 4 droites simples de la surface, et deux systèmes de ∞^1 inversions coniques fondamentales dont les centres sont resp. sur $D'D''$ et sur $D_1'D_1''$. — Cette surface est l'inverse conique d'un cône tangent aux deux droites formant l'absolu.

118. *Surface de la 4ᵉ classe à droite double et droite cuspidale et deux points coniques.* En projetant Γ par un point du plan tangent le long d'une de ses droites, par exemple de $M'M_1'$, l'on a une telle surface. La droite cuspidale (projection de cette droite de Γ) a deux points-clos D', D_1' (différents du point de rencontre avec la droite double) joints aux deux points coniques D'', D_1'' par deux droites $D'D''$, $D_1'D_1''$ qui sont les axes de deux faisceaux de plans contenant deux séries de coniques de la surface (dans chacun de ces deux faisceaux il y a un plan tangent à la surface le long d'une conique non décom-

posée), et par deux droites $D' D_1''$, $D_1' D''$ appartenant à la surface et le long desquelles celle-ci est touchée par deux plans passant par la droite cuspidale, c'est-à-dire par les plans singuliers des deux points-clos D', D_1'. La surface contient en outre la droite $D'' D_1''$ joignant les deux points coniques et a le long d'elle pour plan tangent un plan passant par la droite double.

119. *Surface de la 4e classe à deux droites cuspidales et un point conique.* On a une telle surface en projetant Γ par un point de l'une des 4 génératrices du cône de 1e espèce du faisceau, qui passent par les 4 points doubles de Γ; car une telle génératrice est l'intersection de deux plans tangents à Γ le long de deux droites, par exemple le long de $M'' M_1'$, $M'' M_1''$. En appelant D' le point conique de la surface, D'' le point d'intersection des deux droites cuspidales et D_1', D_1'' les deux points-clos de celles-ci, la surface contient les droites $D' D_1'$, $D' D_1''$, qui joignent le point conique à ces points-clos, et est touchée le long d'elles par les plans passant par ce point conique et respectivement par les deux droites cuspidales, c'est-à-dire par les plans singuliers des deux points-clos D_1', D_1''. Les deux faisceaux de plans passant par les droites $D' D''$ et $D_1' D_1''$ coupent la surface en deux séries de coniques: dans le second de ces faisceaux, c'est-à-dire parmi les plans passant par les deux points-clos D_1', D_1'', il y en a un qui touche la surface le long d'une conique (non décomposée).

120. $[(\overline{1}\,\overline{1})(1\,1)\,1]$. *Surface de la 4e classe à droite bidouble et un couple de points coniques.* Les deux points triples de la droite bidouble d sont joints aux deux points coniques par 4 droites de la surface, le long desquelles celle-ci est touchée par 4 plans tangents à un cône de Kummer. La surface contient deux séries de coniques dans les plans tangents à ce cône, une série dans les plans qui passent par la droite bidouble, et enfin une série dans les plans qui passent par les deux points coniques, parmi lesquels il y en a deux qui touchent la surface le long de deux coniques. Elle a une inversion fondamentale ayant pour centre le sommet du cône de Kummer et pour quadrique directrice le couple des plans qui joignent d aux deux points coniques; ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur la droite des deux points coniques et les quadriques directrices sont des couples de plans passant par d et formant une involution; et ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur d et les quadriques directrices sont des cônes tangents au plan ϱ le long de d et passant par les deux points coniques. — On a cette surface en transformant un cône quadrique par uné inversion biplanaire.

$\{(2\,1)\,(1\,1)\}$.

121. La surface Γ qui a cette caractéristique appartient à un faisceau de F_3^2, dans lequel il n'y a pas de cônes de 1^e espèce, mais deux cônes de 2^e espèce f, f_1, dont l'un, par exemple f_1, a son arête a_1 tangente à chaque variété du faisceau, de sorte que des deux couples de points doubles $M'\,M''$, $M_1'\,M_1''$ de la surface $\{(1\,1)\,(1\,1)\,1\}$ (n° 115) l'un $M_1'\,M_1''$ vient se composer de deux points coincidents en un M_1. On voit alors, comme dans le cas $\{(2\,1)\,1\,1\}$, que le cône quadrique ordinaire tangent en ce point M_1 à Γ se décompose en deux plans générateurs de f_1 lesquels seront tangents à Γ le long de ses deux droites $M'\,M_1$, $M''\,M_1$, qui seront les seules droites de Γ. Dans ce cas cette surface n'a plus que deux séries de coniques, respectivement dans les plans générateurs de f et de f_1.

122. $[(2\,1)\,(1\,1)]$. *Surface de la 4^e classe à conique double générale, un couple de points coniques et un point biplanaire de 2^e espèce.* Soient D', D'' les points coniques, D_1 le point biplanaire: $D_1\,D'$, $D_1\,D''$ seront les seules droites de la surface et celle-ci sera touchée le long d'elles par les deux plans nodaux de D_1. La droite d_1 dans laquelle se coupent ces plans (la tangente quadriponctuelle en D_1) est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface suivant des coniques tangentes en D_1 à d_1. La droite d qui joint D', D'' est aussi l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en des couples de coniques passant par D', D''. On a ainsi les deux séries de coniques de la surface; elles contiennent 4 coniques de contact avec des plans.

Considérée comme cyclide cette surface a le plan perpendiculaire en D_1 à d_1 (plan contenant d) et le plan perpendiculaire à $D'\,D''$ dans son point de milieu (plan contenant d_1) pour plans de symétrie. Dans le premier plan il y a un cercle directeur réduit au cercle nul de centre D_1, qui est tangent en D', D'' à sa conique déférente; dans le second plan il y a un autre cercle directeur dont la conique déférente a avec lui un contact quadriponctuel en D_1. Donc cette cyclide peut être considérée ou comme l'enveloppe des sphères ayant les centres sur une conique quelconque et passant par un foyer de cette conique, ou bien comme l'enveloppe des sphères ayant les centres sur une conique quelconque et orthogonales au faisceau des sphères passant par le cercle osculateur à cette conique dans l'un de ses sommets. Cette cyclide n'a pas de foyers, ni de courbes focales: elle est l'inverse ou d'un cône quadrique ayant un contact quadriponctuel avec l'absolu, ou d'un cylindre de révolution.

123. $[(\overline{11})(21)]$. *Surface de la 4e classe à droite bidouble et un point biplanaire de 2e espèce.* Sur la droite bidouble d il y a deux points triples D', D'' joints au point biplanaire D_1 par deux droites de la surface, le long desquelles celle-ci est touchée par les deux plans nodaux de D_1. Ces deux plans se coupent dans l'axe d_1 d'un faisceau de plans contenant une série de coniques de la surface tangentes en D_1 à d_1. Cette série de coniques et celle située dans les plans qui passent par d sont les deux seules séries de coniques de la surface. Deux des plans passant par d_1 touchent la surface le long de coniques; etc. Il y a ∞^1 inversions coniques fondamentales. — On peut construire cette surface comme l'inverse biplanaire d'un cône quadrique ayant le sommet dans le plan d'inversion.

124. $[(\overline{21})(11)]$. *Surface de la 4e classe à droite bidouble et un couple de points coniques.* Dans la droite bidouble d_1 les deux points triples coincident en un point D_1 triplanaire, dont le cône tangent se décompose dans le plan tangent à la surface le long de la droite bidouble d_1 et deux autres plans passant aussi par d_1 et tangents à la surface le long des deux droites qui joignent D_1 aux deux points coniques D', D''. Celles-ci sont les seules droites simples de la surface. Les plans passant par ces deux points coniques coupent la surface en des couples de coniques d'une série, et deux parmi eux la touchent le long de deux coniques. Etc. Cette surface (douée de ∞^1 inversions coniques fondamentales) s'obtient par une inversion dont la quadrique directrice est un couple de plans, faite sur un cône quadrique tangent à la droite d'intersection de ces plans.

125. *Surface de la 4e classe à droite cuspidale de 2e espèce et un point conique.* On a cette surface, cas particulier de la précédente, en projetant Γ par un point du plan tangent le long de $M_1 M'$ (ou de $M_1 M''$). En nommant toujours D_1, D', D'' les projections de M_1, M', M'', on voit de la même manière que pour la surface générale à droite cuspidale de 2e espèce (no 102) que cette droite d_1 a deux points singuliers, dont l'un D' est un point double de la surface dans lequel les sections planes qui y passent ont un point d'osculation de deux branches, et l'autre D_1 est un point triple dont le cône tangent se décompose dans le plan ϱ (tangent à la surface le long de d_1) compté deux fois et un autre plan passant par d_1 et tangent à la surface le long de la droite qui joint ce point triple D_1 au point conique D'' (la seule droite simple de la surface). Les plans passant par la droite $D' D''$ coupent la surface en une série de coniques et l'un deux la touche le long d'une conique (non décomposée).

$\{(2\,2)\,1\}$.

126. Nous avons déjà dit (nº 58) que cette espèce et l'espèce $\{(3\,2)\}$ de surfaces Γ sont caractérisées par le fait que dans le faisceau des F_3^2 il y a un cône de 2e espèce f, dont l'arête a se trouve en une autre de ces F_3^2 et a en conséquence tous ses points pour points doubles de Γ. Nous avons vu aussi qu'alors Γ est une surface réglée dont les génératrices s'appuient sur a. Remarquons à-présent que dans le cas $\{(2\,2)\,1\}$ il y a aussi dans le faisceau un cône de 1e espèce ψ, tandis que dans le cas $\{(3\,2)\}$ ce cône est allé coincider avec f. L'espace tangent en un point quelconque M de a au faisceau des F_3^2 les coupe en un faisceau de cônes quadriques ordinaires ayant le sommet en M et passant par a: l'intersection avec f se décompose en un couple de plans passant par a. Donc dans le cas $\{(2\,2)\,1\}$ outre la droite a ces cônes ordinaires ont deux droites communes passant par M: le plan qui les joint et le plan tangent commun le long de a forment l'intersection de cet espace avec le cône de 1e espèce ψ. Mais dans le cas $\{(3\,2)\}$, comme ψ vient coincider avec f et ce couple de plans avec le premier couple, l'une de ces deux droites communes coincide encore avec a. Donc *la surface* $\{(2\,2)\,1\}$ *est telle que par chaque point de sa droite double a passent deux génératrices distinctes appartenant aux deux plans tangents à la surface en ce point, plans qui passent aussi par a; et les plans qui contiennent les couples de génératrices passant par les différents points de a sont les plans générateurs du cône ψ de système contraire au plan générateur qui contient a. Pour la surface* $\{(3\,2)\}$ *il ne passe par chaque point de a qu'une seule génératrice variable outre la génératrice fixe a et il y a dans chacun de ces points un plan tangent variable passant par la génératrice variable et un plan tangent fixe qui touche la surface tout le long de a.*

Dans notre cas $\{(2\,2)\,1\}$ la surface contient une seule série de coniques proprement dites. En effet la conique appartenant à un plan générateur de f se décompose dans la droite a et une génératrice; la conique appartenant à un plan générateur de ψ de système différent de celui du plan générateur qui passe par a se décompose dans les deux génératrices de la surface qui passent par le point d'intersection de ce plan avec a. Donc les seules coniques de Γ qui ne se décomposent pas sont celles appartenant aux plans générateurs de ψ de même système que celui passant par a (pour lequel la conique de Γ se réduit à la droite a comptée deux fois): ces coniques ne rencontrent pas a, et chaque espace passant par l'une d'elles (c'est-à-dire chaque espace tangent à ψ) coupe encore Γ en deux génératrices passant par le point d'intersection de cet espace avec a.

On peut se demander s'il y a un point de a pour lequel les deux génératrices de Γ qui y passent coincident. Le raisonnement, que nous avons fait pour trouver ces couples de génératrices correspondants aux différents points de a, prouve qu'en un tel point l'espace tangent aux F_3^2 du faisceau doit aussi être tangent (le long d'un plan) à f. Or les espaces tangents au faisceau dans les points de a forment un faisceau autour du plan générateur de ψ qui contient a, et il y a en général dans un faisceau d'espaces passant par l'arête d'un cône quadrique de 2e espèce deux espaces qui sont tangents à celui-ci. Donc il y a sur la droite double a de Γ deux points, pour chacun desquels les deux génératrices qui y passent coincident, c'est-à-dire deux points de rebroussement. La surface Γ est touchée le long des deux génératrices qui passent par ces deux points par deux plans générateurs de ψ.

127. [(2 2) 1]. *Surface réglée à conique et droite doubles.* Par chaque point de la droite double d ou de la conique double (qui rencontre d) passent deux génératrices, qui coincident seulement pour deux points de d (comme nous avons vu) et pour deux points de la conique (comme on voit en remarquant que parmi les espaces qui passent par le centre de projection et par a, espaces qui coupent encore Γ suivant des couples de droites dont les projections sont les couples de génératrices de notre surface qui passent par les différents points de la conique double, il y en a deux tangents à f). Les plans qui joignent les couples de génératrices passant par les différents points de d coupent encore la surface suivant des coniques et ils enveloppent un cône quadrique (de Kummer) bitangent à la surface: on obtient ainsi toutes les coniques de la surface. Pour un de ces plans la conique d'intersection se réduit à la droite d comptée deux fois. On voit que cette surface est, parmi les surfaces réglées du 4e dégré, celle de la 2e espèce dans la classification de M. Cremona*) et on en obtient ainsi les principales propriétés. Ajoutons que la surface a une seule inversion fondamentale dont le centre est le sommet du cône quadrique bitangent et la quadrique directrice passe par la conique et la droite double et a ce point pour pôle du plan de la conique double relativement à elle.

On peut considérer cette surface comme une cyclide et alors la sphère directrice de l'inversion fondamentale sera raccordée à sa quadrique déférente le long de la génératrice commune d. — Elle est l'inverse d'un cône dont le sommet soit sur l'absolu de l'inversion.

128. $[\bar{1}\,(2\,2)]$. *Surface réglée à trois droites doubles.* On l'obtient en supposant que le centre de projection de Γ soit sur ψ, et on voit

*) *Sulle superficie gobbe di quarto grado.* Memorie dell' Accademia di Bologna, 1868, tomo VIII, ser. 2e, pag. 235—250.

ainsi que deux de ces droites doubles sont coupées par la troisième, laquelle fait partie du système des génératrices (et compte pour deux génératrices, étant effectivement la projection de deux génératrices de Γ): ces deux droites doubles sont au contraire des *directrices*, c'est-à-dire sont coupées par toutes les génératrices (car l'une d'elles est la projection de a et l'autre est la projection d'une conique de Γ). Par chaque point de l'une quelconque de ces directrices passent deux génératrices, qui coincident seulement pour deux certains points de cette directrice. La série des coniques de la surface se trouve maintenant dans les plans qui passent par la génératrice double. Cette surface est celle de la 5[e] *espèce* dans la classification nommée. Elle a deux inversions fondamentales*) dont les quadriques directrices passent par les trois droites doubles et les centres sont respectivement les deux points d'intersection de la génératrice double avec les deux droites directrices. On peut l'obtenir en transformant par inversion conique un cône quadrique dont le sommet soit sur l'absolu de l'inversion.

Si le centre de projection de Γ n'est pas en un point quelconque de ψ, mais bien en un point de l'un des deux plans générateurs de ψ que nous avons vu (à la fin du n[0] 126) être tangents à Γ le long d'une droite, alors on aura comme cas particulier la *surface réglée à deux droites doubles directrices et une génératrice cuspidale*, c'est-à-dire une génératrice telle que chaque section plane de la surface a en elle un point stationnaire. Cette génératrice sera précisément la projection de la droite de Γ dont le plan tangent passe par le centre de projection.

129. *Surface réglée à deux droites doubles directrices infiniment voisines et une génératrice double.* On a cette surface en projetant Γ par un point du plan générateur de ψ qui passe par a. Alors dans la projection d de a coincident évidemment les deux droites directrices de la surface du n[0] précédent; l'on a donc une surface de la 6[e] *espèce*. Comme les plans générateurs de ψ de système contraire à celui du plan générateur passant par a (plans qui contiennent les couples de génératrices de Γ passant par les points de a) sont maintenant projetés suivant les plans qui passent par d, on voit directement que par chaque point de d passent deux génératrices de notre surface, qui appartiennent à un plan passant aussi par d; deux de ces plans passant par d touchent la surface le long de deux génératrices, etc.

130. $[(\overline{2\,2})\,1]$. *Surface réglée à droite triple et douée d'un cône quadrique bitangent.* On l'obtient en prenant le centre de projection

*) A première vue l'on en obtient seulement une: mais cela dépend de ce que la même surface peut être considérée de deux façons différentes comme la projection de Γ suivant que l'on considère l'une ou l'autre des deux directrices doubles comme la projection de la droite double a de Γ.

de Γ sur f: alors on voit bien que chaque point de la projection d de a sera un point triple pour la surface projection de Γ, c'est-à-dire que d en sera une droite triple. Par chacun de ses points il passe deux génératrices variables de la surface (qui coincident pour deux de ces points) et une fixe qui est la droite d même (comme projection de la génératrice de Γ qui se trouve dans le plan générateur de f passant par le centre de projection). Le plan qui joint ces deux génératrices variables coupe encore la surface en une conique et il enveloppe le cône quadrique bitangent que nous avons nommé, et qui est tangent à d. Dans chaque point de d il y a deux plans tangents variables passant par d et un plan tangent fixe ϱ, qui ne coupe la surface que dans la droite d comptée 4 fois. Il y a une inversion fondamentale dont le centre est le sommet du cône bitangent et la quadrique directrice un couple de plans passant par d. Cette surface réglée du 4e degré est de la 3e *espèce.*

$\{(3\ 2)\}$.

131. Nous avons déjà vu (n° 126) que cette surface réglée Γ a une droite double a, qui est en même temps une génératrice douée d'un plan tangent fixe qui est un plan générateur de f, de sorte que par chacun de ses points il ne passe qu'une génératrice variable de Γ, laquelle appartient au plan variable tangent en ce point à Γ. Ajoutons maintenant que comme dans le faisceau des F_3^2 qui passent par Γ il n'y a pas de cônes autres que f, cette surface Γ ne contient aucune conique.

132. [(3 2)]. *Surface réglée à conique et droite doubles (n'ayant pas de cône quadrique bitangent).* Par chaque point de cette droite double il passe, outre celle-ci, qui est une génératrice fixe le long de laquelle la surface a un plan tangent fixe, une seule génératrice variable appartenant au plan tangent variable de ce point; tandis que par les points de la conique double passent des couples de génératrices situées dans les plans qui passent par la droite double. Il n'y a pas de coniques sur cette surface, et l'on reconnait bien qu'elle est de la 4e *espèce.* Elle n'a pas d'inversions fondamentales et est l'inverse d'un cône quadrique dont une génératrice touche dans le sommet l'absolu.

132. $[(\overline{3\ 2})]$. *Surface réglée à droite triple (comme lieu et comme enveloppe).* Le centre P de projection de Γ étant sur f soient ϱ l'intersection de l'espace tangent en P à f avec R_3, et ϱ' la projection du plan tangent à Γ le long de a. Alors on voit que la surface réglée projection de Γ aura la droite triple d telle que la surface passe deux fois par elle comme génératrice et a le long d'elle les deux plans tangents fixes ϱ, ϱ', de sorte qu'en chacun de ses points il y a ces deux

plans tangents fixes et un plan tangent variable qui coupe la surface, outre qu'en d, dans la génératrice variable qui passe par ce point. On voit donc que non seulement la courbe double, mais aussi la développable bitangente de la surface réglée se réduit à la droite d (comme enveloppe de plans) comptée 3 fois. C'est donc la surface réglée de la 10e *espèce*.

On obtient un cas particulier remarquable de cette surface en supposant que le centre P appartienne au plan générateur de f qui touche Γ le long de a. Alors les deux plans ϱ, ϱ' tangents à la surface le long de d coincident en un seul et (comme on voit aussi en remarquant que l'intersection de Γ avec un espace passant par P a sur a un point double dont une tangente passe par P, et en projetant) la droite triple d sera telle que chaque section plane de la surface aura sur d un point stationnaire avec la tangente sur le plan fixe ϱ et par lequel passe une autre branche de cette section plane ayant la tangente dans le plan tangent variable à la surface en ce point.*)

Faisceaux de cônes quadriques et projections de leurs surfaces d'intersection.

134. Nous avons ainsi considéré tous les cas que peuvent présenter une $F_2^{2\cdot 2}$ Γ du R_4 et ses projections sur R_3, lorsque parmi les ∞^1 F_3^2 qui la contiennent il y en a qui ne sont pas des cônes, de sorte que le déterminant d'une indéterminée de ces variétés ne s'annulle pas identiquement. Il nous reste donc seulement à étudier les cas où Γ appartient à ∞^1 cônes. Alors si nous supposons, comme nous avons toujours fait jusqu'ici, que Γ ne se décompose pas en deux quadriques, il y aura seulement les cas suivants à considérer.**)

1° Le faisceau déterminé par Γ se compose de cônes ayant le même sommet. Mais alors on voit bien que Γ est un cône à deux dimensions ayant ce même sommet et que l'on peut obtenir en projetant par un point quelconque de R_4 une courbe quartique gauche (de 1e espèce). La projection de ce cône sur R_3 sera donc un cône quartique ordinaire à deux génératrices doubles (ou cuspidales) distinctes ou coincidentes, que l'on peut obtenir en projetant par un point de R_3 une quartique gauche de 1e espèce de cet espace, ou, ce qui est la même chose, une quartique plane à deux (ou trois) points doubles ou stationnaires, distincts ou coincidents. Il y a plusieurs espèces de tels cônes comme de telles quartiques planes; mais comme celles-ci

---

*) Ce cas particulier de la 10e espèce de Cremona se rencontre déjà dans l'Anal. Geometrie d. Raumes de Salmon-Fiedler.

**) Voir nos *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque*, n° 27 (Atti della R. Acc. d. scienze di Torino, vol. XIX).

ont déjà été étudiées et classifiées presque complètement (surtout si l'on y ajoute la note au n⁰ 3 de ce travail) par d'autres écrivains, nous pouvons omettre de nous en occuper.

135. 2⁰ Le faisceau déterminé par Γ se compose de cônes de 1e espèce dont les sommets ont pour lieu une conique: ces cônes contiennent alors le plan de cette conique et Γ se décompose en conséquence en ce plan et une surface du 3e ordre passant par cette conique. On voit très-facilement que cette surface est réglée et qu'elle a une droite directrice coupée par toutes les génératrices. Ses projections sur R_3 sont donc des surfaces cubiques réglées douées d'une droite directrice simple et d'une droite directrice double (projection d'une conique située dans un plan passant par le centre de projection). Pour une position convenable du centre de projection on peut obtenir que ces deux directrices coincident. On a ainsi les deux espèces de surfaces cubiques réglées de R_3; mais comme M. Veronese*) a déjà appliqué pour l'étude de celles-ci la projection d'une surface cubique (réglée) du R_4, nous ne croyons pas devoir insister là-dessus.

136. 3⁰ Le faisceau déterminé par Γ se compose de cônes de 1e espèce dont les sommets ont pour lieu une droite m, c'est-à-dire de ônes touchés le long d'une génératrice commune m par un même espace μ. Dans ce cas il y a dans le faisceau deux cônes de 2e espèce: en effet cet espace μ tangent au faisceau le long de m coupe les cônes suivant des couples de plans générateurs des deux systèmes qui passent par m et forment une involution de plans du faisceau ayant m pour axe dans cet espace μ. Cette involution aura en général deux plans doubles, le long desquels μ touchera les deux cônes de 2e espèce du faisceau. Mais si ces deux plans doubles (et par suite ces deux cônes) coincident, tous ces couples de plans auront un plan commun, c'est-à-dire nous aurons un faisceau de cônes ayant un plan générateur commun: nous retomberons donc dans le cas précédent. Nous pouvons donc supposer que les deux cônes de 2e espèce f, f_1 du faisceau et leurs plans de contact avec μ soient distincts.

Soient a et a_1 les arêtes de f, f_1: elles appartiendront à ces deux plans de contact de μ avec ces cônes et elles couperont m (c'est-à-dire Γ) en deux points différents, par chacun desquels devra passer chaque droite contenue dans Γ (n⁰ 58); d'où il suit que la surface Γ ne contient d'autre droite que la droite double m. Chaque espace coupe Γ en une quartique ayant sur m un point double dont les deux tangentes appartiennent aux deux plans générateurs situés sur μ du cône

*) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse* u. s. w., nos 57—60.

du faisceau qui a le sommet en ce point: ce point double devient pour la quartique un point de rebroussement lorsqu'il est l'intersection de m avec a ou avec a_1. Chacun des ∞^2 espaces qui passent par m coupe encore Γ en une conique appuyée sur m, car il coupe le faisceau en un faisceau de cônes quadriques ordinaires se touchant le long de m et se coupant encore en conséquence en une conique appuyée sur m. La surface Γ contient donc ∞^2 coniques. Par chaque point de m il en passe une infinité et les plans qui les contiennent sont les plans générateurs du cône du faisceau qui a ce point de m pour sommet: aux deux systèmes de plans générateurs de ce cône correspondent donc deux différentes séries de ∞^1 coniques de la surface passant par ce point, et en variant ce point sur m et en conséquence ce cône dans le faisceau on obtient ∞^1 couples de séries de coniques, qui forment tout le système des ∞^2 coniques de Γ. Les relations entre les deux systèmes de plans générateurs d'un cône de 1^e espèce nous montrent que parmi les coniques qui passent par un point quelconque M de m deux coniques ne se coupent pas ailleurs si elles appartiennent à la même série et se coupent en un autre point si elles sont de séries différentes; mais deux coniques coupant m en deux points différents se rencontrent toujours en un point (le point d'intersection de leurs plans). La surface Γ a deux plans tangents en un point quelconque M de m: les deux plans générateurs suivant lesquels μ est coupé par le cône du faisceau ayant M pour sommet. Les coniques dans lesquelles ils coupent Γ se réduisent à la droite m comptée deux fois, et on voit que les deux séries de coniques de Γ qui passent par M se distinguent en ce que les tangentes en M aux coniques d'une série appartiennent à l'un de ces deux plans tangents à Γ, tandis que les tangentes aux coniques de l'autre série appartiennent à l'autre plan tangent. Tous ces couples de plans tangents à Γ dans les points de m forment, comme nous avons déjà remarqué, une involution dont les plans doubles sont les plans ma, ma_1 dans lesquels les cônes de 2^e espèce f, f_1 sont touchés par μ. Donc dans chacun des deux points ma, ma_1 les deux plans tangents à Γ coincident respectivement dans ces plans doubles, et les coniques de Γ passant par l'un ou l'autre de ces deux points forment seulement plus une série correspondant au système des plans générateurs d'un cône de 2^e espèce.

Les espaces tangents aux variétés du faisceau en un point quelconque de Γ se coupent dans le plan tangent en ce point à Γ et chacun d'eux coupe Γ en deux coniques appartenant aux deux différentes séries qui correspondent au cône ayant cet espace tangent. D'ailleurs le plan tangent à Γ coupe les cônes du faisceau suivant des couples de droites d'une involution dont les droites doubles sont celles de contact de ce plan avec f, f_1. Donc les tangentes en un point quelconque

de Γ aux couples de coniques qui appartiennent aux ∞^1 couples de séries forment une involution, dans laquelle les droites doubles sont les tangentes aux coniques des deux séries doubles, c'est-à-dire les deux tangentes à Γ qui coupent a et a_1.

137. Projetons maintenant Γ sur R_3 et soit φ le cône du faisceau qui passe par le centre de projection P et que nous supposerons avant tout différent de f, f_1. Les deux plans générateurs de φ qui passent par P coupent Γ en deux coniques passant par le point de m qui est le sommet de φ: la projection de m et les projections de ces deux coniques seront donc trois droites doubles d, d_1, d_2 se croisant en un point triple pour la surface S projection de Γ. Donc celle-ci est une *surface de Steiner du 4e ordre et de la 3e classe.**) Et des propriétés vues de Γ nous concluerons des propriétés de cette surface. Ainsi elle contient ∞^2 coniques, chaque plan tangent la coupant suivant deux de ces coniques: toutes ces coniques rencontrent les 3 droites doubles. Par rapport à l'une (quelconque) d des trois droites doubles on peut diviser ce système doublement infini de coniques en ∞^1 couples de sériés simplement infinies: les coniques d'un couple de séries passent par un même point de cette droite double, mais celles d'une série y passent dans l'une et celles de l'autre série dans l'autre des deux nappes de la surface qui passent par cette droite double. Les plans des coniques de ces deux séries (dont chacun contient une conique de l'une série et une de l'autre série) enveloppent un cône quadrique (de Kummer): en faisant mouvoir le point de la droite double par lequel passent ces deux séries de coniques ce cône quadrique varie aussi et les plans tangents à ces ∞^1 cônes sont les plans tangents de la surface de Steiner. Les couples de plans tangents à la surface dans les points de d forment une involution dont les plans doubles sont tangents en deux points-pinces de d. Pour chacun de ces deux points (projections des points ma, ma_1) les deux séries de coniques qui y passent se confondent en une seule et les plans qui contiennent ces coniques passent par une même droite c ou c_1 (la projection de a ou de a_1). Mais comme par le point P passent deux espaces tangents à f ou à f_1, on voit que parmi les plans qui passent par c ou par c_1 il y en a deux qui touchent S le long d'une conique. La surface S est

*) Quant au fait que la classe de cette surface est 3 nous pouvons le prouver en remarquant qu'elle sera la même que pour la projection de Γ faite par un point de Γ, projection qui est une surface cubique réglée, car les coniques de Γ qui passent par ce point sont projetées sur R_3 suivant des droites. — On voit ainsi un lien étroit entre la surface de Steiner et la surface cubique réglée, d'où l'on a une explication de la ressemblance entre leurs représentations planes que M. Cremona a mise en vue (dans le travail que nous citerons bientôt).

donc touchée le long de coniques par 4 plans et on voit que les couples d'arêtes opposées du tétraèdre qu'ils déterminent sont coupés respectivement par les trois droites doubles dans les couples de points-pinces de celles-ci. Par un point quelconque de la surface passent ∞^1 coniques et on peut les grouper en couples de façon que deux coniques du même couple se coupent aussi sur la droite double d: alors les tangentes en ce point à ces couples de coniques forment dans le plan tangent à S un faisceau en involution, dans lequel les droites doubles sont les deux droites du faisceau qui s'appuient sur les deux arêtes opposées c, c_1 du tétraèdre, et un couple de droites conjuguées est celui des tangentes principales de la surface en ce point, c'est-à-dire des tangentes en ce point aux deux coniques d'intersection de la surface avec le plan tangent. — Ainsi l'on pourrait encore obtenir facilement d'autres propriétés de la surface de Steiner, surtout celles qui ne sont pas symétriques par rapport aux trois droites doubles: par exemple les sections de Γ faites par des espaces quelconques nous donnent immédiatement par la projection ∞^4 courbes quartiques sur S, dont chacune a un point double sur l'une d des droites doubles et coupe en deux points chacune des deux autres, etc., etc. Mais passons plutôt aux cas particuliers de la surface S. Remarquons seulement qu'elle a 6 systèmes de ∞^1 inversions fondamentales coniques dont les centres sont sur une arête du tétraèdre considéré et les cônes directeurs passent par les trois droites doubles; cette surface de Steiner peut se construire en transformant par une inversion conique une quadrique tangente dans le sommet du cône directeur au plan d'inversion.

138. Supposons maintenant que la variété φ du faisceau qui passe par le centre de projection P soit l'un des deux cônes de 2^e^ espèce, par exemple f_1. Alors la projection S' de Γ aura dans la projection de la conique de Γ située dans le plan générateur de f_1 qui passe par P une droite bidouble d_1 (n° 59) le long de laquelle deux nappes différentes de la surface touchent un même plan ϱ; les deux points triples, qu'a en général une droite bidouble d'une surface du 4^e^ ordre, coincideront dans le point d'intersection de d_1 avec une autre droite double d (projection de m) de S'. Cette surface sera ce cas particulier de la surface de Steiner que l'on obtient en supposant que deux droites doubles de celle-ci s'approchent entre elles jusqu'à coincider. Elle contient encore ∞^2 coniques, que l'on peut grouper par rapport à la droite double d en ∞^1 couples de séries jouissant toujours des mêmes propriétés. Mais outre ϱ qui touche S' le long de la droite d_1 (comptée 4 fois) il n'y a plus que deux plans qui touchent S' le long de coniques: leur droite d'intersection coupe d dans son point-pince. En effet les deux

espaces tangents à f_1 menés par P coincident dans l'espace tangent en P à f_1 (espace qui coupe R_3 en ϱ), tandis que les deux espaces tangents à f menés par P sont distincts et coupent R_3 suivant les deux plans doubles nommés.

On peut obtenir cette même surface en prenant P encore comme au n⁰ précédent sur une variété quelconque du faisceau, mais en outre sur l'espace μ tangent à tout le faisceau le long de m. Alors la projection de la conique de Γ située dans l'un des deux plans générateurs de cette variété qui passent par P (dans celui qui appartient à μ) coincide avec la projection de m et donne lieu à la droite bidouble de la surface projection, tandis que la projection de la conique située dans l'autre plan générateur donne lieu à la droite double.

139. Si enfin P se trouve soit sur f_1, soit sur μ, c'est-à-dire sur le plan générateur de f_1 qui passe par m, alors on voit que les trois droites doubles de la surface S'' projection de Γ coincideront en une seule droite *tridouble* (*d'osculation de deux nappes*) d. Comme chaque espace passant par P coupe Γ en une quartique gauche ayant un point double sur m et telle qu'un autre sommet de cône quadrique passant par elle est en ligne droite avec ce point double et avec P, on conclut que chaque section plane de notre surface S'' a en d un point d'osculation de deux branches, dont la tangente appartient à un plan fixe ϱ (intersection de μ avec R_3). Des deux espaces tangents à f menés par P l'un est à-présent μ. Donc la surface S'' n'a, outre le plan ϱ, qu'un seul plan singulier qui la touche suivant une conique.*)

140. Cherchons encore d'obtenir la représentation plane de la surface de Steiner S et de ses deux cas particuliers S', S'' par notre méthode. Comme sur Γ il n'y a d'autres droites que m, cette méthode consistera à projeter Γ par m sur un plan R_2; projection qui est univoque car chaque plan passant par m coupe encore Γ en un point. Un espace mené par m coupe Γ suivant une conique et R_3 suivant une droite. Donc *les droites du plan R_2 sont les images des coniques de chacune de nos surfaces.* Parmi les espaces passant par m il y a μ, qui contient les couples de plans tangents à Γ dans les points de m. Donc *chacune des droites doubles de nos surfaces a pour image dans R_2 une droite dans laquelle chaque couple de points d'une involution est*

*) Les surfaces des nos 137, 138, 139 sont les réciproques des surfaces cubiques des espèces XVI, XVIII, XIX de Schläfli. — M. Cremona dans la note *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo ordine su un piano* (Rendiconti Ist. Lombardo, vol. IV, 1867) s'est aussi occupé des deux cas particuliers de la surface de Steiner que nous avons considérés (mais il dit que le premier de ces cas particuliers lui avait été fait remarquer par Clebsch).

l'image d'un point de la droite double comme appartenant à deux nappes différentes de la surface. Nous ne nous sommes pas bornés dans cet énoncé à la droite double d qui correspond à m, car chacune des deux autres droites doubles d_1, d_2 avec tous ses points correspond à une conique de Γ avec ses points par couples d'une involution dont P est le pôle; de sorte qu'en projetant par m sur R_2 l'on obtient aussi comme image de d_1 ou de d_2 une droite avec des couples de points d'une involution. Cependant pour S' comme au lieu des deux droites doubles d_1, d_2 l'on a une droite bidouble dans laquelle celles-ci coincident, de même dans sa représentation sur R_2 deux des trois droites considérées coincident; et pour S'' la droite tridouble aura pour image une droite dans laquelle coincideront ces trois droites.

Chaque section de Γ faite par un espace quelconque est une quartique ayant un point double sur m et appartenant à un cône quadrique ordinaire ayant le sommet en ce point. En la projetant donc sur R_2 par m on obtient une conique coupant l'image de d en deux points conjugués de son involution. Une telle conique est donc l'image d'une quartique de S, ou S', ou S'', ayant un point double sur d. En particulier les images des sections planes de chacune de nos surfaces formeront donc une série linéaire triplement infinie de coniques (considérées comme courbes du second ordre) coupant les images des droites doubles en des couples de points des involutions qui y sont déterminées. — On a ainsi les propriétés fondamentales de la représentation plane connue de la surface de Steiner et de ses cas particuliers.

Invariants absolus des cyclides. Réalité de ces surfaces.

141. Considérons dans R_4 une variété quadratique φ, qui ne soit pas un cône et qui soit coupée par une autre F_3^2 et en conséquence par le faisceau qu'elle détermine avec celle-ci suivant une $F_2^{2\cdot 2}$ que nous appellerons Γ. Alors si d'un point quelconque de R_4 on prend les espaces polaires par rapport aux variétés du faisceau, ils formeront un faisceau d'espaces (se coupant dans le *plan polaire* du point par rapport à Γ), et si l'on fait varier ce point dans R_4 tous les faisceaux d'espaces que l'on obtient ainsi seront projectifs entre eux et avec le faisceau considéré de F_3^2. Pour chaque cône de 1e ou de 2e espèce du faisceau des F_3^2 il y a dans chacun de ces faisceaux d'espaces polaires un espace qui passe par son sommet ou par son arête. Le groupe de tous ces espaces qui correspondent au groupe de cônes (de 1e ou de 2e espèce) de notre faisceau est donc projectif à ce groupe, c'est-à-dire il a les mêmes invariants absolus que celui-ci: or ces invariants absolus (rapports anharmoniques des quaternes d'éléments du groupe) jouissent de l'importante propriété de former justement un

système complet d'invariants absolus de Γ*). Et si au groupe des cônes du faisceau on adjoint la variété φ, c'est-à-dire si au groupe des espaces polaires relativement à ces cônes on adjoint l'espace polaire par rapport à φ, on obtient les invariants absolus du système formé par Γ et φ, c'est-à-dire des quantités telles que si elles sont égales pour deux $F_2^{2\cdot 2}$ de même caractéristique situées sur φ, on peut trouver une telle transformation projective de φ en soi-même que l'une de ces $F_2^{2\cdot 2}$ se transforme dans l'autre.

Si au lieu d'une seule $F_2^{2\cdot 2}$ on considère sur φ les ∞^1 $F_2^{2\cdot 2}$ dans lesquelles φ est coupée par une série de variétés inscrites avec φ dans une même variété développable de la 4e classe, on démontre facilement que pour toutes ces $F_2^{2\cdot 2}$ les groupes des cônes de 1e ou de 2e espèce qui y passent (et qui ont respectivement les mêmes sommets ou les mêmes arêtes) ont tous les mêmes rapports anharmoniques.

On peut réduire les propositions regardant les invariants absolus de Γ à ne faire que des constructions sur φ, en prenant sur φ le point dont on cherche les espaces polaires et en substituant à ces espaces leurs quadriques d'intersection avec φ et au plan polaire du point par rapport à Γ sa conique d'intersection avec φ (conique commune à toutes ces quadriques). On construit facilement cette conique comme le lieu des points conjuguées harmoniques du point considéré de φ par rapport aux couples de points dans lesquels Γ est coupée par les droites de φ qui passent par ce point.

Maintenant projetons par un point de φ sur R_3 et nous aurons pour les cyclides les propriétés suivantes.

142. Par rapport à une cyclide quelconque chaque point A de l'espace a pour lieu de ses points conjugués harmoniques relativement aux couples de points, dans lesquels les droites passant par A et appuyées sur l'absolu coupent encore la cyclide, un cercle que nous nommerons le *cercle polaire* du point A. Aux ∞^3 points de l'espace correspondent ainsi ∞^3 cercles polaires par rapport à la cyclide donnée; et en considérant toutes les ∞^1 cyclides d'une série homofocale on aura ∞^4 cercles polaires. Or dans le faisceau des sphères passant par un tel cercle il y a pour chaque sphère directrice isolée de ces cyclides une sphère qui lui est orthogonale, tandis que pour chaque faisceau de sphères directrices il y a dans notre faisceau une sphère qui est orthogonale à toutes celles-ci, c'est-à-dire qui passe par le couple de points (-sphères) correspondant. Si l'on détermine ainsi un groupe de

*) Cette proposition est une conséquence d'un théorème de M. Weierstrass sur le système de deux formes quadratiques. Voir le § 3 de la 2e Partie de notre *Studio sulle quadriche* etc. cité à pag. 322.

sphères dans chaque faisceau ayant pour base l'un des ∞^4 cercles polaires, tous ces groupes seront projectifs entre eux et auront pour invariants absolus les invariants absolus de la série homofocale considérée de cyclides dans la géométrie des inversions, c'est-à-dire des quantités dont l'égalité pour deux séries homofocales de cyclides ayant la même caractéristique est la condition nécéssaire et suffisante pour que l'on puisse transformer par des inversions l'une série dans l'autre. — Et si, au lieu de considérer tous les ∞^4 cercles polaires, on considère seulement une cyclide déterminée et les ∞^3 cercles polaires des points de l'espace par rapport à elle, alors il ne variera pas en passant de l'un à l'autre cercle polaire non seulement les invariants absolus du groupe considéré de sphères passant par un tel cercle, mais ceux du même groupe auquel on adjoigne la sphère nulle ayant pour centre le point dont ce cercle est polaire: et ces invariants seront les invariants absolus de la cyclide dans la géométrie des inversions.

En particulier si le point dont on prend le cercle polaire par rapport à la cyclide se trouve sur celle-ci, ce cercle se réduit à un cercle nul ayant ce point pour centre et situé dans le plan tangent en ce point à la cyclide; le faisceau de sphères se réduit au faisceau des sphères tangentes en ce point à la cyclide et nous retrouvons alors, mais complétée, une proposition due (pour la cyclide générale) à M. Darboux, et que nous avions déjà démontrée au n^0 11.

Ces théorèmes nous donnent, par le simple examen de la caractéristique d'une cyclide le nombre de ses invariants absolus. Ainsi la cyclide générale [11111] en aura 3 (et sa série homofocale 2), les cyclides [2111] et [(11)111] en auront 2 (et leurs séries homofocales 1, tandis que toutes les autres espèces de séries homofocales de cyclides n'ont plus d'invariants absolus), les cyclides [311], [221], [(11)21], [(21)11] et [(11)(11)1] en auront 1 seul, et enfin toutes les autres espèces de cyclides n'en auront aucun.

143. Si la conique double des surfaces, que nous avons étudiées dans ce travail, est réelle, on voit facilement que toutes les différentes espèces de ces surfaces peuvent être réelles. Mais si nous considérons les cyclides, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire des surfaces dont la conique double n'a pas de points réels (tout en appartenant à un plan réel et à des quadriques réelles), alors plusieurs de ces espèces de surfaces seront de leur nature imaginaires. En effet toutes les droites d'une telle surface doivent en ce cas être imaginaires (puisqu'elles coupent la conique double), et afin que la surface puisse être réelle elles devraient être deux-à-deux imaginaires conjuguées. Or en revoyant nos résultats sur le nombre et la disposition des droites de

ces différentes surfaces, on voit que parmi les 18 espèces de cyclides les 8 suivantes

$$[221],\ [32],\ [41],\ [5],\ [(21)2],\ [(41)],\ [(22)1],\ [(32)]$$

ne peuvent pas satisfaire à cette condition, de sorte qu'elles n'embrassent que des surfaces imaginaires. — Or la raison intime de ce fait nous est donnée par un théorème de M. Klein*). Remarquons en effet que si la conique double d'une de nos surfaces est imaginaire, cette surface sera une projection d'une $F_2^{2\cdot 2}$ par laquelle passe une variété quadratique (celle φ qui contient le centre de projection) ne contenant que des droites imaginaires. Or les variétés quadratiques générales à 3 dimensions de l'espace à 4 dimensions ont leurs ∞^3 droites réelles (variétés *hyperboliques*) ou imaginaires (variétés *elliptiques*) suivant que dans leurs équations canoniques (à variables réelles) la différence entre le nombre des carrés d'un signe et le nombre des carrés de l'autre signe est 1 ou 3.**) Donc afin qu'une $F_2^{2\cdot 2}$ réelle Γ puisse donner comme projection une cyclide il faut que pour une des variétés quadratiques passant par elle cette différence soit 3. Mais alors ce théorème de M. Klein nous dit que le déterminant du faisceau de ces variétés quadratiques aura au moins 3 diviseurs élémentaires réels de dégrés impairs. Et comme chacune des 8 caractéristiques que nous avons écrites ci-dessus contient moins de 3 dégrés impairs, il s'ensuit qu'elles ne peuvent appartenir à des cyclides réelles. — Les autres 10 caractéristiques contiennent bien au moins 3 dégrés impairs, mais ce théorème nous dit en outre que 3 de ces dégrés impairs doivent correspondre à des racines réelles du déterminant. De là on peut tirer plusieurs conséquences importantes pour les questions de réalité des cyclides: ainsi les cyclides réelles [11111], [2111], [311] ont (au moins) 3 cônes de Kummer réels (en entendant toujours par surface réelle une surface ayant une équation à coefficients réels), la cyclide [(21)11] a les deux cônes de Kummer réels, la cyclide de Dupin [(11)(11)1] a réels le cône de Kummer et les deux faisceaux de plans qui contiennent deux séries de cercles de cette surface, etc.***)

---

*) Voir le nº 16 de son *Inauguraldissertation*: *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form* (réimprimé dans le tome XXIII des Mathematische Annalen.)

**) En général on voit facilement qu'une forme quadratique à n variables, dont l'expression canonique contienne k carrés d'un signe et $n-k$ carrés de signe contraire, représente dans R_{n-1} une variété quadratique à $n-2$ dimensions contenant seulement des espaces linéaires réels dont le nombre des dimensions est moindre que k et $n-k$. Cela donne, pour ainsi dire, la raison intime du théorème d'inertie des formes quadratiques.

***) On sait qu'une congruence quadratique de droites peut être considérée comme l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimen-

Tableau des surfaces du 4e ordre étudiées dans ce travail.*)

Surfaces à conique double proprement dite.

Nos.	Caractéristiques	Classes	
1—31	[11111]	12	Surface générale.
33	[2111]	10	Surface à un point double conique.
43	[311]	9	Un point biplanaire de 1e espèce.
38	[221]	8	Deux points coniques.
52	[41]	8	Un point biplanaire de 2e espèce.
47	[32]	7	Un point conique et un point biplanaire de 1e espèce.
56	[5]	7	Un point biplanaire de 3e espèce.

58, 73	[(11)111]	8	Un couple de points coniques.
93	[(21)11]	8	Un point biplanaire de 2e espèce (couple de points coniques coincidents).
78	[(11)21]	6	Trois points coniques.
98	[(21)2]	6	Un point conique et un point biplanaire de 2e espèce.
104	[(31)1]	6	Un point uniplanaire de 1e espèce.
86	[(11)3]	5	Un couple de points coniques et un point biplanaire de 1e espèce.
111	[(41)]	5	Un point uniplanaire de 2e espèce.

sions (dont l'une représente le complexe linéaire contenant la congruence quadratique). La classification des congruences quadratiques se réduit donc à celle de l'intersection de deux variétés quadratiques (dont l'une doit être considérée particulièrement). Or comme dans ce travail nous avons fait cette dernière classification, on peut dire que nous avons fait en même temps *implicitement* celle des congruences quadratiques (classification que nous avions seulement ebauchée dans le mémoire cité à pag. 321, en la dérivant de celle des complexes quadratiques). Nous ne pouvons pas développer cette idée, qui montre un lien très-étroit entre les différentes surfaces qui nous ont occupés et les différents cas particuliers de la surface de Kummer du 4e ordre et de la 4e classe, et qui porterait à des rapprochements très-intéressants entre des surfaces qui, à première vue, paraissent n'avoir aucune relation entre elles. Au surplus ce lien et ces rapprochements peuvent être établis dans chaque cas au moyen de la correspondance connue entre la géométrie (projective) d'un complexe linéaire et la géométrie (des inversions) de l'espace ordinaire. (S. Lie, Math. Ann. t. V).

*) Dans ce tableau nous n'entendons pas donner un résumé du travail: par suite nous ne nommons que les particularités relatives aux points singuliers qui suffisent pour distinguer entre elles les différentes surfaces que nous nommons; mais dans le mémoire même on a vu plusieurs autres propriétés relatives à ces surfaces et qui pourraient aussi servir à les distinguer entre elles. Nous avons

Nos.	Caractéristiques	Classes	
116	[(11)(11)1]	4	Deux couples de points coniques.
122	[(21)(11)]	4	Un couple de points coniques et un point biplanaire de 2e espèce.

127	[(22)1]	4	Surface réglée à conique et droite doubles de l'espèce II. de Cremona.
132	[(32)]	4	Surface réglée à conique et droite doubles de l'espèce IV. de Cremona.

Surfaces à conique cuspidale.

66, 74	[(11)111]	6	Cas général.
94	[(21)11]	6	Les deux points-clos de la conique cuspidale coincident.
79	[(11)21]	4	Un point conique.
99	[(21)2]	4	Les deux points-clos coincident et la surface a aussi un point conique.
105	[(31)1]	4	Il y a un point dans lequel coincident les deux points-clos avec un point conique.
87	[(11)3]	3	Un point biplanaire (de 1e espèce).
112	[(41)]	3	Il y a un point singulier de coincidence des points-clos avec un point biplanaire.

Surfaces à deux droites doubles (se coupant en un point non triple).

1–31	$[\bar{1}1111]$	12	Cas général.
34	$[\bar{1}211]$	10	Un point conique.
44	$[\bar{1}31]$	9	Un point biplanaire de 1e espèce.
39	$[\bar{1}22]$	8	Deux points coniques.
53	$[\bar{1}4]$	8	Un point biplanaire de 2e espèce.

75	$[\bar{1}(11)11]$	8	Un couple de points coniques.
95	$[\bar{1}(21)1]$	8	Un point biplanaire de 2e espèce (couple de points coniques coincidents).
80	$[\bar{1}(11)2]$	6	Trois points coniques.
106	$[\bar{1}(31)]$	6	Un point uniplanaire (de 1e espèce).

omis dans cette énumération quelques surfaces dont nous avons aussi parlé, mais qui peuvent être regardées comme cas particuliers des espèces que nous avons dans ce tableau.

Nos.	Caractéristiques	Classes	
117	[$\bar{1}$(11)(11)]	4	Deux couples de points coniques.

128	[$\bar{1}$(22)]	4	Surface réglée à trois droites doubles de l'espèce V. de Cremona.

Surfaces à une droite double et une droite cuspidale.

40	[$\bar{1}$22]	8	Cas général.
53	[$\bar{1}$4]	8	Les deux points-clos coincident.
81	[$\bar{1}$(11)2]	6	Un point conique.
107	[$\bar{1}$(31)]	6	Le point conique du cas précédent va se poser sur la droite cuspidale.
118	[$\bar{1}$(11)(11)]	4	Deux points coniques.

128	[$\bar{1}$(22)]	4	Surface réglée à deux droites (directrices) doubles et une génératrice cuspidale.
129	[$\bar{1}$(22)]	4	Surface réglée à deux directrices coincidentes et une génératrice double.

Surfaces à deux droites cuspidales.

82	[$\bar{1}$(11)2]	6	Cas général.
108	[$\bar{1}$(31)]	6	Cas particulier remarquable (voir le n⁰ 108 cité).
119	[$\bar{1}$(11)(11)]	4	Un point conique.

Surfaces à point triple par lequel passent deux droites doubles.

35	[$\bar{2}$111]	10	Cas général; le point triple est planaire.
45	[$\bar{3}$11]	9	Le point triple est triplanaire (de 1e espèce).
41	[$\bar{2}$21]	8	Un point conique.
54	[$\bar{4}$1]	8	Le point triple est un point triplanaire particulier (de 2e espèce).
48	[$\bar{2}$3]	7	Un point biplanaire de 1e espèce.
49	[$\bar{3}$2]	7	Un point conique; et le point triple est triplanaire (de 1e espèce).
57	[$\bar{5}$]	7	Le point triple est un point triplanaire particulier (de 3e espèce).

Nos.	Caractéristiques	Classes	
83	$[\bar{2}(1\,1)1]$	6	Un couple de points coniques.
100	$[\bar{2}(2\,1)]$	6	Un point biplanaire de 2e espèce (couple de points coniques coincidents).
88	$[\bar{3}(1\,1)]$	5	Le point triple est triplanaire; et il y a un couple de points coniques.

Surfaces à point triple par lequel passent une droite double et une cuspidale ou deux droites cuspidales.

50	$[\bar{3}2]$	7	Une droite double et une droite cuspidale.
57	$[\bar{5}]$	7	Le point-clos coincide avec le point triple.
89	$[\bar{3}(1\,1)]$	5	Outre ces droites la surface a un point conique.
90	$[\bar{3}(1\,1)]$	5	Par le point triple passent deux droites cuspidales.

Surfaces à point triple par lequel passent trois droites doubles.

137		3	Cas général: surface romaine de Steiner.
138		3	Deux des droites doubles coincident.
139		3	Les trois droites doubles coincident.

Surfaces à droite bidouble (contenant deux points triples distincts ou coincidents).

76	$[(\overline{1\,1})1\,1\,1]$	8	Cas général: les deux points triples sont planaires.
96	$[(\overline{2\,1})1\,1]$	8	Les deux points triples coincident (en un point triplanaire).
84	$[(\overline{1\,1})2\,1]$	6	Un point conique.
101	$[(\overline{2\,1})2]$	6	Les deux points triples coincident et il y a un point conique.
109	$[(\overline{3\,1})1]$	6	Les deux points triples coincident en un point dont deux plans nodaux coincident.
91	$[(\overline{1\,1})3]$	5	Un point biplanaire de 1e espèce.
113	$[(\overline{4\,1})]$	5	Le plan nodal double du point triple de l'avant-dernier cas touche le long d'une droite simple.
120	$[(\overline{1\,1})(1\,1)1]$	4	Un couple de points coniques.
123	$[(\overline{1\,1})(2\,1)]$	4	Un point biplanaire de 2e espèce.
124	$[(\overline{2\,1})(1\,1)]$	4	Les deux points triples coincident, et il y a un couple de points coniques.

Surfaces à droite cuspidale de 2e espèce.

Nos.	Caractéristique	Classes	
102	$[(\overline{21})2]$	6	Cas général: il y a sur la droite un point triple et un point d'osculation de deux nappes.
114	$[(\overline{41})]$	5	Les deux points nommés coincident en un point triple uniplanaire.
125	$[(\overline{21})(11)]$	4	Un point conique.

Surfaces (réglées) à droite triple.

130	$[(\overline{22})1]$	4	Cas général: surface réglée de l'espèce III. de Cremona.
133	$[(\overline{3}2)]$	4	Surface réglée de l'espèce X. de Cremona et cas particulier.

Turin, le 8. April 1884.*)

*) Pendant l'impression de ce travail est paru, dans ce même tome XXIV des Math. Annalen, le mémoire de M. Rohn: *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte*, dans lequel on trouve aussi celles parmi nos surfaces qui sont douées de points triples. Cependant elles y sont étudiées à des points de vue tout-à-fait différents du nôtre, de sorte qu'il n'y a presque pas dans notre travail de véritables répétitions de résultats déjà contenus dans ce mémoire. — En finissant je veux remercier M. Rohn même, et aussi M. Klein, pour quelques conseils, qu'ils ont bien voulu me donner après la lecture de mon manuscript, et dont j'ai profité dans la correction des épreuves. (Octobre 1884.)

Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer.

Par

E. Goursat à Toulouse.

Dans deux notes insérées aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (18 Février et 10 Mars 1884), j'ai indiqué une méthode générale pour étudier les intégrales de l'équation du troisième ordre, due à M. Kummer, qui sont des fonctions rationnelles de la variable, et énoncé les principaux résultats auxquels j'avais été conduit. Je me propose de donner dans ce travail une démonstration simple de ces résultats.

1. Considérons deux équations linéaires du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + P\frac{dv}{dt} + Qv = 0, \tag{2}$$

loù p et q sont fonctions de x, P et Q fonctions de t. On peut toujours en posant $x = \varphi(t)$, $v = wy$, où φ et w sont des fonctions convenablement choisies de t, passer de l'équation (1) à l'équation (2); ces fonctions x et w seront déterminées par les équations simultanées

$$px' - \frac{x''}{x'} = 2\frac{w'}{w} + P, \tag{3}$$

$$qx'^2 = \frac{w''}{w} + P\frac{w'}{w} + Q. \tag{4}$$

L'élimination de w conduit à une équation du troisième ordre pour déterminer x

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \left(2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}\right)x'^2 = 2Q - \frac{1}{2}P^2 - \frac{dP}{dt}; \tag{5}$$

si cette dernière admet pour intégrale une fonction rationnelle de t, la formule (3) montre que $\frac{w'}{w}$ sera aussi une fonction rationnelle, et 'intégration de l'équation (2) sera ramenée à l'intégration de l'équation (1).

L'équation de M. Kummer est un cas particulier de l'équation (5) que l'on obtient en prenant

$$p = \frac{\varrho}{x} + \frac{\sigma}{x-1}, \quad q = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2(x-1)^2},$$

$$P = \frac{\varrho'}{t} + \frac{\sigma'}{t-1}, \quad Q = \frac{A't^2 + B't + C'}{t^2(t-1)^2},$$

les équations (1), (2) et (5) prennent les formes suivantes:

$$(6) \qquad x^2(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + [(\varrho+\sigma)x - \varrho]\,x(x-1)\frac{dy}{dx} + (Ax^2+Bx+C)\,y = 0,$$

$$(7) \qquad t^2(t-1)^2\frac{d^2v}{dt^2} + [(\varrho'+\sigma')t - \varrho']\,t(t-1)\frac{dv}{dt} + (A't^2+B't+C')\,v = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{(1-\nu^2)x^2 + (\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1)x + 1 - \lambda^2}{2x^2(x-1)^2}\,x'^2 = \frac{(1-\nu'^2)t^2 + (\lambda'^2+\nu'^2-\mu'^2-1)t + 1 - \lambda'^2}{2t^2(t-1)^2},$$

λ^2, μ^2, ν^2, λ'^2, μ'^2, ν'^2 ayant les valeurs

$$\lambda^2 = (\varrho-1)^2 - 4C, \quad \mu^2 = (\sigma-1)^2 - 4(A+B+C),$$
$$\lambda'^2 = (\varrho'-1)^2 - 4C', \quad \mu'^2 = (\sigma'-1)^2 - 4(A'+B'+C'),$$
$$\nu^2 = (\varrho+\sigma-1)^2 - 4A,$$
$$\nu'^2 = (\varrho'+\sigma'-1)^2 - 4A'.$$

Ces quantités λ, μ, ν, λ', μ', ν' ont une signification importante: λ, par exemple, est égal à la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale de l'équation (6) relative au point critique $x=0$, et de même pour les autres. Les équations (6) et (7) se ramènent par une transformation facile, comme on sait, à l'équation de la série hypergéométrique; de sorte que, à chaque solution du problème proposé, correspond une transformation d'une série hypergéométrique en une autre où la variable est une fonction algébrique de la variable qui figure dans la première, abstraction faite de facteurs qui sont eux-mêmes des fonctions algébriques de la variable.

2. Soit $x = \varphi(t)$ une solution rationnelle de l'équation (8); on obtiendra la même équation soit en faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$ dans l'équation (6), soit en posant $v = wy$ dans l'équation (7), $\frac{w'}{w}$ étant une fonction rationnelle de t donnée par la formule (3). Soit

$$(9) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + p_1\frac{dy}{dt} + q_1 y = 0$$

la transformée de (6) obtenue en posant $x = \varphi(t)$; cette équation aura

comme la première ses intégrales *régulières* et par suite, d'après les travaux bien connus de M. Fuchs, le coefficient p_1 n'aura que des poles du premier ordre, ce qu'on peut aussi vérifier directement.

D'autre part, on aura d'après l'équation (3),

$$w = e^{\int \frac{\varrho_1 - \frac{\varrho'}{t} - \frac{\sigma'}{t-1}}{2}},$$

expression de la forme

$$w = \prod_{i=1}^{i=k} (x - a_i)^{r_i}.$$

On voit immédiatement quel sera l'effet du changement de fonction $v = wy$ sur l'équation (7); si a est une valeur de x, différente de 0, 1, ∞, l'équation obtenue admettra dans le domaine du point $x = a$ deux intégrales particulières distinctes de la forme

$$y_1 = (x-a)^r P_1(x-a), \qquad y_2 = (x-a)^{r+1} P_2(x-a),$$

P_1 et P_2 étant holomorphes dans ce domaine et différents de zéro pour $x = a$. Le problème que nous avons en vue peut donc être posé ainsi: Quelles doivent être les propriétés de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ pour que l'équation (9) déduite de l'équation (6) par le changement de variable $x = \varphi(t)$ satisfasse à la condition suivante: *dans le domaine de tout point a, différent de 0, 1, ∞, elle admet deux intégrales linéairement distinctes appartenant à des exposants différents d'une unité, et ne contenant pas de logarithme?*

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante; car, si elle est remplie, il est aisé de trouver une transformation de la forme $y = \frac{v}{w}$ qui ramènera à une équation de la forme (7).

3. On peut maintenant découvrir les propriétés qui caractérisent la fonction rationnelle $\varphi(t)$. Soit a une valeur de t différente de 0, 1, ∞ et soit b la valeur correspondante de x; deux cas sont à distinguer suivant que la valeur b est elle-même, ou non, différente de 0, 1, ∞.

1^er^ *Cas.* Soit b différent de $0, 1, \infty$. Dans le domaine du point $x = b$, l'équation (6) admet deux intégrales particulières distinctes de la forme suivante

$$y_1 = 1 + \alpha_0(x-b) + \cdots,$$
$$y_2 = (x-b) + \beta_0(x-b)^2 + \cdots$$

Soit m l'ordre de multiplicité de la racine $t = a$ de l'équation $\varphi(t) = b$; on aura

$$x - b = \gamma_0 (t-a)^m + \gamma_1 (t-a)^{m+1} + \cdots$$

γ_0 étant différent de zéro, et l'équation (9) admettra dans le voisinage du point $t = a$ les deux intégrales particulières

$$y_1 = 1 + \alpha_0\gamma_0(t-a)^m + \cdots,$$
$$y_2 = \gamma_0(t-a)^m + \cdots$$

appartenant aux exposants 0 et m. Il faudra donc que m soit égal à l'unité ou que $t = a$ soit racine simple de l'équation $\varphi(t) = b$.

2ème *Cas.* Soit $b = 0$, et soient r, r' les racines de l'équation déterminante fondamentale de l'équation (6), relative au point critique $x = 0$; il est clair que l'intégrale générale ne devra pas contenir de logarithme dans le domaine de ce point, car l'intégrale de l'équation (9) en contiendrait également dans le domaine du point $t = a$ et par suite ne pourrait satisfaire à la condition reconnue nécessaire. L'équation (6) admettra les deux intégrales particulières

$$y_1 = x^r \left\{1 + \alpha_0 x + \cdots\right\},$$
$$y_2 = x^{r'} \left\{1 + \beta_0 x + \cdots\right\},$$

soit m le degré de multiplicité de la racine $t = a$ de l'équation $\varphi(t) = 0$: on aura comme tout-à-l'heure

$$x = \gamma_0(t-a)^m + \gamma_1(t-a)^{m+1} + \cdots$$

γ_0 étant différent de zéro, et l'équation (9) admettra dans le domaine du point $t = a$ les deux intégrales particulières

$$y_1 = (t-a)^{mr} \left\{1 + \delta_0(t-a) + \cdots\right\},$$
$$y_2 = (t-a)^{mr'} \left\{1 + \varepsilon_0(t-a) + \cdots\right\},$$

appartenant aux exposants mr et mr'. Il faudra donc que l'on ait $mr' - mr = 1$, ou que la différence $r' - r$ soit l'inverse d'un nombre entier, forcément supérieur à l'unité. Si a' est une autre racine de l'équation $\varphi(t) = 0$, différente de 0, 1, ∞ et m' son degré de multiplicité on devra avoir aussi $m' = \frac{1}{r'-r}$ et par suite $m' = m$. Le même raisonnement s'applique aux racines des équations $\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) = \infty$, et en résumé, pour qu'une fonction rationnelle $\varphi(t)$ puisse être une intégrale de l'équation de Kummer, il faut et il suffit qu'elle possède les propriétés suivantes:

1°. *Pour toute valeur de b, différente de 0, 1, ∞, les racines de l'équation $\varphi(t) = b$, qui ne sont ni 0, ni 1, ni ∞, sont racines simples;*

2°. *Les racines des trois équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) = \infty$, qui ne sont ni 0, ni 1, ni ∞, sont racines multiples, au même degré de multiplicité pour chacune d'elles.*

Etant donnée une fonction rationnelle jouissant de ces propriétés, les valeurs correspondantes de λ, μ, ν, λ', μ', ν' s'obtiendront comme

il suit; si l'équation $\varphi(t) = 0$ admet une racine multiple d'ordre m, différente de 0, 1, ∞ on devra avoir $\lambda^2 = \frac{1}{m^2}$. Si aucune des racines de cette équation n'est différente de 0, 1, ∞, λ n'est assujetti à aucune condition et on trouvera de même μ et ν. Une fois λ, μ, ν convenablement choisis, λ', μ', ν' s'obtiendront par des considérations analogues; par exemple, si l'équation $\varphi(t) = 0$ admet la racine $t = 0$ au degré r de multiplicité, la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale de l'équation (9) relative au point critique $t = 0$ sera $r\lambda$ et, comme cette différence ne change pas quand on passe de l'équation (9) à l'équation (7) on aura aussi $\lambda'^2 = \lambda^2 r^2$.

Tous ces résultats peuvent être établis en partant de l'équation (8) elle-même; la méthode précédente m'a semblé préférable à cause de sa simplicité.

4. Le problème d'algèbre auquel on se trouve ramené comprend plusieurs cas. Je considère d'abord le cas général, celui où les valeurs 0, 1, ∞ de t correspondent aux valeurs 0, 1, ∞ de x, de façon que l'équation (7) admette véritablement les trois points singuliers $t = 0$, $t = 1$, $t = \infty$. Soit $x = \varphi(t)$ une fonction rationnelle répondant à la question; désignons par P, Q, R trois fonctions entières de t sans facteurs communs ni facteurs multiples, n'admettant pour racines ni 0, ni 1, et par π_1, π_2, π_3 trois expressions de la forme $t^r(t-1)^s$, r et s étant des nombres entiers positifs ou nuls. On aura, d'après ce qu'on vient de voir,

$$x = \frac{\pi_1 P^m}{\pi_3 R^p}, \quad x - 1 = \frac{\pi_2 Q^n}{\pi_3 R^p};$$

ce qui entraîne l'identité

$$\pi_1 P^m - \pi_2 Q^n = \pi_3 R^p. \tag{10}$$

Soient m', n', p' les degrés des polynômes P, Q, R; m, n, p seront des nombres entiers positifs, sauf dans le cas où le degré du polynôme correspondant serait nul, et dans ce cas ces nombres seraient arbitraires. Je remarque encore que les facteurs t et $1 - t$ ne figurent que dans l'un des produits π_1, π_2, π_3 et que l'un des trois termes de l'identité (10) est d'un degré inférieur à celui des deux autres, de façon que pour $t = \infty$, x ait l'une des valeurs 0, 1, ∞.

A chaque intégrale rationnelle de l'équation de Kummer correspond une identité de la forme (10), mais la réciproque n'est pas vraie. Prenons par exemple l'identité

$$(t^2 + t - 1)^2 - (t^2 - t + 1)^2 = 4t^2(t-1),$$

qui est bien de la forme (10); cependant la fonction rationnelle

$$x = \left(\frac{t^2 + t - 1}{t^2 - t + 1}\right)^2$$

ne répond pas à la question, car l'équation

$$\left(\frac{t^2+t-1}{t^2-t+1}\right)^2=\frac{25}{9}$$

admet la racine double $t=2$. Plus généralement la fonction rationnelle

$$x=\left\{\frac{t^n+(t-1)^{n'}}{t^n-(t-1)^{n'}}\right\}^2$$

ne convient pas au problème, si n est différent de n', quoique l'identité

$$\{t^n+(t-1)^{n'}\}^2-\{t^n-(t-1)^{n'}\}^2=4t^n(t-1)^{n'}$$

soit bien de la forme (10). Il en serait de même de la fonction rationnelle

$$x=\frac{\{t^n+(t-1)^{n'}+4j\,t^n(t-1)^{n'}\}^3}{\{t^n+(t-1)^{n'}+4j^2t^n(t-1)^{n'}\}^3},$$

où j, j^2 désignent les racines cubiques imaginaires de l'unité, et on pourrait multiplier les exemples. Il y a donc lieu de rechercher à quelles conditions une identité de la forme (10) donne une intégrale de l'équation de Kummer. Appelons N, N', N'' les nombres des racines des trois équations $\varphi(t)=0$, $\varphi(t)=1$, $\varphi(t)=\infty$ qui ont une des valeurs 0, 1, ∞, chacune étant comptée avec son degré de de multiplicité; entre les nombres m, n, p, m', n', p', N, N', N'', on a d'abord les relations évidentes:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &N+mm'=N'+nn'=N''+pp',\\ &N+N'+N''\geq 3.\end{aligned}\right.$$

Je vais maintenant démontrer *qu'on doit avoir en outre entre ces quantités la relation*

$$(12)\qquad N+(m-2)\,m'+N'+(n-2)\,n'=2p'+2.$$

On trouvera dans la note déjà citée (Comptes-Rendus 10 Mars 1884) une démonstration de cette formule; on peut l'établir directement comme il suit; $x=\varphi(t)$ étant une intégrale rationnelle de l'équation (8), formons l'expression

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x(x-1)};$$

on a

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\Psi}{\pi_3^{\,2}\,R^{p+1}},$$

Ψ désignant une fonction entière qui admet les deux expressions suivantes:

$$\Psi = P^{m-1}\Big[\pi_3\{m\pi_1 P' + \pi_1' P\} R - \pi_1 P\{p\pi_3 R' + \pi_3' R\}\Big],$$

$$= Q^{n-1}\Big[\pi_3 R\{n\pi_2 Q' + \pi_2' Q\} - \pi_2 Q\{p\pi_3 R' + \pi_3' R\}\Big].$$

Par suite, on aura aussi

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x(x-1)} = \frac{\Psi^2}{\pi_1\cdot\pi_2\cdot\pi_3^2\cdot P^m\cdot Q^n\cdot R^2},$$

mais les deux expressions de Ψ montrent que le carré Ψ^2 est divisible par P^m et par Q^n. De même, le facteur t^r entrant dans l'un des produits π_1, π_2, π_3, Ψ contiendra le facteur t^{r-1}; tout pareillement le facteur $(1-t)^s$ appartenant à l'un des produits π_1, π_2, π_3, Ψ contiendra le facteur $(1-t)^{s-1}$. Il en résulte que par la suppression de facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on peut toujours écrire

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x(x-1)} = \frac{\psi(t)}{t^2(t-1)^2R^2}, \tag{13}$$

$\psi(t)$ étant une fonction entière de t. L'intégrale générale de l'équation (13) est

$$x - \frac{1}{2} + \sqrt{x(x-1)} = Ce^{\int\frac{\sqrt{\psi(t)}}{t(t-1)R}dt};$$

le degré du polynôme $\psi(t)$ ne pourra dépasser $2p' + 2$, car, s'il dépassait cette limite, l'intégrale définie $\int\frac{\sqrt{\psi(t)}}{t(t-1)R}dt$ serait infinie comme t^α (α étant positif) pour $t = \infty$, et ce point $t = \infty$ serait un point singulier transcendant pour l'intégrale générale de l'équation (13).

Si cette limite n'est pas atteinte, la valeur $t = \infty$ doit correspondre à une des valeurs $x = 0$, $x = 1$; car si pour $t = \infty$ on avait aussi $x = \infty$, les deux membres de l'équation (13) seraient de formes différentes dans le voisinage de ce point. Soit D le degré de $\psi(t)$; si $D < 2p' + 2$, l'une des équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi(t) = 1$ admettra la racine $t = \infty$. Supposons que ce soit la première et soit D' son degré de multiplicité. Dans le domaine du point $t = \infty$, le premier membre de l'équation (13) sera de la forme

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{D'+2}\varphi_1\left(\frac{1}{t}\right),$$

et le second membre de la forme

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{2p'+4-D}\varphi_2\left(\frac{1}{t}\right),$$

φ_1 et φ_2 étant holomorphes dans ce domaine et différents de zéro pour $t = \infty$. On devra donc avoir

$$D' + 2 = 2p' + 4 - D,$$

ou

$$D = 2p' + 2 - D'.$$

Les expressions ci-dessus de ψ montrent que l'équation $\psi = 0$ ne peut avoir aucune racine commune avec l'équation $\pi_3 R = 0$. Donc toutes les racines de l'équation $\psi = 0$ doivent appartenir à l'une des deux équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi(t) = 1$, puisque pour toute valeur b de x correspondant à une de ces racines l'équation $\varphi(t) = b$ aura nécessairement une racine multiple. Si $t = a$ est une racine de $P = 0$, Ψ^2 contiendra le facteur $(t - a)^{2m-2}$ et ψ le facteur $(t - a)^{m-2}$; de même si π_1 contient le facteur t^r, Ψ^2 contiendra le facteur t^{2r-2} et ψ le facteur t^r. Il en serait de même du facteur $(t - 1)^s$ et des racines de l'équation $\varphi(t) = 1$. En rapprochant ces diverses propositions, on en conclut la formule (12) qu'il s'agissait de démontrer.

5. Réciproquement, si dans une identité de la forme (10) où P, Q, R sont sans facteurs multiples ni facteurs communs et n'admettent aucun des deux facteurs t, $t - 1$, les nombres m, n, p, m', etc. vérifient la relation (12), à cette identité correspond une intégrale rationnelle de l'équation de Kummer. Il suffit de répéter le raisonnement qui vient d'être fait; posons

$$x = \frac{\pi_1 P^m}{\pi_3 R^p},$$

et formons par l'équation (13) le polynôme $\psi(t)$ qui sera au plus du degré $2p' + 2$. Mais, d'après la relation (12) qui est supposée satisfaite, nous connaissons $2p' + 2$ racines de l'équation $\psi(t) = 0$, en considérant $t = \infty$ comme une racine si le degré est inférieur a $2p' + 2$. Il en résulte que toute équation $\varphi(t) = b$, où b est différent de 0, 1, ∞ n'aura que des racines simples; car une racine multiple devrait annuler la dérivée et par suite appartenir à l'équation $\psi(t) = 0$. Le même mode de raisonnement prouve que si, l'équation (12) est satisfaite, les polynômes P, Q, R n'auront que, des racines simples, car une racine multiple de l'équatiou $P = 0$ par exemple devrait appartenir à l'équation $\psi(t) = 0$ à un degré de multiplicité supérieur à $m - 2$; ce qui n'est pas compatible avec la relation (12).

Les équations (11) et (12) entraînent les suivantes que l'on pourrait aussi établir directement en faisant porter le raisonnement sur les fonctions $\frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{1-x}$:

$$N + (m - 2)\, m' + N'' + (p - 2)\, p' = 2n' + 2,$$
$$N' + (n - 2)\, n' + N'' + (p - 2)\, p' = 2m' + 2.$$

A tout système de solutions en nombres entiers et positifs des équations (11) et (12) correspondent en général une ou plusieurs

identités de la forme (10) et par suite une ou plusieurs intégrales de l'équation de Kummer. En effet, désignons par D le nombre entier

$$D = N + mm' = N' + nn' = N'' + pp',$$

qui est égal au degré de la fraction rationnelle à déterminer; l'équation (12) peut s'écrire, en divisant par 2,

$$D = m' + n' + p' + 1.$$

Il suit de là que, si on veut calculer les polynômes P, Q, R par la méthode des coefficients indéterminés, le nombre des équations sera précisément égal au nombre des coefficients arbitraires. Le problème est donc déterminé.

Remarque I. A chaque identité de la forme (10), la relation (12) étant vérifiée, correspondent plusieurs intégrales de l'équation (8); on les obtient, soit en changeant dans l'une d'elles t en $1 - t$, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$, soit en changeant x en $1 - x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$, soit en faisant les deux opérations simultanément.

Remarque II. Etant donnée une idendité quelconque de la forme (10), la somme $N + (m-2)m' + N' + (n-2)n'$ sera au plus égale à $2p' + 2$; le cas que j'ai en vue est précisément celui où cette limite supérieure est atteinte. Si

$$N + (m-2)m' + N' + (n-2)n' = 2p' + 2 - 2\delta,$$

le problème n'est plus déterminé, puisqu'on a δ coefficients arbitraires de plus que d'équations de condition. On voit donc qu'il existe une infinité de formules de la forme (10) qui ne répondent pas à la question et qui contiennent un ou plusieurs paramètres arbitraires. Telle serait la formule

$$\{t^n + a(t-1)^{n'}\}^2 - \{t^n - a(t-1)^{n'}\}^2 = 4at^n(t-1)^{n'},$$

où n est différent de n' et a un paramètre arbitraire.

6. La discussion des équations (11) et (12) comprend plusieurs cas, dont les plus simples fournissent les transformations déjà connues de la série hypergéométrique.

1^er^ *Cas*. Soit $m' = n' = p' = 0$; on aura forcément $N = N' = N'' = 1$, et on a les substitutions bien connues

$$x = t,\quad x = 1 - t,\quad x = \frac{1}{t},\quad x = \frac{1}{1-t},\quad x = \frac{t}{t-1},\quad x = \frac{t-1}{t},$$

qui ont lieu, quels que soient λ, μ, ν.

2^ème^ *Cas*. Soit $m' \neq 0$, $n' = p' = 0$; les équations (11) et (12) deviennent

$$\begin{gathered} N + N' + (m-2)m' = 2, \\ N + mm' = N' = N'', \\ N + N' + N'' \geq 3, \end{gathered}$$

et le seul système de solutions, est $N=0$, $N'=N''=2$, $m=2$, $m'=1$. Les identités correspondantes se ramènent toutes à la suivante

$$(14)\qquad (2t-1)^2-1=4t(t-1);$$

les transformations qui s'en déduisent ont été données par M. Kummer (*Journal de Crelle, tome XV*).

3ème *Cas.* Soit $m' \neq 0$, $n' \neq 0$, $p'=0$. Les équations (11) et (12) deviennent

$$N+(m-2)\,m'+N'+(n-2)\,n'=2,$$
$$N+mm'=N'+nn'=N'',$$
$$N+N'+N''\geqq 3;$$

elles admettent les systèmes de solutions ci-dessous:

$$\begin{array}{llll}
m=n=2, & n'=m'+1, & N=2,\ N'=0, & N''=2m'+2,\\
m=n=2, & n'=m', & N=N'=1, & N''=2m'+1,\\
m=2,\ n=3, & m'=n'=1, & N=1,\ N'=0, & N''=3,\\
m=2,\ n=3, & m'=2,\ n'=1, & N=0,\ N'=1, & N''=4,\\
m=2,\ n=3, & m'=3,\ n'=2, & N=N'=0, & N''=6,\\
m=2,\ n=4, & m'=2,\ n'=1, & N=N'=0, & N''=4,\\
m=n=3, & m'=n'=1, & N=N'=0, & N''=3.
\end{array}$$

Les identités correspondantes se ramènent aux suivantes:

$$(15)\qquad [t^n+(t-1)^n]^2-[t^n-(t-1)^n]^2=4t^n(t-1)^n,$$

$$(16)\qquad [(1+\sqrt{t})^n+(1-\sqrt{t})^n]^2-t\left[\frac{(1+\sqrt{t})^n-(1-\sqrt{t})^n}{\sqrt{t}}\right]^2=4(1-t)^n,$$

$$(17)\qquad (9t-8)^2-(4-3t)^3=-27t^2(1-t),$$

$$(18)\qquad (8t^2-36t+27)^2-(9-8t)^3=64t^3(t-1),$$

$$(19)\qquad (2t^3-3t^2-3t+2)^2-4(t^2-t+1)^3=-27t^2(t-1)^2,$$

$$(20)\qquad (64t^3-16t^2+30t+1)^2-(16t^2-16t+1)^3=-108t(1-t),$$

$$(21)\qquad (t^2-6t+1)^2-(t+1)^4=-16t(1-t)^2,$$

$$(22)\qquad (t+j)^3-(t+j^2)^3=3j(j-1)\,t\,(1-t).$$

J'ai obtenu ces formules en me plaçant à un point de vue un peu différent dans un travail présenté comme Thèse à la Faculté des Sciences de Paris (*Annales de l'Ecole Normale* 1881, *Supplément*). Les transformations obtenues par Mr. Brioschi pour l'équation de l'icosaèdre sont des cas particuliers des transformations qui résultent des formules (17), (18), (19) et (20). (*Mathematische Annalen*, *Band XI*, p. 410).

4ème *Cas.* Supposons les 3 nombres m', n', p' différents de zéro.

L'élimination de N, N', N'' entre les équations (11) et (12) conduit à la nouvelle inégalité

$$(m-3)\,m' + (n-3)\,n' + (p-3)\,p' \leqq 0.$$

On voit donc que si les 3 nombres m, n, p sont supérieurs à 2, on aura forcément $m = n = p = 3$, et $N + N' + N'' = 3$. Les équations (11) et (12) deviennent

$$\begin{gathered} N + N' + m' + n' = 2p' + 2, \\ N + 3m' = N' + 3n' = N'' + 3p', \\ N + N' + N'' = 3; \end{gathered}$$

elles admettent les deux systèmes de solutions:

$$\begin{array}{lll} m' = n' = p' + 1, & N = N' = 0, & N'' = 3, \\ m' = n' = p', & N = N' = N'' = 1, & \end{array}$$

où p' est un nombre positif arbitraire. Si deux des trois nombres m, n, p sont égaux à 2, par exemple m et n, les équations (11) et (12) deviennent

$$\begin{gathered} N + N' = 2p' + 2, \\ N + 2m' = N' + 2n' = N'' + pp', \\ N + N' + N'' \geqq 3, \end{gathered}$$

et elles admettent encore une infinité de systèmes de solutions, tous compris dans le suivant:

$$\begin{gathered} n' = h + m', \quad N = p' + 1 + h, \quad N' = p' + 1 - h, \\ N'' = p' + 1 + h + 2m' - pp', \end{gathered}$$

m' et p' étant positifs et h un nombre entier positif ou négatif.

Supposons en dernier lieu que l'on ait $m = 2$, $n > 2$, $p \geqq n$; les équations (11) et (12) deviennent

$$\begin{gathered} N + N' + (n-2)\,n' = 2p' + 2, \\ N + 2m' = N' + nn' = N'' + pp', \\ N + N' + N'' \geqq 3; \end{gathered}$$

la première peut s'écrire

$$N' + nn' = (2p' + 2)\frac{n}{n-2} - N\frac{n}{n-2} - \frac{2N'}{n-2},$$

ou

$$pp' = (2p' + 2)\frac{n}{n-2} - N\frac{n}{n-2} - \frac{2N'}{n-2} - N'',$$

et on aura par conséquent

$$pp' < (2p' + 2)\frac{n}{n-2}. \tag{23}$$

Comme on suppose $n > 2$, on aura $\frac{n}{n-2} \leqq 3$ et *à fortiori* on aura

$$pp' < 6p' + 6,$$

inégalité qui n'est satisfaite pour aucune valeur du nombre entier p', sauf $p' = 0$, si p est égal ou supérieur à 12. Donc il faudra que l'on ait $p < 12$. Soit $p = 11$; l'inégalité (23) n'est satisfaite qu'en prenant $p' = 1$, $n = 3$, et les relations (11) et (12) deviennent incompatibles. Il en est de même si on prend $p = 10$ et ce n'est que pour $p = 9$ et au-dessous que l'on trouve des systèmes de solutions. Du reste la discussion de ces équations ne présente aucune difficulté et voici les résultats auxquels on est conduit. Les seuls systèmes de valeurs admissibles pour m, n, p sont les suivants, en supposant

$$m \leqq n \leqq p:$$

	m	n	p
I	2	2	n
II	2	3	3
III	2	3	4
IV	2	3	5
V	2	3	6
VI	2	4	4
VII	3	3	3
VIII	2	4	5
IX	2	3	7
X	2	3	8
XI	2	3	9

Ces cas se divisent nettement en trois catégories. Dans les quatre premiers cas, on sait que l'intégrale générale de l'équation hypergéométrique correspondante est algébrique. Les équations (11) et (12) ne fournissent aucune limite pour les nombres m', n', p' et il existe en effet une infinité d'intégrales rationnelles de tous les degrés possibles pour l'équation de Kummer. Dans les trois cas suivants (V, VI, VII), les équations (11) et (12) admettent encore une infinité de solutions et il existe encore une infinité de formules de la forme (10); la question n'est alors qu'un cas particulier du problème de la transformation des intégrales elliptiques de première espèce. Enfin, dans les quatre derniers cas, les équations (11) et (12) n'admettent qu'un nombre limité de systèmes de solutions; ce sont les suivants:

	m	n	p	m'	n'	p'	N	N'	N''
1⁰	2	4	5	4	2	1	0	0	3
2⁰	..	..	..	3	1	1	0	2	1
3⁰	2	3	7	12	8	3	0	0	3
4⁰	„	„	„	9	6	2	0	0	4
5⁰	„	„	„	8	5	2	0	1	2
6⁰	„	„	„	6	4	1	0	0	5
7⁰	„	„	„	5	3	1	0	1	3
8⁰	„	„	„	4	3	1	1	0	2
9⁰	„	„	„	4	2	1	0	2	1
10⁰	2	3	8	6	4	1	0	0	4
11⁰	„	„	„	5	3	1	0	1	2
12⁰	2	3	9	6	4	1	0	0	3

Toutes ces solutions, sauf la première et la sixième, fournisseut une formule de la forme (10) et par suite une intégrale rationnelle de l'équation de Kummer. Comme exemples se rapportant aux cas d'intégration algébrique, je citerai les transformations trouvées par Mr. Brioschi pour l'équation de l'icosaèdre*) (annali di Mathematica, 2ème série, tome X, p. 124), et l'identité suivante

$$(24)\qquad (5u^2-20u+4)^3+3456u^5=(125u^2-44u+4)(u^2+8u-4)^2,$$

où

$$u=\frac{22+4\sqrt{-1}}{125}-\frac{8\sqrt{-1}}{125}\,t,$$

qui permet de passer de l'équation de l'icosaèdre à l'équation de la double pyramide et fournit l'intégrale générale de la manière la plus directe et la plus facile. Les formules (22) et (19) conduisent au même but pour les équations du tétraèdre et de l'octaèdre. Parmi les identités de la forme (10), qui proviennent des quatre derniers systèmes (VIII, IX, X, XI) je citerai les suivantes:

$$(25)\qquad [5u^3+15u^2+10u+2]^2-4(2u+1)^5=u^4(25u^2+22u+5),$$

où

$$u=\frac{-11+2\sqrt{-1}}{25}-\frac{4\sqrt{-1}}{25}\,t,$$

$$(26)\qquad [7u^4+210u^3-567u^2+378u-81]^2-2^6\cdot3^4\cdot u^7$$
$$=(49u^2-39u+9)(u^2-15u+9)^3,$$

*) Voir aussi sur ce sujet divers articles de Mr. Klein. Mathematische Annalen, tome XI p. 115 et tome XII, p. 171 et 504.

où

$$u = \frac{39 + 9\sqrt{3}\sqrt{-1}}{98} - \frac{18\sqrt{3}\sqrt{-1}}{98}\,t,$$

$$(27)\quad [63u^4 + 140u^3 + 168u^2 + 96u + 32)^2 - 16(3u^3 + 10u^2 + 8u + 4)^3 = 9u^7(48u^2 + 39u + 24),$$

où

$$u = \frac{14\sqrt{7}\sqrt{-1}}{32}\,t - \frac{13 + 7\sqrt{7}\sqrt{-1}}{32},$$

$$(28)\quad \begin{gathered}[t^6 + 126t^5 - 1041t^4 + 1764t^3 - 1041t^2 + 126t + 1]^2\\ -432t(1-t)^2(1+t)^8 = (t^4 - 60t^3 + 134t^2 - 60t + 1)^3,\end{gathered}$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}&[(t+j)^6 + 54j(j-1)t(1-t)(t+j)^3 - 243j^2(j-1)^2t^2(1-t)^2]^2\\ &\qquad\qquad - 192j(j-1)t(1-t)(t+j)^9\\ &= (t+j^2)^3[(t+j)^3 - 27j(j-1)t(1-t)]^3;\end{aligned}\right.$$

si dans la formule (26) on change t en $\frac{(t+j)^3}{3j(j-1)t(1-t)}$ on obtient une nouvelle formule du même genre qui répond à la solution

$$m = 2,\quad n = 3,\quad p = 7,\quad m' = 12,\quad n' = 8,\quad p' = 3,$$
$$N = N' = 0,\quad N'' = 3.$$

7. La formule (10) doit être modifiée si parmi les valeurs de x qui correspondent aux valeurs $0, 1, \infty$ de t il y en a une ou plusieurs qui soient différentes de $0, 1, \infty$. Nous pouvons prévoir dans quels cas cette circonstance pourra se présenter; supposons, par exemple, que $t = 0$ soit racine multiple d'ordre r de l'équation $\varphi(t) = b$, b étant différent de $0, 1, \infty$; l'équation (7) admettra dans le domaine du point $t = 0$ deux intégrales holomorphes distinctes et par suite n'aura que deux points véritablement critiques, les points $t = 1$ et $t = \infty$. Son intégrale générale sera donc algébrique. Il y aurait encore une distinction à faire suivant que l'on suppose r égal ou supérieur à l'unité. Je me borne à ce dernier cas qui présente seul de l'intérêt; de sorte que l'équation $\varphi(t) = b$ n'a que des racines simples, tant que b n'a pas l'une des valeurs $0, 1, \infty$. La formule (10) se simplifiera et les facteurs t et $t - 1$ pourront n'y pas figurer explicitement; mais *on peut toujours par une substitution linéaire la ramener à la forme* (10). Pour fixer les idées, je suppose que l'on ait une identité telle que

$$(30)\qquad X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

X, Y, Z étant des polynômes entiers sans facteurs communs ni facteurs multiples, tels que X^m, Y^n, Z^p soient du même degré, tels en outre que l'équation $X^m + bZ^p = 0$ n'ait que des racines simples

tant que b est différent de 0, 1, ∞. Soit α une racine de l'équation $X = 0$, β une racine de $Y = 0$, γ une racine de $Z = 0$; on peut par une substitution linéaire convenable

$$t = \frac{Au + B}{Cu + D}$$

faire correspondre aux valeurs α, β, γ de t les valeurs 0, 1, ∞ de u et la formule (30) devient

$$u^m P^m + (u-1)^n Q^n + R^p = 0.$$

C'est une identité de la forme (10) où on a $N = m$, $N' = n$ $N'' = p$. Les formules (11) et (12) deviennent

$$m + n + (m-2)\,m' + (n-2)\,n' = 2p' + 2,$$
$$m(m'+1) = n(n'+1) = p(p'+1),$$

et les seules solutions en nombres entiers et positifs sont les suivantes

$$m = n = 2, \quad m' = n' = p - 1, \quad p' = 1,$$
$$m = 2, \quad n = p = 3, \quad m' = 5, \quad n' = p' = 3,$$
$$m = 2, \quad n = 3, \quad p = 4, \quad m' = 11, \quad n' = 7, \quad p' = 5,$$
$$m = 2, \quad n = 3, \quad p = 5, \quad m' = 29, \quad n' = 19, \quad p' = 11.$$

Par une substitution linéaire générale, on sera conduit aux quatre identités

$$X_n^2 + Y_n^2 + Z_2^n = 0,$$
$$X_6^2 + Y_4^3 + Z_4^3 = 0,$$
$$X_{12}^2 + Y_8^3 + Z_6^4 = 0,$$
$$X_{30}^2 + Y_{20}^3 + Z_{12}^5 = 0,$$

X, Y, Z étant des fonctions entières d'un degré marqué par leur indice, l'une seulement pouvant être d'un degré inférieur d'une unité. Chacune d'elles contient trois coefficients indéterminés. La première formule a déjà été rencontrée; c'est la formule (15). Quant aux trois autres, on les obtient en changeant t en $\frac{[t^n + (t-1)^n]^2}{4t^n(t-1)^n}$ dans les formules (19), (22) et (24), n ayant les valeurs 2, 2, 5 respectivement.

8. Toute identité de la forme (10), pour laquelle la relation (12) n'est pas satisfaite, ne fournit pas une intégrale de l'équation de Kummer. Cependant ces formules peuvent servir à transformer les séries hypergéométriques les unes dans les autres et par cela même ne sont pas *a priori* complètement dénuées d'intérêt. Les équations (11) et (12) devront être remplacées par les suivantes:

$$N + (m-2)m' + N' + (n-2)n' = 2p' + 2 - 2\delta,$$
$$N + mm' = N' + nn' = N'' + pp',$$
$$N + N' + N'' \geqq 3,$$

δ étant un nombre entier positif, et ces équations n'admettent de solutions que dans les quatre premier cas du tableau, où l'intégrale générale est algébrique.

Je n'aborderai pas ici les diverses applications que l'on peut faire de ces formules, ni les différentes manières dont on peut généraliser le problème. Toutes ces questions, ainsi que le calcul numérique des formules (10), feront l'objet d'un travail plus étendu. Je me bornerai à résumer le résultat de ce travail.

Pourque l'équation de Kummer admette des intégrales qui soient des fonctions rationnelles de la variable, il faut que λ, μ, ν, supposés positifs, soient les inverses de nombres entiers supérieurs à l'unité.

Si la somme $\lambda + \mu + \nu$ est supérieure ou égale à l'unité, il existe une infinité d'intégrales rationnelles; si cette somme est inférieure à l'unité, il n'en existe qu'un nombre limité.

Toulouse, 5 Mai 1884.

Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre.

Par

HALPHEN à Paris.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. KLEIN).

Votre beau mémoire *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (Math. Ann. T. XIV) renferme, à la page 455, une note qui a vivement piqué ma curiosité: „Sie muss (die Gleichung 168[ten] Grades) sich auch durch eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung lösen lassen; wie hat man dieselbe aufzustellen?"

L'étude de votre mémoire, que je me reproche d'avoir si long temps différée, m'a de suite convaincu que je pourrais aisément construire l'équation différentielle désirée. M'étant mis à cette besogne, j'ai été agréablement surpris de voir cette équation appartenir à un type que j'ai étudié dans mon *mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (pages 199 et 218).*)

Il s'agit de l'équation que j'écris sous forme abrégée

$$\frac{d^3y}{dx^3} + h\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}(l-1)y = 0;$$

la variable auxiliaire x et les coefficients h, l étant liés à la variable indépendante α par les relations

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{l}\frac{dh}{d\alpha},$$

$$h^3 = r(\alpha-1)(\alpha+c)^3, \quad l = q\alpha\left(\alpha+\frac{c-3}{4}\right).$$

En outre, les constantes r, q, c sont exprimées comme il suit en fonction de trois nombres entiers a, a', m:

---

*) Auch Hr. Brioschi hat neuerdings lineare Differentialgleichungen aufgestellt, die mit der im Texte behandelten Frage zusammenhängen; man sehe Annali di Matematica, ser. 2, t. XII, p. 64 ff.

F. Kl.

$$r = \frac{7^3}{2^8}\,\frac{m^6}{[(a'-a)(2a'+a)(2a+a')]^2},$$

$$q = \frac{7}{2}\,\frac{m^3}{(a'-a)(2a'+a)(2a+a')},$$

$$c = \frac{2^2\cdot 3}{7}\,\frac{a^2+a'^2+aa'}{m^2}.$$

Cette équation, étant développée avec la variable α, est à coefficients rationnels; mais il vaut mieux la conserver sous la forme symbolique ci-dessus, où les éléments essentiels sont en évidence.

En faisant connaitre cette équation, j'ai signalé plusieurs cas que je prends la liberté de vous rappeler.

C'est d'abord le cas $m = 2$, $a = 1$, $a' = 2$ (page 141 du mémoire cité): les solutions y_1, y_2, y_3 sont proportionnelles à trois polynômes entiers du 3ème degré, formés avec la variable $\left[\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}\right]^{\frac{1}{3}}$, ou, en d'autres termes, sont proportionnelles aux coordonnées d'un point mobile sur une cubique à noeud.

C'est ensuite le cas $m = 2$, $a = 1$ et a' quelconque, même fractionnaire (page 237). En faisant $a' = 2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$, on a ce résultat que trois solutions satisfont à la relation

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu = 0,$$

et sont ainsi proportionnelles aux coordonnées d'un point mobile sur une courbe triangulaire symétrique.

En particulier, si l'on prend $\nu = 3$, ce cas coïncide avec cet autre $m = 6$, $a = 1$, $a' = 2$, et la courbe est une cubique équianharmonique.

J'ai fait voir, en général, que a, a', m étant positifs et $\frac{a}{m}$, $\frac{a'}{m}$, $\frac{a+a'}{m}$ fractionnaires tous trois, et ayant pour plus petit commun dénominateur m, l'équation s'intègre algébriquement si m est égal à 3, 4 ou 5. J'ai calculé de nombreux exemples pour ces cas, qui se rattachent à la théorie des groupes finis de substitutions linéaires pour les variables binaires.

Il résulte aussi de ce qui est dit à la page 217 et au Chapitre IX de mon mémoire, et j'ai eu le tort de ne pas énoncer explicitement, que l'équation s'intègre encore algébriquement quand m est égal à 6, pourvu que $2a + a'$ ne soit pas divisible par 3.

Ces propriétés donnaient déjà de l'intérêt à l'équation dont il s'agit. Mais voici maintenant du nouveau:

Dans le cas $m = 7$, $a = 1$, $a' = 2$, trois solutions y_1, y_2, y_3 satisfont à la relation

$$y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1 = 0,$$

et sont ainsi proportionnelles aux coordonnées de la courbe du 4ème degré, qui se reproduit elle-même par les substitutions de votre groupe d'ordre 168.

Pour être tout-à-fait explicites, posons

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1,$$

et désignons, suivant vos notations, par ∇, C, K les trois covariants de f, ayant les degrés respectifs 6, 14, 21.

Par les relations $f = 0$ et

$$1 - \alpha : 1 : \alpha = C^3 : K^2 : 3^3 \cdot 2^6 \nabla^7$$

$\Big($ce qui revient à faire $\alpha = \frac{1}{1-J}$ à la page 449 de votre mémoire$\Big)$, déterminons les rapports de x_1, x_2, x_3.

Alors l'équation différentielle admet les solutions

$$y_i = \left(\frac{K}{\nabla^4}\right)^{\frac{1}{3}} x_i. \qquad i = 1, 2, 3.$$

Pour qui a pris la peine d'étudier ma théorie des invariants différentiels, la démonstration est très-facile. Elle découle immédiatement de ce fait que les *points de coïncidence* de la courbe $f = 0$ (points en chacun desquels, 8 points consécutifs étant pris pour pivots d'un faisceau de cubiques, le 9ème pivot coïncide avec les précédents) sont au nombre de $224 = 168 + 56$; d'où il suit que, parmi eux, se trouvent les points de contact des tangentes doubles.

A chaque équation de la forme ci-dessus s'en adjoint une seconde par la permutation de a, a'. Les deux adjointes s'intègrent en même temps. Ainsi pour $m = 7$, $a = 2$, $a' = 1$, on a:

$$y_i = \left(\frac{K}{\nabla^5}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

J'ai trouvé aussi pour $m = 7$, $a = 1$, $a' = 4$

$$y_i = \frac{K^{\frac{1}{3}}}{\nabla^2} \frac{\partial \nabla}{\partial x_i},$$

et pour $m = 7$, $a = 4$, $a' = 1$:

$$y_1 = \frac{K^{\frac{1}{3}}}{\nabla^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \nabla}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial x_2^2} & \frac{\partial \nabla}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial \nabla}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial \nabla}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

et de même y_2 et y_3 par le changement des indices.

Il ne me parait pas douteux qu'il existe une infinité de cas $m = 7$ où l'équation s'intègre par la formule

$$y = \left(\frac{K}{\nabla^{2a+a'}}\right)^{\frac{1}{3}} F(x_1, x_2, x_3)$$

F étant un polynome entier du degré $2(2a + a') - 7$. Mais, à cet égard, je n'ai pas jusqu'à présent de criterium bien établi qui distingue ces cas. Il est vraisemblable que les conditions suivantes sont nécessaires: $2a + a'$ et $2a' + a$ sont premiers avec 7.

Paris, le 11 Juin 1884.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.*)

Von

Julius König in Budapest.

Die Grundlagen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln finden sich in den zwei berühmten Abhandlungen Ampère's**) vom Jahre 1811 und 1820, und nur verhältnissmässig wenige Arbeiten haben seitdem den Gegenstand weitergeführt. Auch diese beschäftigen sich meist mit jener Classe von Differentialgleichungen, welche erste Integrale besitzen, und deren Integration nach der sogenannten Monge-Ampère'schen Methode vollständig erledigt werden kann. Diese Classe ist auch schon bei Ampère so vollständig behandelt, als es der Stand der Theorie der Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung damals ermöglichte. Wichtige Ergänzungen dieser Theorie enthalten noch die Abhandlungen von Boule***), Bour†) und Imschenetsky††). Diese letztere ausführliche Arbeit hat das Verdienst, neben vielen neuen Details auch eine klare und leicht zugängliche Darstellung der schwierigen Ampère'schen Untersuchungen zu geben.

Die wichtigen Arbeiten von Darboux, Lévy und Hamburger beschäftigen sich mit der Untersuchung neuer und allgemeinerer Classen von Differentialgleichungen, und sollen im Zusammenhange mit den hier zu entwickelnden Resultaten an den entsprechenden Stellen (am Schlusse der §§ 4 und 9) angeführt und ausführlicher besprochen

*) In der Jahresversammlung der ung. Akademie am 8. Juni 1884 mit dem Preise der Bézsán-Stiftung ausgezeichnet.

**) Journal de l'école polytechnique, t. X et XI.

***) Crelle's Journal, Bd. LXI.

†) Journal de l'école polytechnique, t. XXII.

††) Grunert's Archiv, Bd. 50.

werden. Hieher gehört noch die Mittheilung von Moutard*), in welcher die Bedingungen entwickelt werden, wann eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die nur den Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ enthält, ein solches allgemeines Integral besitzt, das nach Ampère's Terminologie ein „intégrale de première espèce" ist. Es ist zu bedauern, dass die Untersuchungen der französischen Autoren nur in kurzen Auszügen publicirt sind, und seither keine der versprochenen ausführlichen Abhandlungen erschien, trotzdem die letzte jener Mittheilungen aus dem Jahre 1872 datirt.

Eine diessbezügliche, von der ungarischen Akademie der Wissenschaften gestellte Preisfrage, gab mir umsoeher die Anregung, mich mit der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu beschäftigen, als nach den fundamentalen Untersuchungen Jacobi's und den sich an diese anschliessenden Arbeiten die Theorie der simultanen Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Function als abgeschlossen betrachtet werden kann, und wir damit erst im Besitz jener Hülfsmittel sind, ohne die eine Untersuchung der Differentialgleichungen höherer Ordnung wohl kaum gelingen konnte. Damit im Zusammenhange — konnten auch die von Ampère gewählten Methoden verlassen und der, wie es scheint, natürliche Weg betreten werden, welcher in der Verallgemeinerung der von Jacobi für Differentialgleichungen erster Ordnung angebahnten Methoden besteht. In der That zeigt schon der in dieser Abhandlung ausführlich behandelte nächsteinfache Fall, dass diese Methoden auch dann ohne neue principielle Schwierigkeiten zum Ziele führen werden, wenn die Ordnung oder die Anzahl der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung grösser als 2 ist.

Die leitenden Gedanken Ampère's werden wohl erst später verwerthet werden können. Um, wie dies Ampère gewollt, jene analytischen Formen aufzustellen, die die gesammte, durch eine partielle Differentialgleichung definirte Functionenmannigfaltigkeit umfasst, muss vielleicht zuerst der Prozess der Integration selbst genau bekannt sein. Die Theorie der Integration ist eben einfacher als die Theorie der Integrale.

Ich beschränke mich darauf, statt einer ausführlichen Inhaltsübersicht hier nur die Hauptgesichtspunkte und die Resultate meiner Abhandlung möglichst kurz zusammenzustellen.

---

*) Comptes rendus, t. LXX, pag. 834. Auch Lie hat die Gleichungen

$$s = F(z) \quad \text{u.} \quad s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}$$

auf Grundlage der Darboux'schen Theorie in Bezug auf die Möglichkeit ihrer Integration durch totale Differentialgleichungen vollständig discutirt.

Der wesentlichste Punkt in der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht darin, dass die Bestimmung einer *vollständigen* Lösung auf die Bestimmung einer *particulären* Lösung für eine andere, eine grössere Zahl unabhängiger Variabeln enthaltende, aber *lineare* partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt wird. In Folge zweier Umstände, die bei Differentialgleichungen höherer Ordnung nicht mehr stattfinden, ist damit die Integration auch als beendet zu betrachten. Es ist erstens die Auflösung einer linearen partiellen Differentialgleichung äquivalent mit der Integration eines Systems totaler Differentialgleichungen, und zweitens kann aus einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung jede andere Lösung mittels bekannter Operationen abgeleitet werden.

Dem gegenüber möge schon hier bemerkt werden, dass wir keineswegs berechtigt sind zu erwarten, dass die Integration einer beliebigen partiellen Differentialgleichung sich auf die Integration von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückführen lasse, — ungefähr ebensowenig wie wir die algebraische Auflösung jeder algebraischen Gleichung suchen können. — Die Methode der Variation der Constanten ist aber, um Resultate von solcher Allgemeinheit zu geben, wie bei den Differentialgleichungen 1. Ordnung, gerade an die Möglichkeit gebunden, die Auflösung der gegebenen Gleichung auf die Integration totaler Differentialgleichungen zurückzuführen.

Ein Hauptresultat unsrer Entwicklungen besteht nun darin, *dass die Bestimmung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung* 2. *Ordnung sich auf die Bestimmung einer particulären Lösung für eine mehr unabhängige Variable enthaltende, aber lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen lässt* — grade so, wie bei den Gleichungen erster Ordnung.

Diese Bestimmung geschieht in der Weise, dass jene particuläre Lösung, einer willkürlichen Constanten gleich gesetzt, bei veränderter Interpretation der gebrauchten Bezeichnungen geradezu eine zweite partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert, deren allgemeinste, mit der vorgelegten gemeinschaftliche Lösung noch vier willkürliche Constanten enthält, und in Bezug auf diese den Charakter einer vollständigen Lösung besitzt. Die Bestimmung dieser gemeinschaftlichen Lösung geschieht durch die Integration eines Systems totaler Differentialgleichungen.

Im allgemeinen besitzt eine solche Differentialgleichung, die eine willkürliche Constante enthält, überhaupt keine allgemeinere, mit der vorgelegten Gleichung gemeinschaftliche Lösung. Ausgenommen ist jedoch *eine bestimmte Classe von Differentialgleichungen*, in Bezug auf welche solche Gleichungen der angegebenen Form existiren, die unendlich

viele mit der vorgelegten, gemeinschaftliche Lösungen besitzen, jedoch ohne dass dies für alle vollständige Lösungen der Fall wäre. Ob eine Gleichung in diese Classe gehört, wird durch die Aufstellung eines Systems zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung entschieden. Wenn dieses System Lösungen besitzt, so wird im Allgemeinen jede particuläre Lösung gleich einer willkürlichen Constanten gesetzt, abermals bei veränderter Interpretation der gebrauchten Bezeichnungen eine Differentialgleichung ergeben, welche die gesuchte Eigenschaft besitzt. Und zwar erhält man jede beliebige Lösung, also die allgemeine Lösung, wenn jenes System zwei unabhängige Lösungen besitzt. Hat das System nur eine Lösung, so erhält man wohl unendlich viele vollständige Lösungen, die jedoch nicht alle Lösungen umfassen. Die Mannigfaltigkeit dieser Lösungen bildet *ein erstes Integral in verallgemeinerter Bedeutung dieses Ausdrucks;* der Umfang der so bestimmten Integralmannigfaltigkeit stimmt nämlich mit der durch ein erstes Integral — im gewöhnlichen Sinne des Wortes — gegebenen überein.

Während die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch die Bestimmung der vollständigen Lösungen als erledigt betrachtet werden kann, ist diese nur ein erster Schritt in Bezug auf Gleichungen zweiter Ordnung. Die allgemeine Theorie knüpft an die Erweiterung des Begriffs der vollständigen Lösung an. Man nennt eine Lösung vollständig, wenn sie fünf willkürliche Constanten enthält und keiner andern partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Wir führen Lösungen mit $5+r$ willkürlichen Constanten ein, die abermals die letztere Eigenschaft besitzen und nennen diese *vollständige Lösungen r^{ten} Ranges.*

Die Bestimmung einer vollständigen Lösung vom Range $2(k-2)$ geschieht nun wieder mit Hülfe einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer grösseren Anzahl unabhängiger Variabeln, und zwar wieder in der Weise, dass im Allgemeinen jede particuläre Lösung dieser letztern, einer willkürlichen Constanten gleich gesetzt, bei veränderter Interpretation der gebrauchten Bezeichnungen, eine Differentialgleichung k^{ter} Ordnung ergiebt, deren allgemeinste, mit der vorgelegten gemeinschaftliche Lösung $2k$ weitere willkürliche Constanten enthält, und in Bezug auf diese eine vollständige Lösung vom Range $2(k-2)$ ist. Diese vollständige Lösung wird durch die Integration eines Systems totaler Differentialgleichungen erhalten.

Im Allgemeinen ist dies wieder die allgemeinste, gemeinschaftliche Lösung der beiden Differentialgleichungen. Jedoch giebt es für jedes $k \geq 2$ *eine bestimmte Classe von Differentialgleichungen*, in Bezug auf welche Differentialgleichungen k^{ter} Ordnung angegeben werden können, die unendlich viele mit der vorgelegten gemeinschaftliche solche Lösungen besitzen. Wir erhalten wieder ein Kriterium dafür, ob eine gegebene

Differentialgleichung in diese Classe gehört, oder nicht, und die ganze Theorie entwickelt sich in vollständiger Analogie mit dem einfachsten Falle, $k = 2$.*)

So erhalten wir unendlich viele Classen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integration auf diejenige von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Wir besitzen fertige Kriterien um zu entscheiden, ob eine gegebene Gleichung in eine dieser Classen gehört, und geben in diesem Falle vollständig ausgeführte Integrationsmethoden.

Unter Voraussetzung gewisser von M. Lévy ohne Beweis gegebener, später ausführlich zu besprechender Sätze zeigt es sich, dass *jene Classen sämmtliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung umfassen, deren Integration auf diejenige von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann*.

Jene Differentialgleichungen, deren Integration Darboux ohne Ausführung der Methode angedeutet hat, sind als specielle Fälle in den hier charakterisirten Classen enthalten; und es ist wieder der einfachste der bei Darboux auftretenden Fälle, in welchem $k = 2$, derjenige, den Hamburger ausführlich behandelt.

Uebersicht des Inhalts.

*) Der Fall $k = 1$ giebt Lösungen mit 3 willkürlichen Constanten, also keine vollständige Lösung; dieser Fall ist ohne Schwierigkeit zu erledigen, obwohl derselbe sich im einzelnen anders gestaltet. Er soll hier nicht besonders betrachtet werden, da wir dabei im wesentlichen eben die Monge-Ampère'schen Methoden erhalten.

§ 1.

Einleitende Bemerkungen über vollständige und unbeschränkt integrable Systeme von Differentialgleichungen.

1. Das einfachste Problem in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln verlangt die Integration eines aus 3 simultanen Gleichungen bestehenden Systems. Bei Anwendung der gewohnten Bezeichnungen

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

sei dieses System:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ &F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ &F_3(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \end{aligned}$$

Die Functionaldeterminante der F nach r, s, t soll als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt werden, auch für den Fall, wenn r, s, t durch ein den Gleichungen (1) genügendes System von Lösungen ersetzt werden. Dann können wir die Gleichungen (1) in gelöster Form:

$$(2) \qquad \begin{aligned} r &= \varphi(x, y, z, p, q), \\ s &= \psi(x, y, z, p, q), \\ t &= \chi(x, y, z, p, q) \end{aligned}$$

schreiben, wo die Functionen φ, ψ, χ eben durch (1) definirt sind.

Das gegebene Problem kann nun auch folgendermassen gefasst werden: Es sollen z, p, q als Functionen von x, y bestimmt werden aus den Werthen der Differentialquotienten:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{dp}{dx} = \varphi(x, y, z, p, q), && \frac{dp}{dy} = \psi(x, y, z, p, q), \\ &\frac{dq}{dx} = \psi(x, y, z, p, q), && \frac{dq}{dy} = \chi(x, y, z, p, q), \\ &\frac{dz}{dx} = p, && \frac{dz}{dy} = q. \end{aligned}$$

Damit ist aber unsre Aufgabe auf eine bekannte Form gebracht; wenn die Integration des zuletzt hingeschriebenen Systems überhaupt möglich ist, d. h. wenn den Bedingungen entsprechende Functionen z, p, q existiren, so erhält man dieselben aus einem gewöhnlichen Systeme totaler Differentialgleichungen.*)

*) Siehe A. Mayer, Ueber unbeschränkt integrable Systeme etc. Math. Annalen, Bd. V, pag. 448.

Die Möglichkeit der Aufgabe hängt von gewissen *Integrabilitätsbedingungen* ab; dieselben — der Zahl nach drei — sind:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx},$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\chi}{dx},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

Von diesen ist die dritte, da die Werthe von $\frac{dp}{dy}$ und $\frac{dq}{dx}$ dieselben sind, immer identisch erfüllt, und es bleiben demnach zwei Bedingungen, ausführlich geschrieben die folgenden:

$$(4)\quad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\psi + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\chi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}p + \frac{\partial\psi}{\partial p}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial q}\psi, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}q + \frac{\partial\psi}{\partial p}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial q}\chi &= \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial z}p + \frac{\partial\chi}{\partial p}\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial z}\psi. \end{aligned}$$

Sind diese Bedingungen identisch erfüllt, so erhält man für z, und damit auch für p und q, Functionen mit drei willkürlichen Constanten, und in diesem Falle soll das System (1) oder (2), sowie dies bei dem äquivalenten Systeme (3) gebräuchlich, als *unbeschränkt integrables System* bezeichnet werden. Dieser Fall der unbeschränkten Integrabilität ist hier allein für uns von Interesse, da nur dieser in der allgemeinen Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Anwendung gelangt. (Sind jene Integrabilitätsbedingungen nicht identisch erfüllt, so erhält man als Lösungen des Systems (3) Functionen mit *weniger*, als drei willkürlichen Constanten, oder es zeigt sich, dass das System überhaupt keine Lösungen besitzt).

2. Die Integrabilitätsbedingungen sind im Vorhergehenden unter der Voraussetzung angeschrieben, dass die Auflösung des Systems (1) nach r, s, t schon erfolgt ist. Will man das Auftreten der Functionen φ, ψ, χ vermeiden, so kann man die Integrabilitätsbedingungen zuerst in der Form

$$\frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx},$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx}$$

schreiben, und dann die Differentialquotienten der in (1) implicite gegebenen Functionen r, s, t leicht entwickeln.

Hierzu führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(6)\quad \begin{aligned} \left(\frac{df}{dx}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s, \\ \left(\frac{df}{dy}\right) &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t \end{aligned}$$

nach welchen $\left(\frac{df}{dx}\right)$ und $\left(\frac{df}{dy}\right)$ die totalen Differentialquotienten der Function $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$ mit Hinweglassung der die dritten Differentialquotienten enthaltenden Glieder bedeutet.

Wenn wir nun die Gleichungen des Systems (1) nach x und y vollständig differenziren, erhalten wir lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der gesuchten Differentialquotienten. Dieselben lauten:

$$\left(\frac{dF_i}{dx}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial F_i}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial F_i}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

und

$$\left(\frac{dF_i}{dy}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial F_i}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial F_i}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Die Determinante dieser Gleichungssysteme:

$$D = D\left(\frac{F_1, F_2, F_3}{r, s, t}\right)$$

ist, nach unseren ursprünglichen Festsetzungen, weder identisch, noch für die in Betracht kommenden Functionalwerthe von r, s, t gleich Null. Bestimmt man demnach die Unbekannten:

$$\frac{dr}{dx}, \quad \frac{ds}{dx}, \quad \frac{dt}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dy}, \quad \frac{ds}{dy}, \quad \frac{dt}{dy}$$

so erhält man, wenn man die in den Lösungen auftretenden Determinanten vorläufig abgekürzt bezeichnet, die Integrabilitätsbedingungen in der Form:

$$(7) \qquad \frac{Y_r}{D} = \frac{X_s}{D}, \qquad \frac{Y_s}{D} = \frac{X_t}{D}.$$

Sind r, s, t die durch (1) bestimmten Functionen, so müssen diese Relationen identisch befriedigt sein, damit (1) ein unbeschränkt integrables System bilde. Es kann zu keinem Missverständniss führen, wenn wir dies so ausdrücken, dass *die Gleichungen* (7) *„algebraische" Folgen der Gleichungen* (1) *sein müssen*, wo das Wort „algebraisch" nur so viel bedeuten soll, dass x, y, z, p, q, r, s und t ohne Rücksicht auf ihren Zusammenhang als Unbestimmte zu betrachten sind.

Da aber D für die in Betracht kommenden Werthe von r, s, t, der Annahme nach nicht verschwindet, kann in (7) der Nenner D ganz weggelassen werden, und man kann die *Bedingung dafür, dass* (1) *ein unbeschränkt integrables System bilde, auch so ausdrücken, dass, wenn man aus*

$$Y_r = X_s, \quad Y_s = X_t$$

mit Hülfe von (1) r, s, t *eliminirt, die Eliminationsresultate Identitäten sein müssen.* Es möge auch hier gestattet sein, die Ausdrucksweise der Algebra auf den Fall beliebiger, nur den bekannten allgemeinen functionentheoretischen Bedingungen unterworfenen Functionen F auszudehnen.

Es wird hier am Platze sein, die Determinantenform der beiden letzten Gleichungen, die im Folgenden zur Anwendung gelangt, ausführlich hinzuschreiben. Dieselben lauten:

$$(8)\quad \begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \left(\frac{dF_1}{dy}\right), & \frac{\partial F_1}{\partial s}, & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \left(\frac{dF_2}{dy}\right), & \frac{\partial F_2}{\partial s}, & \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \left(\frac{dF_3}{dy}\right), & \frac{\partial F_3}{\partial s}, & \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r}, & \left(\frac{dF_1}{dx}\right), & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}, & \left(\frac{dF_2}{dx}\right), & \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial r}, & \left(\frac{dF_3}{dx}\right), & \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{vmatrix}, \\
&\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r}, & \left(\frac{dF_1}{dy}\right), & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}, & \left(\frac{dF_2}{dy}\right), & \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial r}, & \left(\frac{dF_3}{dy}\right), & \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r}, & \frac{\partial F_1}{\partial s}, & \left(\frac{dF_1}{dx}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}, & \frac{\partial F_2}{\partial s}, & \left(\frac{dF_2}{dx}\right) \\ \frac{\partial F_3}{\partial r}, & \frac{\partial F_3}{\partial s}, & \left(\frac{dF_3}{dx}\right) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Setzen wir die eine der Gleichungen (1) nach r gelöst voraus, und substituiren wir diesen Werth von r in die übrigen Gleichungen ein, so erhält das ganze System die Form:

$$\begin{aligned} r + f(x, y, z, p, q, s, t) &= 0, \\ u(x, y, z, p, q, s, t) &= 0, \\ v(x, y, z, p, q, s, t) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen, die für den Fall der unbeschränkten Integrabilität Identitäten werden müssen, lauten für diese specielle Form:

$$(9)\quad \begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dy}\right), & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{dv}{dy}\right), & \frac{\partial v}{\partial s}, & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dx}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{dv}{dx}\right), & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}, \\
&\begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{dv}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}, & \left(\frac{du}{dx}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial s}, & \left(\frac{dv}{dx}\right) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich r sofort durch die Substitution $r = -f$ eliminiren. Besonders wichtig wird der Fall, wo die so er-

haltenen Relationen identisch befriedigt sind ohne Berücksichtigung der Werthe von s und t, die aus $u = 0$, $v = 0$ zu bestimmen wären.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass auch das allgemeine System

$$(10)\qquad \begin{aligned} r + f(x, y, z, p, q, s, t) &= 0, \\ u(x, y, z, p, q, s, t) &= a_1, \\ v(x, y, z, p, q, s, t) &= a_2, \end{aligned}$$

wo a_1 und a_2 unbestimmte Constanten bedeuten, unbeschränkt integrabel sei, besteht darin, dass nach der Substitution $r = -f$ die Relationen (9) *identisch befriedigt sein müssen, auch wenn sämmtliche Grössen x, y, z, p, q, s, t als von einander unabhängig angesehen werden.*

Dass die Relationen (9) nach Elimination von r identisch bestehen müssen, folgt daraus, dass sie frei sind von den beiden willkürlichen Constanten a_1 und a_2 und also unmöglich erst eine Folge der Gleichungen $u = a_1$, $v = a_2$ sein können.

In diesem Falle führt die Integration noch 3 weitere willkürliche Constanten ein, und die allgemeine Lösung ergiebt z als Function von 5 willkürlichen Constanten, wenn jetzt auch a_1 und a_2 zu diesen gezählt werden:

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

§ 2.

Zusammenhang zwischen der allgemeinen Lösung des unbeschränkt integrabeln Systems und der vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

1. *Ist*

$$(1)\qquad r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

— wo f, u, v, wie früher Functionen von x, y, z, p, q, s, t bedeuten — *ein unbeschränkt integrables System, und*

$$(2)\qquad z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

die allgemeine Lösung dieses Systems, so ist $z = F$ zugleich immer eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $r + f = 0$.

Da $z = F$ jedenfalls eine Lösung von $r + f = 0$, ist nur der Nachweis zu führen, dass diese eine *vollständige* Lösung ist. Die Zahl der willkürlichen Constanten ist die entsprechende — fünf; es ist also nur noch zu zeigen, dass jede Gleichung, die aus*)

*) In der Folge benützen wir die Bezeichnungen:

$$F_x = \frac{dF}{dx}, \quad F_{xx} = \frac{d^2F}{dx^2}, \text{ u. s. f.}$$

$$z = F,$$
$$(3) \qquad p = F_x, \; q = F_y,$$
$$r = F_{xx}, \; s = F_{xy}, \; t = F_{yy}$$

durch Elimination der Grössen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 entsteht, mit $r+f=0$ „algebraisch" äquivalent ist.

Aus jeder solchen Gleichung kann man mit Hülfe der Gleichung $r + f = 0$ das r eliminiren, und erhält im allgemeinen:

$$g(x, y, z, p, q, s, t) = 0.$$

Wäre nun diese Gleichung keine Identität, so müsste jedes der Systeme

$$r + f = 0, \quad g = 0, \quad u = a_1$$

und

$$r + f = 0, \quad g = 0, \quad v = a_2$$

die Lösungen $z = F$ besitzen. Dies ist aber unmöglich; denn es muss wenigstens eines dieser Systeme nach r, s, t auflösbar sein. Aus

$$\frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

würde nämlich gegen unsre Voraussetzung auch

$$\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

folgen. Aus jenem auflösbaren Systeme ergiebt sich aber selbst im günstigsten Falle, dem der unbeschränkten Integrabilität als allgemeine Lösung für z eine Function mit nur *vier* willkürlichen Constanten.

Wäre $g = 0$ von der ersten Ordnung, so könnte man mit Hülfe der beiden Ableitungen dieser Gleichung dieselben Schlüsse wiederholen.

Damit die der vollständigen Lösung $z = F$ entsprechende partielle Differentialgleichung die Form $r + f = 0$ besitze, ist es nothwendig und hinreichend, dass das System:

$$z = F,$$
$$(4) \qquad p = F_x, \quad q = F_y,$$
$$s = F_{xy}, \quad t = F_{yy}$$

nach a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 auflösbar sei. Nennt man diese Auflösungen:

$$a_i = \alpha_i,$$

so wird die Differentialgleichung:

$$r = F_{xx}(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5).$$

2. Die Bedeutung der Differentialgleichungen $u = a_1$, $v = a_2$ ist durch das Vorhergehende klargestellt. Es sind dies Gleichungen, welche auch die Lösung $z = F$ besitzen. *Solche* Gleichungen, in denen

auch eine willkürliche Constante erscheint, sind natürlich immer möglich. Es wird nothwendig sein, die allgemeine Form jener Differentialgleichungen zu bestimmen, die eine willkürliche Constante enthalten und die Lösung $z = F$ besitzen. Aus jeder solcher Gleichung kann man r mit Hülfe von $r + f = 0$ eliminiren, und es wird demnach genügen, *die r nicht enthaltenden Formen* aufzustellen.

Eliminirt man a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 aus dem System:

$$z = F, \quad p = F_x, \quad q = F_y,$$
$$s = F_{xy}, \quad t = F_{yy},$$
$$C = \omega(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

wo ω eine willkürliche Function bedeutet, so erhält man solche Differentialgleichungen in der Form:

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = C. \tag{5}$$

Es wird nur noch zu erweisen sein, dass dies die *allgemeine* Form der gesuchten Gleichungen ist. Sei

$$\Phi(x, y, z, p, q, s, t) = C \tag{6}$$

irgend eine solche Differentialgleichung, in welcher also Φ nach der Substitution $z = F$ ausschliesslich von den a abhängt. Dann erhält man durch Differentiation nach x und y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}p + \frac{\partial\Phi}{\partial p}r + \frac{\partial\Phi}{\partial q}s + \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}q + \frac{\partial\Phi}{\partial p}s + \frac{\partial\Phi}{\partial s}t + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Hier können r und die Differentialquotienten von s und t durch x, y, z, p, q, s, t ausgedrückt werden. Denn für $z = F$ erhält man:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{dF_{xy}}{dx}, \quad \text{u. s. f.}$$

und ersetzt in diesen Ausdrücken a_i durch α_i. Die beiden Gleichungen (7) müssen dann identisch Null ergeben, sonst wären dies (für ein bestimmtes Φ) Differentialgleichungen, die keine willkürliche Constante enthalten und von $r + f = 0$ wesentlich verschieden sind, und doch die vollständige Lösung $z = F$ besitzen.

Die Function Φ genügt demnach zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 7 unabhängigen Variabeln: x, y, z, p, q, s, t, die von einander unabhängig sind und deren allgemeine Lösung eine willkürliche Function von höchstens 5 Argumenten enthält. Es ist daher

$$\Phi = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5).$$

in der That die allgemeine Lösung unsrer Aufgabe.

3. Bevor wir weitergehen, soll noch kurz erwähnt werden, dass die Annahme der Differentialgleichung in der Form $r + f = 0$ keine Beschränkung der Allgemeinheit zur Folge hat. Kommt r in der vorgelegten Gleichung nicht vor, aber doch t, so hat man bloss x und y zu vertauschen. Es bleiben demnach nur die Gleichungen von der Form:

$$s = \psi(x, y, z, p, q)$$

zurück. Man kann allerdings für diese specielle Classe von Gleichungen die folgende Integrationstheorie durch eine einfachere ersetzen. Um jene direct anwenden zu können, hat man aber nur eine von Kowalewsky*) für beliebige partielle Differentialgleichungen angegebene Transformation zu benutzen. Führt man nämlich die neuen unabhängigen Variabeln

$$x_1 = kx + ly,$$
$$y_1 = mx + ny$$

ein, so wird, wenn noch die Bezeichnungen:

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dz}{dy_1} = q_1, \quad \text{u. s. f.}$$

benützt werden:

$$\begin{aligned}
p &= kp_1 + mq_1, \\
q &= lp_1 + nq_1, \\
r &= k^2 r_1 + 2mks + m^2 t_1, \\
s &= klr_1 + (kn + ml)s_1 + mnt_1, \\
t &= l^2 r_1 + 2lns_1 + n^2 t_1,
\end{aligned}$$

wo nur noch die Constanten so zu wählen sein werden, dass weder $kn - ml$, noch kl verschwinden. Am einfachsten ist

$$k = l = m = 1, \quad n = -1.$$

Dann wird:

$$x = \frac{x_1 + y_1}{2}, \qquad y = \frac{x_1 + y_1}{2},$$

$$p = p_1 + q_1, \qquad q = p_1 - q_1,$$

$$s = r_1 - t_1$$

und die transformirte Gleichung erhält die Form

$$r_1 = t_1 + \psi\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2}, z, p_1 + q_1, p_1 - q_1\right).$$

Die specielle Theorie der Gleichungen $s = \psi$ ist also identisch mit derjenigen, welche der Form $r - t = \Psi$ entspricht.

---

*) „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen", Journal für d. r. u. a. Math. Bd. 80, S. 19.

§ 3.

Das simultane System erster Ordnung mit zwei unbekannten Functionen zur Bestimmung der vollständigen Lösung.

1. Die Bestimmung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0 \tag{1}$$

ist auf die Integration eines Systems totaler Differentialgleichungen zurückgeführt, wenn es gelingt, zwei Functionen, u und v von x, y, z, p, q, s, t so zu bestimmen, dass ihre Functionaldeterminante nach s und t nicht verschwindet und ferner das System

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

unbeschränkt integrabel ist.

Hierzu muss u und v den unter (9) in § 1 entwickelten Relationen genügen. Diese sind, wenn wir die Determinanten entwickeln:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) \\
&\qquad - \left(\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial s} \\
&\qquad + \left(\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\
&\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

wo die Abkürzungen $\left(\frac{d}{dx}\right)$ und $\left(\frac{d}{dy}\right)$ die unter (6) in § 1 gegebene Bedeutung besitzen und $r = -f$ zu setzen ist. Das System (2) besteht aus *zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, aus denen u und v als Functionen von x, y, z, p, q, s, t zu bestimmen sind.*

Jede particuläre Lösung dieses Systems, welche der auf die Functionaldeterminante bezüglichen Nebenbedingung genügt, ergiebt zugleich eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $r + f = 0$.

Die Nebenbedingung kann kurz so ausgedrückt werden, dass *von den Lösungen u, v, die dem System* (2) *genügen, jene noch auszuschliessen sind, für welche identisch:*

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} = 0. \tag{3}$$

Der Fall, wo D erst dann null wird, wenn für s und t die Lösungen des Systems $u = a_1$, $v = a_2$ eingesetzt werden, kann gar

nicht vorkommen; denn $D = 0$ ist frei von a_1 und a_2, und kann also nicht erst eine Folge der Gleichungen

$$u = a_1, \quad v = a_2$$

sein.

Man sieht unmittelbar, dass wenn man u beliebig wählt und für v eine willkürliche Function von u nimmt, man immer Lösungen von (2) erhält, die aber in die Reihe der auszuschliessenden gehören.

2. Unsere Aufgabe wird es nun sein, *alle jene Functionen* u, v *zu bestimmen, die dem Systeme* (2) *genügen, ohne zugleich die Gleichung* (3) *zu befriedigen.*

Die gesammten Functionen von x, y, z, p, q, s, t lassen sich in Bezug auf das System (2) in drei Classen verteilen, je nachdem, *wenn dieselben für u eingesetzt werden:*

A) Das System (2) *einer einzigen Gleichung äquivalent ist. Diess kann geschehen, indem* 1. *die beiden Gleichungen algebraisch aus einander folgen, d. h. die Coefficienten der partiellen Differentialquotienten von v in den beiden Gleichungen proportional sind, oder* 2. *sämmtliche Coefficienten in einer der Gleichungen verschwinden.*

B) Die beiden Gleichungen in Bezug auf v ein vollständiges System bilden. D. h. die bekannte Integrabilitätsbedingung ist identisch befriedigt und liefert keine neue Gleichung für v.

C) Die beiden Gleichungen kein vollständiges System bilden. D. h. die Entwicklung der Integrabilitätsbedingungen liefert wenigstens noch eine von der früheren unabhängige Differentialgleichung, der v genügen muss.

Wir zeigen zuerst, dass der Classe C) angehörende u-Functionen überhaupt in der Lösung unseres Problems nicht auftreten können. Wäre u eine solche Function, so hätte das System

$$r + f = 0, \quad u = a_1$$

eine gemeinschaftliche Lösung von der Form

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

die zugleich eine vollständige Lösung in Bezug auf $r + f = 0$. Dann ist, da wir die Bezeichnungen des § 2 beibehalten, u nichts anderes, als die dort eingeführte Function α_1. Setzt man also α_1 an die Stelle von u, so genügen dem Systeme jedenfalls folgende Werthe für v:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4, \ \alpha_5.$$

Denn das System

$$r + f = 0, \quad \alpha_1 = a_1, \quad \alpha_2 = a_2$$

hat die gemeinschaftliche Lösung $z = F$; wenn also die Functionaldeterminante von α_1 und beispielsweise α_2 nach s und t nicht verschwindet, muss $v = \alpha_2$ eine Lösung von (2) sein.

Verschwindet die Functionaldeterminante, so gestaltet sich der Beweis, dass auch dann $u = \alpha_1$, $v = \alpha_2$ eine Lösung des Systems (2) bilden, folgendermassen:

Diese Functionen genügen jedenfalls den Gleichungen (7) des § 2 und diese sind in kürzerer Form geschrieben:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0,$$

$$\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0.$$

Wenn in diesen Gleichungen r und die Differentialquotienten von s und t in der früher entwickelten Weise durch x, y, z, p, q, s, t ausgedrückt werden, müssen diese Gleichungen identisch befriedigt sein.

Wenn nun auch

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0$$

ist, so folgen noch aus den obigen 4 Gleichungen die folgenden:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) = 0,$$

welche Relationen unmittelbar zeigen, dass auch in diesem Falle $u = \alpha_1$, $v = \alpha_2$ eine Lösung des Systems (2) ist.

Besitzt also die Differentialgleichung $u \equiv \alpha_1 = a_1$ die Lösung $z = F$, so entsprechen dem Systeme (2) die Lösungen

$$u = \alpha_1, \quad v = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ von einander unabhängige Functionen sind.

Setzt man demnach α_1 für u_1, so wird v eine willkürliche Function von fünf Argumenten, und das wäre in dem unter C) aufgezählten Falle unmöglich, denn ein aus drei algebraisch unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestehendes System kann in seiner Lösung — auch im günstigsten Falle — nur eine willkürliche Function von 4 Argumenten enthalten.

Der Fall C) ist also von vorneherein ausgeschlossen und wir haben uns nur mit den in die Classen A) und B) gehörigen u-Functionen

zu beschäftigen, die uns — wie aus dem bisherigen hervorgeht — sämmtliche vollständige Lösungen der Gleichung $r+f=0$ geben werden.

Es sei noch hier bemerkt, dass die Classen A) und B) nicht gleichwerthig sind. Die erste Classe ist als specielle Art, als Grenzfall in der zweiten enthalten, und existirt nur bei gewissen partiellen Differentialgleichungen, deren Integration sich dann entsprechend vereinfacht. Wir gehen nun dazu über, die Theorie des simultanen Systems (2) ausführlich zu entwickeln.

§ 4.

Bestimmung der in die Classe A) gehörigen vollständigen Lösungen.

1. Sollen die beiden Gleichungen des Systems (2) im vorhergehenden Paragraphen algebraisch äquivalent sein, so müssen die Coefficienten der einzelnen partiellen Differentialquotienten von v proportionale Grössen werden; und *diess ergiebt für u das folgende simultane System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial t}},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}=\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)},$$

wo noch zu bemerken, dass $\frac{\partial u}{\partial s}$ nicht null sein kann, sonst müsste auch $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ sein; dann enthielte also u weder s noch t, und gehörte zu jenen Lösungen, die von vorneherein ausgeschlossen werden konnten.

Dann lässt sich die erste Gleichung leicht auf die Form

$$\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial s}\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

bringen; wenn wir also die beiden Lösungen der Gleichung

$$(1)\qquad \mu^2+\frac{\partial f}{\partial s}\mu+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

mit μ_1 und μ_2 bezeichnen, (wo μ_1 und μ_2 bekannte Functionen von x, y, z, p, q, s, t), so kommt an Stelle der ersten Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial s}\mu_1 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial s}\mu_2 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

womit (ebenso wie bei den Monge-Ampère'schen Methoden) das zu behandelnde System zweiten Grades in zwei Systeme ersten Grades zerlegt ist.

Wenn wir nämlich den Werth des links stehenden Quotienten, $-\mu_i (i = 1, 2)$ in die übrigen Gleichungen einführen, werden diese:

$$\mu_i\left(\frac{du}{dx}\right) - \quad \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right) \quad - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu_i + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

Diese Gleichungen sind aber äquivalent, denn wenn man die zweite Gleichung mit μ_i multiplicirt und die Relationen

$$\mu_i^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\mu_i = -\frac{\partial f}{\partial t}, \quad -\mu_i\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

berücksichtigt, erhält man die erste.

Der Fall $\mu = 0$ ist *hier* gänzlich ausgeschlossen; dann muss nämlich auch $\frac{\partial f}{\partial t}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ null sein, also schliesslich auch $\frac{\partial u}{\partial s}$, und u würde den auszuschliessenden Formen angehören. Wie der Fall $\mu = 0$ in anderer Weise Integrale liefern kann, wird am Schlusse dieses Paragraphen gezeigt werden.

Wir erhalten also zur Bestimmung der hierher gehörigen u die beiden Systeme:

$$(3) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial s}\mu_i + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu_i + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \\ (i = 1, 2), \end{gathered}$$

wo μ_1 und μ_2 die beiden Wurzeln der zu $r + f = 0$ gehörenden Gleichung, nach Darboux der *charakteristischen* Gleichung:

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial s} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - 4\frac{\partial f}{\partial t}}}{2}$$

bedeuten. Die so erhaltenen Systeme sollen in der Folge kurz als S_1 und S_2 bezeichnet werden.

Die Bedingung, dass die Systeme S_1, S_2 Lösungen besitzen, sondert im Allgemeinen bestimmte Classen von Differentialgleichungen aus. Sind jene Systeme integrabel, so kann man *immer unendlich*

viele vollständige Lösungen der Differentialgleichung $r + f = 0$ bestimmen.

Ist u eine Lösung von S_1 oder S_2, so ist einfach v aus der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

so zu bestimmen, dass der Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s}\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

nicht auch genügt wird. Dann ist

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

ein unbeschränkt integrables System und giebt demnach eine vollständige Lösung von $r + f = 0$.

Diess ist immer möglich; denn die Gleichungen (4) und (5) sind algebraisch von einander unabhängig.

Die auf die Functionaldeterminante bezügliche Nebenbedingung sondert also aus der (4) genügenden Functionenmannigfaltigkeit nur eine solche von niederer Dimension, eine Grenzmannigfaltigkeit aus.

2. Die Lösungen der Differentialgleichung (4) stehen in engem Zusammenhang mit den Integralen der Systeme S_1 und S_2. *Ist* nämlich *in* (4) *u eine Lösung des S_1, so genügt jede Lösung des Systems S_2 der Differentialgleichung* (4), d. h. jede Lösung des Systems:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial s}\mu_2 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ &\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\mu_2 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

genügt der Differentialgleichung

$$(7) \quad V_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du_1}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du_1}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

wenn u_1 eine Lösung des Systems

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial s}\mu_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \\ &\left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du_1}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

ist. Denn setzt man aus der ersten Gleichung (6) den Werth des $\frac{\partial v}{\partial t}$ in (7) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left[\left(\frac{du_1}{dx}\right) - \mu_2\left(\frac{du_1}{dy}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nichts anderes als die zweite der Gleichungen (6), multiplicirt mit $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -(\mu_1 + \mu_2),$$

also

$$\left(\mu_2 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s} = -\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und ebenso nach der zweiten Gleichung in (8):

$$\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s} = \left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du_1}{dy}\right) = \left(\frac{du_1}{dx}\right) - \mu_2\left(\frac{du_1}{dy}\right).$$

Die Lösungen des Systems S_2 erschöpfen jedoch nie die Lösungen der Gleichungen (4) oder (7), denn diese sind durch eine willkürliche Function von 6 Argumenten, jene durch eine willkürliche Function von höchstens 5 Argumenten gegeben. Hingegen wird im Allgemeinen keine der Lösungen aus S_2 durch die auf die Functionaldeterminante bezügliche Nebenbedingung ausgeschlossen, denn die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial u_2}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}(\mu_2 - \mu_1)$$

verschwindet nur in dem Ausnahmefalle, wo die charakteristische Gleichung gleiche Wurzeln besitzt, also die Systeme S_1 und S_2 zusammenfallen, oder eine der Functionen u weder s noch t enthält.

Es möge hier noch der folgende auf die Lösungen dieser Systeme bezügliche Satz angeführt werden. *Ist S_1 ein vollständiges System, so giebt es unter dessen Lösungen immer solche, die der Gleichung* (7) $V_1 = 0$ *nicht genügen, mit Ausnahme des Falles* $\mu_1 = \mu_2$.

Denn dann ist an Stelle von (6) das System

$$(9)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial s}\mu_1 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,\\ &\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

zu nehmen; verfährt man ebenso wie früher, so erhält man aus (7)

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left[\left(\frac{du_1}{dx}\right) - \mu_1\left(\frac{du_1}{dy}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s} = 0,$$

was mit der zweiten Gleichung unter (9) nur dann identisch sein kann, wenn

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right) = \left(\frac{du_1}{dx}\right) - \mu_1\left(\frac{du_1}{dy}\right)$$

ist. Nun hat man aber nach (8)

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right) = \left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du_1}{dy}\right);$$

also müsste

$$\mu_1 = -\left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right) = \mu_2$$

sein.

3. *Auch dann erhält man zur Bestimmung von v nur eine Differentialgleichung*, wenn alle Coefficienten in einer der Gleichungen (2) in § 3 verschwinden.

Da solche Functionen u, die weder s noch t enthalten, von vornherein ausgeschlossen sind, kann die zweite Gleichung des Systems nie entfallen; denn dann müsste $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ verschwinden. Sollen die Coefficienten der ersten Gleichungen verschwinden, so muss zuerst

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

sein; dann wird der Coefficient von $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ gleich $-\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}$. Da nun $\frac{\partial u}{\partial s}$ nicht null sein soll, so muss

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

sein; d. h. eine Wurzel der charakteristischen Gleichung muss gleich Null sein. Dann fällt der Coefficient von $\frac{\partial v}{\partial s}$ von selbst fort, und die letzte Bedingung giebt für den Coefficienten von $\frac{\partial v}{\partial t}$:

$$\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Wie man sieht, führen die erhaltenen Bedingungen auf den früher ausgeschlossenen Fall $\mu = 0$ zurück, und das entsprechende S-System giebt — wenn solche existiren — die Bestimmung der hierher gehörigen u-Formen.

Die erhaltenen Resultate lassen sich also in folgendem Satze ausdrücken:

Wenn u eine Lösung der Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung S_1 oder S_2, wenn ferner v eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

(*wobei u und v der auf die Functionaldeterminante bezüglichen Nebenbedingung entsprechend gewählt sind*) *so ist*

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

ein unbeschränkt integrables System und giebt eine vollständige Lösung der Differentialgleichung $r + f = 0$.

Die unter (2) entwickelten Sätze sind auch auf den Fall $\mu = 0$ übertragbar.

Unsere nächste Aufgabe wird es sein, die durch diese Methoden zu bestimmenden Lösungen der Differentialgleichung $r + f = 0$ in Bezug auf ihre Allgemeinheit zu untersuchen. Man sieht, wie schon oben bemerkt, auch ohne nähere Untersuchung, dass, wenn S_1 oder S_2 überhaupt integrabel ist, man immer *unendlich viele vollständige Lösungen* erhalten wird.

Anmerkung. — Diese Stelle wird am geeignetsten sein, um den Zusammenhang unserer bisherigen Entwicklungen mit früher bekannten Resultaten klarzulegen. Es sind hier, so viel ich weiss, nur zwei Arbeiten zu nennen, die schönen und wichtigen Abhandlungen von

G. Darboux: „Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre". (Annales de l'école normale supérieure, T. VII, 1870, p. 163—173) und

Hamburger: „Zur Theorie der Integration eines Systemes von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und n abhängigen Variabeln". (Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 93, 1882). Insbesondere der zweite Theil, pag. 201—214.

Darboux hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass für specielle Classen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung solche Differentialgleichungen k-ter Ordnung sich bilden lassen, deren allgemeinste, mit der gegebenen Gleichung gemeinschaftliche Lösung nicht wie sonst, höchstens willkürliche Constanten, sondern eine willkürliche Function enthält. Die bei Darboux ohne Beweis gegebenen Sätze erscheinen für $k = 2$ bei Hamburger als specielle Fälle aus der Theorie einer, gewissen Integrabilitätsbedingungen genügenden Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Hier erscheinen auch schon die Systeme S in einer Form, die mit der unsrigen im wesentlichen übereinstimmt. Aus ganz anderen Betrachtungen hervorgehend, zeigt sich jedoch a. a. O. nicht ihre volle Bedeutung für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2. O. Hamburger — sowie vor ihm Darboux — erhalten in dem Falle, dass die Systeme S integrabel sind, eine viel speciellere Lösung.

Nach den citirten Autoren müssten, um eine vollständige Lösung von $r + f = 0$ zu erhalten, S_1 und S_2 integrabel sein, und eine Lösung jedes dieser Systeme bestimmt werden; und um die allgemeine Lösung zu erhalten, müssten S_1 und S_2 je zwei unabhängige Lösungen besitzen. Nach unsern Methoden — ihre specielle Ausführung geschieht im nächsten Paragraphen — genügt es, wenn auch nur eines der Systeme S integrabel ist und man erhält aus einer Lösung desselben eine Lösung der Differentialgleichung $r + f = 0$ mit einer willkürlichen Function, also unendlich viele vollständige Lösungen. Be-

sitzt hingegen ein System S zwei von einander unabhängige Lösungen, so erhält man aus diesen die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung.

§ 5.

Discussion der Lösungen, die mit Hülfe der in § 4 entwickelten Methoden bestimmt werden können.

1. Aus der Mannigfaltigkeit der Lösungen, welche der gegebenen Differentialgleichung

$$r + f = 0$$

entsprechen, wird bekanntlich eine bestimmte Lösung durch die Anfangswerthe von z und p ausgesondert, d. h. durch die Bestimmung der Functionalwerthe, die z und p annehmen, wenn für x das im allgemeinen gleichfalls beliebige x_0 gesetzt wird. Seien diese Anfangswerthe:

$$(z)_{x=x_0} = \zeta, \qquad (p)_{x=x_0} = \pi,$$

so wird noch:

$$(q)_{x=x_0} = \zeta', \qquad (s)_{x=x_0} = \pi',$$
$$(t)_{x=x_0} = \zeta'',$$

wo ζ', ζ'', π' nach y genommene Differentialquotienten bezeichnen. Enthalten ζ und π noch willkürliche Constanten, so erhält man allgemeinere Lösungen, insbesondere im Falle von 5 willkürlichen Constanten, im Allgemeinen vollständige Lösungen.

Wenn

$$
\begin{aligned}
& r + f = 0, \\
(1) \qquad & u(x, y, z, p, q, s, t) = a_1, \\
& v(x, y, z, p, q, s, t) = a_2
\end{aligned}
$$

ein unbeschränkt integrables System bilden, so erhält man leicht die das zugehörige vollständige Integral definirenden Anfangswerthe, wenn man in den letzten beiden Gleichungen x_0 für x setzt. Es ist dann:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & u(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = a_1, \\
& v(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = a_2
\end{aligned}
$$

ein simultanes System *totaler* Differentialgleichungen, erster Ordnung für π, zweiter Ordnung für ζ, aus welchen sich immer ζ und π in der Form:

$$\zeta = \zeta(y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$
$$\pi = \pi(y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

bestimmen lassen.

Ein Ausnahmefall kann bei der Integration dieses Systems nicht eintreten. Da die Functionaldeterminante von u und v nach s und t

nicht verschwindet, kann auch die Functionaldeterminante nach ζ' und π' nicht für jedes x_0 null werden. Man erhält höchstens gewisse Zahlenwerthe des x_0, die auszuschliessen sein werden.

Umgekehrt bestimmen immer zwei Relationen von der Form (2) eine vollständige Lösung der Gleichung $r + f = 0$, und damit auch die zugehörigen unbeschränkt integrabeln Systeme.

2. *Sei nun u_1 eine Lösung des als integrabel vorausgesetzten Systems S_1, die wenigstens s oder t enthält;* dann bildet

$$r + f = 0, \quad u = a_1$$

ein im Allgemeinen*) unbeschränkt integrables System mit jeder Gleichung der Form:

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) = a_2,$$

wo φ eine willkürliche Function, $\gamma_1 \equiv u_1$, und die γ bestimmte Functionen von x, y, z, p, q, s, t, zwischen denen keine von diesen Unbestimmten unabhängige Relation besteht. Wir können für $\gamma_1 \dots \gamma_5$ die im Anfang des § 2 charakterisirten Functionen $\alpha_1 \dots \alpha_5$ nehmen, so dass wenn in die Bildung des φ die Function γ_6 nicht eingeht, man immer dieselbe vollständige Lösung erhält.

Man kann in diesem Falle die zweite der zur Bestimmung von ζ und π dienenden Differentialgleichungen beliebig wählen, d. h. eine solche Function φ bestimmen, dass für $x = x_0$

$$\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_6) = v(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'')$$

wird, wo v eine beliebige Functionenform bedeutet.

Denn die Gleichungen

$$\gamma_i = \alpha_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

sind nach z, p, q, s, t lösbar und ihre Lösungen lauten in den schon früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} z &= F(x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5), \\ p &= F_x(x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5), \\ q &= F_y(x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5), \\ s &= F_{xy}(x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5), \\ t &= F_{yy}(x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5). \end{aligned}$$

Setzt man die so erhaltenen Werthe in

$$\gamma_6 = \gamma_6(x, y, z, p, q, s, t)$$

ein, so kann in dem für γ_6 erhaltenen Ausdruck nicht x und y fehlen, sonst wäre γ_6 eine Function von $\gamma_1 \dots \gamma_5$; es kann auch nicht y allein herausfallen, sonst wäre x eine Function der γ und $v \equiv x$ eine

*) D. h. wenn die Functionaldeterminante von u und φ nach s und t nicht verschwindet.

Lösung des zu Grunde liegenden Systems ((2) in § 3), dann wäre aber für das zugehörige u

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

welcher Fall von Beginn ab ausgeschlossen wurde. Man erhält demnach aus obiger Relation:

$$y = \Gamma(x, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6). \tag{4}$$

Setzt man nun in (3) und (4) x_0 für x, so erhält man

$$\zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'', y$$

ausgedrückt durch

$$\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma_4^0, \gamma_5^0, \gamma_6^0,$$

wo γ_i^0 der entsprechende Anfangswerth von γ_i, und es geht endlich

$$v(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') \equiv v_0(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = a_2$$

über in:

$$\varphi(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma_4^0, \gamma_5^0, \gamma_6^0) = a_2.$$

Soll also die zweite der zur Bestimmung der Anfangswerthe dienenden Differentialgleichungen $v_0 = a_2$ sein, so wird φ in der eben entwickelten Weise zu wählen sein.

3. Es wird noch zu zeigen sein, dass *unsere Methoden jede Lösung geben, deren Anfangswerthe der totalen Differentialgleichung $v_0 = Const.$ genügen*, insbesondere also nicht nur die entsprechenden particulären, sondern auch die eventuell vorhandenen singulären Lösungen.

Ist $r + f = 0$, $u = a_1$, $v = a_2$ ein unbeschränkt integrables System, so wird jede Lösung der Differentialgleichung $r + f = 0$, deren Anfangswerthe den Differentialgleichungen $u_0 = a_1$, $v_0 = a_2$ genügen, auch die Gleichungen $u = a_1$, $v = a_1$ befriedigen, also eine Lösung des Systems sein.

Schreiben wir nämlich das System in nach r, s, t gelöster Form:

$$r = R, \quad s = S, \quad t = T,$$

so ist dasselbe äquivalent mit dem Mayer'schen Systeme:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= R, & \frac{dp}{dy} &= S, \\ \frac{dq}{dx} &= S, & \frac{dq}{dy} &= T, \\ \frac{dz}{dx} &= p, & \frac{dz}{dy} &= q, \end{aligned} \tag{5}$$

das gleichfalls unbeschränkt integrabel ist. Irgendwelche Lösung dieses Systems erhalten wir, wenn die Anfangswerthe von z, p, q (als Functionen von y) ζ, π, ζ' für $x = x^0$ so bestimmt werden, dass sie dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d\pi}{dy} = (S)_{x=x_0},$$
$$\frac{d\zeta'}{dy} = (R)_{x=x_0},$$
$$\frac{d\zeta}{dy} = \zeta'$$

genügen. Man sieht unmittelbar, dass dieses System völlig mit den Gleichungen $u_0 = a_1$, $v_0 = a_2$ übereinstimmt. Die so erhaltenen Werthe für z, p, q genügen dem System (5), oder endlich z den partiellen Differentialgleichungen $r + f = 0$, $u = a_1$, $v = a_2$. — Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Um also eine Lösung der Differentialgleichung $r + f = 0$ zu bestimmen, deren Anfangswerthe ζ und π der Gleichung $u_0 =$ Const. genügen, wird folgender Weg einzuschlagen sein:

Wir werden zuerst die dritte Gleichung des unbeschränkt integrabeln Systems aufstellen. Da $u_0 =$ Const. jedenfalls ζ' oder π' enthält, kann man als zweite Relation

$$\pi' - \psi(y) = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta' - \chi(y) = 0$$

wählen, wo ψ oder χ gegebene Functionen sind und damit die früher mit φ bezeichnete Function und schliesslich auch die dritte Gleichung $v = 0$ bestimmen. Bestimmt man nun jene Lösungen des Systems

$$\frac{dp}{dx} = R, \quad \frac{dq}{dx} = S, \quad \frac{dz}{dx} = p,$$

deren Anfangswerthe π, ζ', ζ sind, so ist die entsprechende z-Function die gesuchte Lösung der Differentialgleichung $r + f = 0$.

4. Mit u_1 ist auch $\omega(u_1)$, wo ω eine willkürliche Function bezeichnet, eine Lösung des Systems S_1; doch giebt $\omega(u_1) = C$ keine neuen Integrale, da diese Gleichung mit $u_1 = a_1$ äquivalent ist. Ist $\omega(u_1)$ die allgemeine Lösung des Systems S_1, so ist im bisherigen die Mannigfaltigkeit der aus S_1 ableitbaren Lösungen von $r + f = 0$ erschöpft.

Wenn jedoch das System S_1 zwei unabhängige Lösungen, u_1 und u_2 besitzt, so kann man mit Hülfe der entwickelten Methoden die allgemeine Lösung der Gleichung $r + f = 0$ aufstellen, d. h. die durch beliebige Anfangswerthe bestimmte Lösung entwickeln.

Dann nämlich genügt auch $\omega(u_1, u_2)$ dem System und die willkürliche Function ω kann immer so gewählt werden, dass

$$u \equiv \omega(u_1, u_2) = 0$$

für $x = x_0$ durch die beliebig gewählten Anfangswerthe ζ und π befriedigt werde. Sei:

$$u_1 = \sigma_1(x, y, z, p, q, s, t),$$
$$u_2 = \sigma_2(x, y, z, p, q, s, t),$$

dann wird für $x = x_0$:

$$(u_1)_{x=x_0} = s_1(y),$$
$$(u_2)_{x=x_0} = s_2(y),$$

und dann kann man ω leicht so wählen, dass

$$(\omega(u_1, u_2))_{x=x_0} = \omega(s_1(y), s_2(y)) = 0$$

werde. Wenn z. B. aus

$$s_1(y) = z$$

folgt:

$$y = i_1(z), \quad i_1 s_1(y) = y$$

setze man:

$$\tau(z) = s_2(i_1(z));$$

dann wird

$$\omega(u_1, u_2) = \tau(u_1) - u_2$$

die geforderte Eigenschaft besitzen, ohne dass *vor* Einsetzen der Anfangswerthe die Variabeln herausfielen. Denn wegen der Unabhängigkeit der Lösungen u_1 und u_2 kann nicht

$$\tau(u_1) = u_2$$

sein, während für $x = x_0$

$$s_2 i_1 s_1(y) = s_2(y)$$

wird.

Nach dieser Bestimmung der Function ω ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt, da es sich nur darum handelt, eine Lösung zu bestimmen, deren Anfangswerthe der Bedingung $u_0 = \text{Const.}$ genügen.

Die Zusammenfassung der bisherigen Resultate ergiebt die folgenden Sätze:

Man bilde die zur vorgelegten Differentialgleichung $r + f = 0$ gehörigen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, S_1 und S_2. Ist eines dieser Systeme integrabel, und eine seiner Lösungen

$$u = u(x, y, z, p, q, s, t),$$

dann kann man mit Hülfe partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, oder was dasselbe ist, totaler Differentialgleichungen, jede Lösung der Gleichung $r + f = 0$ bestimmen, deren Anfangswerthe:

$$(z)_{x=x_0} = \zeta, \quad (p)_{x=x_0} = \pi$$

der Relation:

$$u(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = \text{Const.}$$

genügen.

Hat ferner irgend eines der Systeme S_1 oder S_2 zwei von einander unabhängige Lösungen, so ist die Bestimmung einer durch beliebige

Anfangswerthe gegebenen Lösung von $r + f = 0$, d. h. der allgemeinen Lösung auf die Integration totaler Differentialgleichungen zurückgeführt.

Der Gang der Rechnung ist im Vorhergehenden vollständig entwickelt.

Es soll noch besonders betont werden, dass man aus den zwei unabhängigen Lösungen von S_1 oder S_2 durchaus nicht alle vollständige Lösungen, sondern alle particulären Lösungen in gewissen Schaaren vollständiger Lösungen zusammengefasst erhält. Eine nähere Untersuchung dieser Verhältnisse würde sich am besten an die von Lie begründete geometrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen anschliessen.

§ 6.

Allgemeine Theorie der vollständigen Lösungen. Zurückführung auf eine lineare partielle Differentialgleichung.

1. Aufgabe der allgemeinen Theorie wird es sein, eine solche Function u von x, y, z, p, q, s, t zu bestimmen, dass die partielle Differentialgleichung

$$u = a_1$$

durch eine vollständige Lösung der Gleichung $r + f = 0$ befriedigt werde. Ist u eine Lösung der Systeme S_1 oder S_2 so befinden sich unter den Lösungen von $u = a_1$ unendlich viele vollständige Lösungen der Gleichung $r + f = 0$, in jedem andern Falle kann die Gleichung $u = a_1$ höchstens eine vollständige Lösung von $r + f = 0$ liefern. Es sind nun jene Functionsformen des u zu bestimmen, für welche dies der Fall ist. In weiterer Verfolgung der bisher benutzten Methoden müssten wir nun die Bedingungen dafür entwickeln, dass das zur Bestimmung von u und v dienende System ((2) in § 3) in Bezug auf v, als unbekannte Function ein vollständiges System bilde. Man sieht, dass man unmittelbar mehrere Bedingungsgleichungen für u erhält, von denen jede einzelne eine partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung mit den unabhängigen Variabeln x, y, z, p, q, s, t darstellt. Die Aufstellung, noch mehr die Untersuchung des Zusammenhanges dieser Gleichungen führt zu ziemlich complicirten Rechnungen. Theils um diese zu vermeiden, theils um auch die ganze Theorie von einer zweiten, gleich wichtigen Seite darzustellen, soll zur Ableitung der linearen partiellen Differentialgleichung, welcher u genügen muss, im folgenden ein andrer Weg eingeschlagen werden.

Als Ausgangspunkt dient der folgende Satz, dessen ersten Theil wir schon aus der bisherigen Entwicklung kennen.

Sei eine vollständige Lösung von $r + f = 0$ zugleich eine Lösung der Gleichung $u = a_1$, ohne dass u den Systemen S_1 oder S_2 genügt;

dann giebt es nur eine vollständige Lösung der Gleichung $r + f = 0$, *welche diese Eigenschaft besitzt, und diese kann aus einem Systeme totaler Differentialgleichung auch ohne Aufstellung der dritten Gleichung des unbeschränkt integrabeln Systems* ($v = a_2$) *bestimmt werden.*

Wenn man die Gleichungen $r + f = 0$ und $u = a_1$ nach x und y differenzirt, und zur Bezeichnung der dritten Differentialquotienten folgende Bezeichnungen einführt:

$$d_1 = \frac{d^3 z}{dx^3}, \quad d_2 = \frac{d^3 z}{dx^2\, dy}, \quad d_3 = \frac{d^3 z}{dx\, dy^2}, \quad d_4 = \frac{d^3 z}{dy^3}$$

erhalten wir:

$$(1) \quad \begin{aligned}
&\left(\frac{df}{dx}\right) + d_1 + \frac{\partial f}{\partial s} d_2 + \frac{\partial f}{\partial t} d_3 = 0,\\
&\left(\frac{df}{dy}\right) + d_2 + \frac{\partial f}{\partial s} d_3 + \frac{\partial f}{\partial t} d_4 = 0,\\
&\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_2 + \frac{\partial u}{\partial t} d_3 = 0,\\
&\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3 + \frac{\partial u}{\partial t} d_4 = 0.
\end{aligned}$$

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

$$(2) \quad \begin{aligned}
-D_2 &= \begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dy}\right), & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{du}{dx}\right), & \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 \\ \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix}\\
&= \left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-D_3 &= \begin{vmatrix} 1, & \left(\frac{df}{dy}\right), & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s}, & \left(\frac{du}{dx}\right), & 0 \\ 0, & \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix}\\
&= -\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s},
\end{aligned}$$

$$
(2) \qquad -D_4 = \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \left(\frac{df}{dy}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial t}, & \left(\frac{du}{dx}\right) \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial s}, & \left(\frac{du}{dy}\right) \end{vmatrix}
$$

$$
= \left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s}\,\frac{\partial u}{\partial s}\right).
$$

Wenn nun $\Delta = 0$ ist, so enthalten die Gleichungen des linearen Systems (1) einen Widerspruch, und es existirt überhaupt keine gemeinschaftliche Lösung, oder es müssen auch D_2, D_3 und D_4 verschwinden. Die Bedeutung dieses Falls ist unmittelbar klar. $\Delta = 0$ sagt aus, dass die charakteristischen Gleichungen für $r + f = 0$ und $u = a_1$ eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen, und das Verschwinden der gesammten Ausdrücke Δ, D_2, D_3, D_4 bedeutet einfach, dass u den in § 4 aufgestellten Gleichungen, oder also einem der Systeme S_1 oder S_2 genügt (mit Inbegriff des Falles $\mu = 0$).

Wenn $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, kann Δ nur dann verschwinden, wenn auch $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ist, was also wieder nur auf die von Beginn ab ausgeschlossenen, s und t nicht enthaltenden u-Formen führt.

Wenn nun Δ nicht Null ist, und wir unter d_1, d_2, d_3, d_4 die Lösungen des Systems (1) verstehen, erhalten wir das folgende System von Differentialgleichungen:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&\frac{ds}{dx} = d_2, && \frac{ds}{dy} = d_3, \\
&\frac{dt}{dx} = d_3, && \frac{dt}{dy} = d_4, \\
&\frac{dp}{dx} = r, && \frac{dp}{dy} = s, \\
&\frac{dq}{dx} = s, && \frac{dq}{dy} = t, \\
&\frac{dz}{dx} = p, && \frac{dz}{dx} = q,
\end{aligned}
$$

Dieses System, wo noch r durch seinen Werth aus $r + f = 0$ zu ersetzen, ist unbeschränkt integrabel, und das daraus bestimmte z ist eine vollständige Lösung der Gleichung $r + f = 0$.

Man sieht, dass wenn z, p, q, s, t irgend ein System von Functionen ist, das den Gleichungen (3) genügt, die Gleichung

$$
\frac{dp}{dx} = r
$$

wegen des in den zwei letzten Zeilen von (3) ausgedrückten Zusam-

menhanges dieser Functionen zugleich aussagt, dass z der Differentialgleichung $r + f = 0$ genügt. Schon durch die Entstehung des Systems weiss man, dass $z = F$ (jene vollständige Lösung von $r + f = 0$, die zugleich der Gleichung $u = C$ genügt) und die daraus abzuleitenden Werthe von p, q, s und t das System befriedigen. Dieses muss also, da die Lösungen 5 Constanten enthalten, unbeschränkt integrabel sein. Es möge noch bemerkt werden, dass, wenn die Integrabilitätsbedingungen nicht identisch erfüllt wären, diese eine neue Relation zwischen x, y, z, p, q, s, t ohne willkürliche Constante ergäben, welche als partielle Differentialgleichung für z aufgefasst die Lösung $z = F$ besitzen würde. Da diese Gleichung, welche r nicht enthält, nicht mit $r + f = 0$ äquivalent sein kann, könnte also $z = F$ im Widerspruch mit den Voraussetzungen, gar keine vollständige Lösung sein. — Ebenso sieht man, dass, wenn die gemeinschaftlichen Lösungen von $r + f = 0$ und $u = a_1$ überhaupt keine vollständige Lösung der ersten Gleichung umfassen, das System (3) nicht unbeschränkt integrabel sein kann. Wir erhalten also folgenden Satz:

Ist Δ *von* 0 *verschieden, und* u *eine solche Function von* x, y, z, p, q, s, t, *dass für die aus den linearen Gleichungen* (1) *entnommenen Werthe von* d_2, d_3, d_4 *das System* (3) *unbeschränkt integrabel wird, so ist die aus* (3) *bestimmte und* 5 *willkürliche Constanten enthaltende Function* z *eine vollständige Lösung der Differentialgleichung* $r + f = 0$, *und zugleich eine Lösung von* $u = a_1$. *Genügt* u *dieser Bedingung nicht, so besitzt* $r + f = 0$ *und* $u = a_1$ *keine gemeinschaftliche Lösung, die in Bezug auf die erste Gleichung den Charakter einer vollständigen Lösung hätte.*

Die gesuchten Functionen u *sind daher aus der Bedingung zu bestimmen, dass das System* (3) *ein unbeschränkt integrables werde.*

Damit ist die Mannigfaltigkeit der vollständigen Lösungen, welche $r + f = 0$ entsprechen, erschöpft, da jede vollständige Lösung eine Gleichung $u = a_1$ liefert, und diejenigen u, die nicht aus der jetzt entwickelten Bedingung erhalten werden, wie wir gesehn, nothwendigerweise Lösungen der Systeme S_1 und S_2 sein müssen, also durch totale Differentialgleichungen bestimmt erscheinen.

2. Wir gehen nun zur Aufstellung der für die Bestimmung der u entscheidenden *Integrabilitätsbedingungen* über.

Die aus den beiden letzten Gleichungspaaren folgenden Bedingungen:

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$\frac{dt}{dx} - \frac{ds}{dy} = 0$$

sind nach den gegebenen Werthen dieser Differentialquotienten identisch

befriedigt. Ebenso erhält man aus dem dritten Gleichungspaar eine Identität. Es ist:

$$\frac{ds}{dx} - \frac{dr}{dy} \equiv \frac{ds}{dx} + \frac{df}{dy}$$
$$\equiv d_2 + \left(\frac{df}{dy}\right) + \frac{\partial f}{\partial s} d_3 + \frac{\partial f}{\partial t} d_4 = 0$$

nach der zweiten der die Functionen d definirenden Gleichungen (1).

Es bleiben also nur die aus den zwei ersten Gleichungspaaren fliessenden Integrabilitätsbedingungen, die unmittelbar in folgender Form erscheinen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx} d_3 - \frac{d}{dy} d_2 = 0, \\ \frac{d}{dx} d_4 - \frac{d}{dy} d_3 = 0. \end{aligned}$$

Zur Entwicklung dieser Gleichungen benützen wir die in (2) eingeführten Bezeichnungen. Dann ist:

$$d_i = \frac{D_i}{\Delta}, \quad (i = 2, 3, 4)$$

und die Bedingungen (4) werden in entwickelter Form:

$$T_3 \equiv \left(\Delta \frac{dD_3}{dx} - D_3 \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dD_2}{dy} - D_2 \frac{d\Delta}{dy}\right) = 0,$$
$$T_4 \equiv \left(\Delta \frac{dD_4}{dx} - D_4 \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dD_3}{dy} - D_3 \frac{d\Delta}{dy}\right) = 0,$$

in welchen Formeln bei der Differentiation nach x und y die Differentialquotienten von z, p, q, s, t durch ihre Werthe aus (3) zu ersetzen sind, also die Operationen $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dy}$ eigentlich folgende Bedeutung haben:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - f \frac{\partial}{\partial p} + s \frac{\partial}{\partial q} + d_2 \frac{\partial}{\partial s} + d_3 \frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{d}{dy} &= \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + s \frac{\partial}{\partial p} + t \frac{\partial}{\partial q} + d_3 \frac{\partial}{\partial s} + d_4 \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

In den Gleichungen $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ ist eigentlich der Nenner Δ^2 weggelassen; dass hiedurch die Lösungen der Gleichung $\Delta = 0$ eventuell neu hinzutreten, ist nicht wesentlich, da die Bedeutung dieser Lösungen schon vollständig klargestellt ist. Diese Lösungen $\Delta = 0$ spielen eine analoge Rolle, wie die Lösungen $u =$ Const. jener Resolvente, die bei der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung auftritt.

Bei der Entwicklung von T_3 und T_4 fällt der Nenner Δ, der bei Ausführung der Operationen $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dy}$ noch auftreten könnte, ganz

heraus. Dies ist im ersten und dritten Gliede unmittelbar klar. Im zweiten und vierten Gliede tritt der Nenner Δ mit den d in der That auf, aber diese Glieder enthalten zusammengefasst den Factor

$$D_3^2 - D_2 D_4,$$

der, wie die Entwicklung dieses Ausdrucks zeigt, immer durch Δ theilbar ist.

Die Gleichungen (4) *ergeben demnach zur Bestimmung von u lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den unabhängigen Variabeln x, y, z, p, q, s, t, welche die unbekannte Function selbst nicht enthalten. Der gleich* 0 *gesetzte Ausdruck ist eine ganze Function sämmtlicher Differentialquotienten, und linear in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten.*

3. Für die weitere Entwicklung ist es von grundlegender Bedeutung, dass *die zwei für u erhaltenen partiellen Differentialgleichungen durch eine einzige ersetzt werden können. Zum Beweise dient die Identität:*

$$\frac{\partial u}{\partial s} T_3 + \frac{\partial u}{\partial t} T_1 = 0, \tag{6}$$

deren Richtigkeit zuerst gezeigt werden soll.

Für den Fall, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$ *nicht Null ist*, erhält man aus (1)

$$-d_4 = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3}{\frac{\partial u}{\partial t}},$$

$$-d_3 = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_2}{\frac{\partial u}{\partial t}}.$$

Die Differentialquotienten dieser Ausdrücke erhält man mit Benutzung von (1) leicht in folgender Form:

$$(7) \quad \begin{aligned} -\frac{d}{dx} d_4 &= \frac{\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 \frac{d}{dx} \frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial t}}, \\ -\frac{d}{dy} d_3 &= \frac{\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_2\right] + d_2 \frac{d}{dy} \frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial t}} \end{aligned}$$

wo noch, wie unter (6) in § 1 festgesetzt wurde wenn der Werth von r aus $r + f = 0$ eingesetzt wird:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p - \frac{\partial u}{\partial p} f + \frac{\partial u}{\partial q} s,$$

(8)

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial p} s + \frac{\partial u}{\partial q} t.$$

Die Ausführung der Differentiationen zeigt nun unmittelbar, dass:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial d_3}{\partial x},$$

$$p\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 p \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right) - s\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} p \frac{\partial d_3}{\partial z},$$

$$-f\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] - d_4 f \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dy}\left(-f\frac{\partial u}{\partial p}\right) + \frac{\partial u}{\partial p}\frac{df}{dy} - \frac{\partial u}{\partial s} f \frac{\partial d_3}{\partial p},$$

(9) $$s\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 s \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dy}\left(s\frac{\partial u}{\partial q}\right) + s\frac{\partial u}{\partial z} - d_3\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial s} s \frac{\partial d_3}{\partial q},$$

$$d_2\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 d_2 \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dy}\left(d_2\frac{\partial u}{\partial s}\right) + d_2\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial s}\frac{d}{dy}d_2 + \frac{\partial u}{\partial s} d_2 \frac{\partial d_3}{\partial s},$$

$$d_3\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 d_3 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = d_3\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + d_3\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial s} d_3 \frac{\partial d_3}{\partial t}.$$

Addirt man diese Ausdrücke unter Berücksichtigung der Bedeutung von $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)$ und $\left(\frac{d}{dy}\right)$, zieht man hiebei noch in Betracht, dass auf der rechten Seite der Coefficient von $\frac{\partial u}{\partial p}$:

$$\frac{df}{dy} + d_2 = \left(\frac{df}{dy}\right) + \frac{\partial f}{\partial s} d_3 + \frac{\partial f}{\partial t} d_4 + d_2$$

nach der zweiten Gleichung des Systems (1) verschwindet, so erhält man das Resultat:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_2\right] + d_3\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{dx} d_3 - \frac{d}{dy} d_2\right),$$

oder auch mit Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen in (1):

$$(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{dx}\,d_3 - \frac{d}{dy}\,d_2\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d}{dx}\,d_4 - \frac{d}{dy}\,d_3\right) = 0.$$

Die soeben erhaltene Relation bleibt aber auch richtig, wenn $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ *ist.* Dann fällt das zweite Glied fort, und unter der eben erwähnten Bedingung ist in der That identisch:

$$\frac{d}{dx}\,d_3 - \frac{d}{dy}\,d_2 = 0.$$

Denn es kann nun weder $\frac{\partial u}{\partial s}$ noch $\frac{\partial f}{\partial t}$ verschwinden, da sonst auch $\Delta = 0$ wäre, und so wird nun:

$$-\,d_2 = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}},$$

$$-\,d_3 = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}},$$

$$-\,d_4 = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}\,\frac{\partial f}{\partial t}}.$$

Und hieraus:

$$-\frac{d}{dy}\,d_2 = \frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + d_2\,\frac{d}{dy}\,\frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial s}},$$

$$-\frac{d}{dx}\,d_3 = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + d_3\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}}.$$

Die unter (9) abgeleiteten Identitäten sind aber für jedes u gültig, das keine Lösung von $\Delta = 0$ ist, also auch wenn u kein t enthält; in diesem Falle ergiebt die Addition:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\,d_3\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\,d_2\right)$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{dx}\,d_3 - \frac{d}{dy}\,d_2\right),$$

oder wenn man die Differentialquotienten der Producte entwickelt und kürzt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + d_3\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + d_2\,\frac{d}{dy}\,\frac{\partial u}{\partial s},$$

was mit der oben hingeschriebenen Identität übereinstimmt.

Die Relation (10) besteht also für jedes u, das keine Lösung der Gleichung $\Delta = 0$ ist. Führen wir nun für d_i wieder $\frac{D_i}{\Delta}$ ein, lassen den Nenner Δ^2, der nicht verschwindet, weg, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial s} T_3 + \frac{\partial u}{\partial t} T_1 = 0$$

für *jedes* u; denn die bisher ausgeschlossenen Lösungen der Gleichung $\Delta = 0$ genügen, wie unmittelbar zu sehn, auch dieser Gleichung, da dann T_3 und T_1 verschwinden.

Es ist demnach das „Polynom" T_1 durch $\frac{\partial u}{\partial s}$, und ebenso T_3 durch $\frac{\partial u}{\partial t}$ theilbar. Setzt man also:

$$R = \frac{T_1}{\frac{\partial u}{\partial s}} = -\frac{T_3}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

so werden die beiden, für u erhaltenen Differentialgleichungen:

$$T_1 = 0, \quad T_3 = 0$$

auch so geschrieben werden können:

$$\frac{\partial u}{\partial s} R = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} R = 0,$$

und, da solche Functionen u, die weder s noch t enthalten, von vornherein ausgeschlossen sind, *wird es für die gesuchten Lösungen u nothwendig und hinreichend sein, dass sie solche Lösungen der Differentialgleichung $R = 0$ seien, die nicht zugleich der Gleichung $\Delta = 0$ Genüge leisten.*

Hierin ist R eine ganze Function sämmtlicher Differentialquotienten von u, und zugleich eine lineare Function der zweiten Differentialquotienten dieser Grösse.

4. Als nothwendige Ergänzung der bisherigen Betrachtungen soll nun noch die Bedeutung jener Lösungen der Differentialgleichung $R = 0$ festgestellt werden, die zugleich der Differentialgleichung $\Delta = 0$ genügen. Wir gehn zu diesem Zwecke auf jenes System zurück ((2) in § 3) welches die Functionen u und v ursprünglich definirte.

Ist $\Delta = 0$, so haben die charakteristischen Gleichungen von $r + f = 0$ und $u = a_1$ wieder eine gemeinschaftliche Wurzel. Wenn wir die erste der citirten Gleichungen mit $\frac{\partial u}{\partial s}$, die zweite mit $\frac{\partial u}{\partial t}$ multipliciren und abziehen, so verschwindet wegen $\Delta = 0$ der Coefficient von $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, und wir erhalten:

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial s}\left[\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)\right] - \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{du}{dx}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial s}$$
$$+\left\{\frac{\partial u}{\partial s}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\right] - \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

oder wenn wir wieder die gemeinschaftliche Wurzel der charakteristischen Gleichungen, μ mit Hülfe der Relationen

$$\frac{\partial u}{\partial s}\mu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \mu^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\mu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

einführen:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial v}{\partial s}\mu + \frac{\partial v}{\partial t}\right] = 0.$$

Es wird also in diesem Falle einer der drei Factoren dieses Ausdrucks Null. Ist dies der erste Factor $\frac{\partial u}{\partial s}$, so muss wegen $\Delta = 0$ auch $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ sein, und die entsprechende Lösung wird unbrauchbar, weil sie weder s noch t enthält. Das Verschwinden des zweiten Factors, mit $\Delta = 0$ zusammengestellt, zeigt, dass dann u eine Lösung der Systeme S_1 oder S_2 ist, ein Fall, dessen Bedeutung schon früher vollständig dargelegt wurde. Im dritten Falle endlich erhalten wir ein u, das deshalb unbrauchbar ist, weil die Functionaldeterminante von u und v nach s und t verschwindet, also die Gleichungen $u = a_1$, $v = a_2$ nicht nach s und t aufgelöst werden können.

Demnach wird die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $R = 0$ als die vollständige, durch Elimination von v entstehende „Resultante" des für die Functionen u und v aufgestellten Gleichungssystems zu betrachten sein, und die nach dem bisherigen vollständig auszuschliessenden Lösungen dieser Gleichungen (die nämlich nur die erste Gleichung der Systeme S_1 oder S_2 befriedigen) sind einfach jene, für welche die Functionaldeterminante von u und v nach s und t Null ist.

5. Die für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gewonnenen Resultate sind nun definitiv zusammengestellt, die folgenden:

Es sei gegeben die Gleichung

$$r + f = 0;$$

dann bilde man mit Hülfe der unter (2) *definirten Ausdrücke:* Δ, D_2, D_3, D_4, *die Gleichung:*

$$R = \frac{\left(\Delta\frac{dD_3}{dx} - D_3\frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta\frac{dD_2}{dy} - D_2\frac{d\Delta}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

$$= \frac{\left(\Delta\frac{dD_4}{dx} - D_4\frac{dD}{dx}\right) - \left(\Delta\frac{dD_3}{dy} - D_3\frac{d\Delta}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}} = 0,$$

dieselbe ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. *Ordnung für* u, *mit den unabhängigen Variabeln* x, y, z, p, q, s, t.

Jede particuläre Lösung dieser Gleichung, die nicht zugleich der Differentialgleichung erster Ordnung $\Delta = 0$ genügt, giebt eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichung. Bestimmt man nämlich aus (1) *die zugehörigen Werthe von d_2, d_3, d_4, so wird das System* (3) *unbeschränkt integrabel, und die sich aus diesem ergebende Function z (mit* 5 *willkürlichen Constanten) ist eine vollständige Lösung der Gleichung*

$$r + f = 0.$$

Ist u eine Lösung der Gleichung $\Delta = 0$, die zugleich der zweiten Gleichung des entsprechenden Systems S genügt, so geben die Methoden der §§ 4 *und* 5 *unendlich viele vollständige Lösungen der Gleichung*

$$r + f = 0.$$

Diese beiden Fälle geben die sämmtlichen vollständigen Lösungen der Gleichung $r + f = 0$; der Fall wo u eine Lösung von $\Delta = 0$ ist, ohne zugleich der zweiten Gleichung des entsprechenden Systems S zu genügen, giebt keine vollständige Lösung. Versucht man in diesem Falle aus dem System (2) *in §* 3 *zugehörige Functionen v zu bestimmen, so gelangt man nur zu solchen Formen, für welche die Gleichungen $u = a_1$, $v = a_2$ sich nicht nach s und t auflösen lassen.*

Dass in dem letzten Fall die Gleichung $u = a_1$ keine Lösung geben kann, ersieht man schon daraus, dass die Gleichungen des Systems (1) einen Widerspruch enthalten.

Der Fall, wo u eine Lösung des Systems S_1 oder S_2 ist, kann auch unabhängig von § 4 und § 5 aus der jetzt entwickelten Theorie erledigt werden. — In diesem Falle wird das System (1) durch einen beliebigen Werth des d_4 und dazu gehörige bestimmte Werthe des d_2 und d_3 befriedigt werden. Die dritte und vierte Gleichung sind immer von einander unabhängig, sonst müsste $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ zugleich Null sein. Es wird also immer die zweite Gleichung eine nothwendige Folge der beiden letzten sein. Die Relation (10)

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{dx} d_3 - \frac{d}{dy} d_2\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d}{dx} d_4 - \frac{d}{dy} d_3\right) = 0$$

ist der Ableitung nach richtig, sobald d_2, d_3, d_4 Lösungen des Systems (1) sind, also auch im Fall $\Delta = 0$, wenn nur solche Lüsungen überhaupt existiren.

Damit also (2) unbeschränkt integrabel sei, wird es genügen, d_4 so zu bestimmen, dass

$$\frac{d}{dx} d_4 - \frac{d}{dy} d_3 = 0 \tag{11}$$

sei; die zweite Bedingung ist dann von selbst erfüllt, da $\frac{\partial u}{\partial s}$ nicht Null werden kann, ohne dass auch $\frac{\partial u}{\partial t}$ verschwindet.

Die Relation (11) bestimmt d_4. Setzt man nämlich aus (1) die Werthe:

$$(12)\quad \begin{aligned} -d_3 &= \frac{\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} d_4}{\frac{\partial u}{\partial s}}, \\ -d_2 &= \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\right) d_4}{\frac{\partial u}{\partial s}}, \end{aligned}$$

in (11) ein, indem man bei der Ausführung der Operationen $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ abermals d_2, d_3 durch ihre Werthe ersetzt, so erhält man *eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den unabhängigen Variabeln x, y, z, p, q, s, t, welcher d_4 genügen muss.*

Für jeden solchen Werth von d_4, mit dem zugehörigen d_2 und d_3, wird das System (3) unbeschränkt integrabel und liefert eine vollständige Lösung von $r + f = 0$. —

6. Es soll noch schliesslich festgestellt werden, auf welche Weise man eine *bestimmte* vollständige Lösung der Gleichung $r + f = 0$ erhält; d. h. wir beantworten noch die Frage: *Wie sind die Anfangswerthe bei der Integration der Resolvente für u, resp. u und d_4 zu wählen, um eine durch gegebene Anfangswerthe fixirte vollständige Lösung von $r + f = 0$ zu erhalten?*

Die Anfangswerthe der vollständigen Lösung, werden wie im § 5 am besten, durch Gleichungen

$$(13)\quad \begin{aligned} u_0 &\equiv u(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = a_1, \\ v_0 &\equiv v(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = a_2 \end{aligned}$$

bestimmt; diese Form ist die geeignetste, weil diese, gerade so wie das unbeschränkt integrable System die Constanten a_3, a_4, a_5 explicite gar nicht enthält, also auch das Resultat von einer Transformation dieser Constanten sogleich unabhängig erscheint.

Wir erhalten eine particuläre Lösung von $R = 0$, wenn wir die Anfangswerthe von u und $\frac{\partial u}{\partial x}$ für $x = x_0$ bestimmen. Seien diese

$$\begin{aligned} (u)_{x=x_0} &= U\,(y, z, p, q, s, t), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} &= U'\,(y, z, p, q, s, t). \end{aligned}$$

Es muss demnach

$$U = u(x_0, y, z, p, q, s, t)$$

sein. Zur Bestimmung von U' gehen wir auf die Gleichung $v = a_2$ zurück. Um die durch (13) fixirte vollständige Lösung zu erhalten, muss

$$(v)_{x=x_0} \equiv v(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') \equiv v_0$$

sein. Wenn man in dem für u und v zuerst erhaltenen Systeme ((2) in § 3) auch $x = x_0$ setzt, so wird für $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ nun U' und $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}$ zu setzen sein; für die übrigen Differentialquotienten hat man einfach die entsprechenden Differentialquotienten von U und v_0 zu setzen, indem man zugleich

$$z,\ p,\ q,\ s,\ t$$

mit

$$\zeta,\ \pi,\ \zeta',\ \pi',\ \zeta''$$

vertauscht. Nach Elimination von $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}$ erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von U' aus den bekannten Functionen U und v_0, womit die Aufgabe gelöst ist.

Eine Ausnahme findet bei dieser Bestimmungsweise nur dann statt, wenn die Elimination von $\frac{\partial v}{\partial x}$ nicht ausführbar ist. Mit eventueller Ausnahme einzelner Werthe von x_0 findet dies dann und nur dann statt, wenn u eine Lösung eines der Systeme S ist. — In diesem Falle ergiebt die Gleichung $v_0 = a_2$ nach y differenzirt, eine lineare Gleichung zur Bestimmung von π'' oder ζ''', da v_0 wenigstens eine der Grössen π', ζ'' enthält. Ebenso differenziren wir $u_0 = a_2$ und erhalten zwei Gleichungen, die sich immer nach π'' und ζ''' auflösen lassen, da sonst die Functionaldeterminante von u_0, v_0 nach π', ζ'' verschwindet und die Gleichungen (13) dann überhaupt keine vollständige Lösung bestimmen.

Für $x = x_0$ wird nun $d_4 = \frac{dt}{dy}$ nichts anderes als ζ'''; wenn also in der angedeuteten Weise

$$\zeta''' = \sigma(y,\ \zeta,\ \pi,\ \zeta',\ \pi',\ \zeta''),$$

wird in der Differentialgleichung für d_4 jene particuläre Lösung zu nehmen sein, deren Anfangswerth:

$$(d_4)_{x=x_0} = \sigma(y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t).$$

U' und damit auch u, das noch vor d_4 zu bestimmen ist, wird gegeben sein, da jetzt u die Lösung zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ist, deren jede U' aus U und dessen Differentialquotienten ergiebt.

Die Discussion dieses letzteren Falles wird sich übrigens nach den Methoden des § 5 einfacher gestalten.

§ 7.

Verallgemeinerung des Begriffs der vollständigen Lösung.

1. Die Betrachtungen dieses Abschnitts beziehen sich auf partielle Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit 2 unabhängigen Variabeln, können jedoch ebenso auf Gleichungen übertragen werden, in denen die Anzahl der letzteren eine beliebige ist. Zur allgemeinen Bezeichnung der Differentialquotienten sei

$$\frac{d^{i+k} z}{d x^i \, d y^k} = p_{ik},$$

hiernach also auch $p_{00} = z$; neben diesen Zeichen sollen aber, um den Zusammenhang zu erhalten, z, p, q, r, s, t gebraucht werden.

Als vollständige Lösung der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, \ldots, p_{n0}, \ldots, p_{0n}) = 0$$

bezeichnen wir ein derart als Function von x, y und gewissen willkürlichen Constanten bestimmtes

$$z = F(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_N),$$

das die Gleichung $F = 0$, aber keine andere von den willkürlichen Constanten a freie partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen x, y, z befriedigt).*

Im Gegensatz zur gewöhnlichen Definition ist hier jene Festsetzung weggelassen, dass die Anzahl der willkürlichen Constanten in der vollständigen Lösung gleich der Anzahl der vorhandenen Differentialquotienten sei, nämlich

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1.$$

Dass die Zahl der willkürlichen Constanten in einer vollständigen Lösung keinesfalls kleiner sein kann, ist unmittelbar einzusehen; sie kann jedoch, bei der gegebenen erweiterten Definition grösser sein. *Die vollständige Lösung sei vom k^{ten} Range, wenn die Anzahl der willkürlichen Constanten*

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 + k$$

ist, so dass unsere vollständige Lösung vom Range 0 mit der gewöhnlich

*) oder keiner Relation $F = 0$ genügt, die als Relation zwischen den Unbestimmten p_{ik} gefasst, nicht dieselbe Mannigfaltigkeit definirt, wie $F = 0$. Diese, gewöhnlich weggelassene Bestimmung ist nothwendig; wenn man nicht die ganze Theorie der partiellen Differentialgleichungen auf ganze *und irreductible* Functionen F beschränken will. Allerdings genügt die Theorie nur im Falle ganzer F allen Anforderungen der Präcision, da die Existenz der Lösungen nur für diesen Fall bewiesen ist, und in jedem anderen Falle die Ausführung gewisser Operationen (Eliminationen, u. s. w.) ziemlich hypothetisch wird.

so genannten vollständigen Lösung (im engeren Sinne des Wortes) *übereinstimmt.*

Es ist hierbei natürlicherweise vorausgesetzt, dass durch passende Bezeichnungen die willkürlichen Constanten schon auf die kleinste mögliche Zahl gebracht sind, dass also die N Constanten nicht ausschliesslich in $N-l$ aus den Constanten zusammengesetzten Ausdrücken vorkommen. In diesem Falle wäre die Anzahl der wirklich auftretenden willkürlichen Constanten nicht N, sondern nur $N-l$.

Die Berechtigung zu einer solchen Erweiterung des Begriffs der vollständigen Lösung, die übrigens wenigstens für die Gleichungen erster Ordnung von Jacobi herrührt*), zeigt sich schon dadurch, dass die charakteristische Eigenschaft der im engeren Sinne genommenen vollständigen Lösungen auch bei diesen neuen Formen erhalten bleibt. Wir haben folgenden Satz:

Sei $z=\varphi$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung $\mathfrak{F}=0$, und $z=F$ eine vollständige Lösung, dann kann man durch Variation der Constanten, d. h. indem man an die Stelle von $a_1, \ldots, a_N$ gewisse Functionen von x und y setzt, immer F in φ überführen, und zwar so, dass zugleich für alle Differentialquotienten der ersten bis n^{ten} Ordnung:

$$\frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i\,dy^k}=\frac{\partial^{i+k}F}{\partial x^i\,\partial y^k},$$

$$(i+k\leqq n).$$

Sei p_{ik} irgend ein in $\mathfrak{F}$ wirklich enthaltener Differentialquotient; dann kann man die Gleichung $\mathfrak{F}=0$ in gelöster Form

$$p_{ik}=H(x, y, \ldots, p_{\lambda\mu}, \ldots)$$

schreiben. Es ist nun immer möglich das System

$$(1)\qquad \begin{gathered} \varphi=F, \\ \frac{d\varphi}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^n\varphi}{dx^n}=\frac{\partial^n F}{\partial x^n}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dy^n}=\frac{\partial^n F}{\partial y^n}, \end{gathered}$$

in welchem die Gleichung

$$\frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i\,dy^k}=\frac{\partial^{i+k}F}{\partial x^i\,\partial y^k}$$

weggelassen wurde, nach

$$\nu=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$$

*) Vgl. z. B. die nachgelassene Abhandlung „Ueber die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung", in welcher Jacobi auch vollständige Lösungen mit „überzähligen" willkürlichen Constanten betrachtet.

der Grössen a aufzulösen; im entgegengesetzten Falle existirte eine Differentialgleichung der n^{ten} oder niederer Ordnung, welcher F genügt, die von der gegebenen Gleichung unabhängig sein muss, da sie p_{ik}, das in $\mathfrak{F}$ auftritt, gar nicht enthält. Man kann demnach in (1) z. B. $a_{\nu+1}, \ldots, a_N$ beliebig wählen und erhält dann zugehörige bestimmte Werthe für $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

Dann folgt aber wegen

$$\frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i\,dy^k} = H\left(x, y, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \ldots\right)$$

und

$$\frac{\partial^{i+k}F}{\partial x^i\,\partial y^k} = H\left(x, y, \varphi, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \ldots\right)$$

endlich auch:

$$\frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i\,dy^k} = \frac{\partial^{i+k}F}{\partial x^i\,\partial y^k},$$

und damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

2. Das Wesentliche bei dieser Definition der vollständigen Lösung liegt darin, dass eine solche Lösung für sich allein die Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ aus der Gesammtheit der partiellen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung heraushebt und bestimmt.

Eine ähnliche Begriffsbestimmung ist nun für jene Classe von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung möglich, die nicht alle Differentialquotienten von z enthält, so dass von den p_{ik} eine bestimmte Reihe dieser Grössen:

$$P_1, P_2, \ldots, P_m$$

fehlt.

Ist auch $\mathfrak{F} = 0$ eine solche Gleichung, so nennen wir $z = F$ eine in Bezug auf die $P_1, \ldots, P_m$ nicht enthaltende Classe von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung relative vollständige Lösung, wenn dieselbe keiner andern in diese Classe gehörigen Differentialgleichung genüge leistet.

Eine Gleichung $\mathfrak{F}' = 0$ soll wieder als von $\mathfrak{F} = 0$ verschieden angenommen werden, wenn $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ nicht dieselbe Mannigfaltigkeit aus den Werthesystemen der Unbestimmten p_{ik} herausheben.

Es ist unmittelbar klar, dass eine solche relative vollständige Lösung wenigstens

$$\nu' = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - m - 1$$

willkürliche Constanten enthalten muss, und *die Lösung soll wieder als relative vollständige Lösung k^{ten} Ranges bezeichnet werden, wenn die Anzahl der Constanten*

$$N = \nu' + k$$

ist. Es gilt für diese Lösungen dann ein dem unter (1) angeführten

ganz analoger Satz, wenn nur statt *aller* Differentialquotienten, wieder die Reihe der in $\mathfrak{F}$ zugelassenen p_{ik} gesetzt wird, also die $P_1, P_2, \ldots, P_m$ ausgelassen werden.

In dieser Auffassung wird z. B. die im vorhergehenden betrachtete vollständige Lösung von $r+f=0$ zugleich eine relative vollständige Lösung der Gleichung $u=a_1$ in Bezug auf jene Classe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die den Differentialquotienten r nicht enthalten.

§ 8.

Allgemeine Theorie der vollständigen Lösungen höheren Ranges. Zurückführung auf eine lineare partielle Differentialgleichung.

1. Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung sei wieder in der Form

$$(1) \qquad r+f(x,\,y,\,z,\,p,\,q,\,s,\,t)=0$$

gegeben. *Wenn diese Gleichung irgend eine Lösung mit der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung*

$$\mathfrak{F}(x,\,y,\,z,\,p,\,q,\,r,\,s,\,t,\ldots,p_{n0},\ldots,p_{0n})=0$$

gemeinschaftlich besitzt, so genügt diese Lösung immer auch einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von specieller Form, in welcher aus der Reihe der k^{ten} Differentialquotienten immer nur die beiden letzten auftreten, die wir also in folgender Weise schreiben können:

$$u(x,\,y,\,z,\,p,\,q,\,s,\,t,\,p_{12},\,p_{03},\ldots,p_{1,n-1},\,p_{0n})=0.$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{F}=0$ können wir nämlich mit Hülfe der Gleichung $r+f=0$ und der aus ihr durch Differentiation entstehenden die Grössen r; p_{30}, p_{21}, und allgemein:

$$p_{k0},\,p_{k-1,1},\ldots,p_{2,k-2}$$

eliminiren. Zur Elimination der in der letzten Zeile stehenden Grössen erhalten wir durch $\overline{k-2}$-malige Differentiation aus $r+f=0$:

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)+p_{k,0}+\dfrac{\partial f}{\partial s}p_{k-1,1}+\dfrac{\partial f}{\partial t}p_{k-2,2}=0,\\[2ex] \left(\dfrac{d^{k-2}f}{dx^{k-3}dy}\right)+p_{k-1,1}+\dfrac{\partial f}{\partial s}p_{k-2,2}+\dfrac{\partial f}{\partial t}p_{k-3,3}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\dfrac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right)+p_{2,k-2}+\dfrac{\partial f}{\partial s}p_{1,k-1}+\dfrac{\partial f}{\partial t}p_{0,k}=0, \end{cases}$$

wo allgemein $\left(\dfrac{d^{r+s}f}{dx_r\,dy^s}\right)$ *den entsprechenden vollständigen Differential-*

quotienten von f bedeutet mit Auslassung jener Glieder, in denen die $r+s+2^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z, d. h. die Grössen $p_{i,r+s+2-i}$ auftreten.

Es wird unsere Aufgabe sein, *solche Formen u zu bestimmen, dass die Gleichungen*

$$r+f=0 \quad \textit{und} \quad u=a_1$$

eine gemeinschaftliche vollständige Lösung besitzen.

Es ist dies natürlich so zu verstehen, dass die gesuchte vollständige Lösung von höherem Range in Bezug auf die Gleichung $r+f=0$ sei, während dieselbe mit Rücksicht auf die Gleichung $u=a_1$ als relative vollständige Lösung zu betrachten sein wird in Bezug auf jene Classe von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, die aus der Reihe der k^{ten} Differentialquotienten immer nur $p_{1,k-1}$ und $p_{0,k}$ enthält. Die geringste Constantenzahl der gesuchten Lösung ist — mit Einrechnung des a_1 — demnach $2n+1$, und diese Lösung ist also vom $2n-4^{\text{ten}}$ Range in Bezug auf $r+f=0$ und vom 0^{ten} Range in Bezug auf $u=a_1$. Lösungen mit einer grösseren Anzahl von Constanten müssen nicht besonders untersucht werden, da sie in der Mannigfaltigkeit der so charakterisirten Lösungen mitbestimmt werden.

2. Im Allgemeinen können die Gleichungen $r+f=0$ und $u=a_1$ in dem eben fixirten Sinne nur eine gemeinschaftliche vollständige Lösung besitzen. Differenzirt man $r+f=0$ $n-1$ mal und $u=a_1$ einmal, so erhält man folgendes System:

$$
(3)\quad
\begin{array}{lr}
\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)+p_{n+1,0}+\frac{\partial f}{\partial s}p_{n,1}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{n-1,2} & =0, \\
\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-2}\,dy}\right)+p_{n,1}+\frac{\partial f}{\partial s}p_{n-1,2}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{n-2,3} & =0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1-i}\,dy^{i}}\right)+p_{n-i+1,i}+\frac{\partial f}{\partial s}p_{n-i,i+1}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{n-i-1,i+2} & =0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)+p_{2,n-1}+\frac{\partial f}{\partial s}p_{1,n}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{0,n+1} & =0, \\
\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}+\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}p_{1,n} & =0, \\
\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}+\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}p_{0,n+1} & =0,
\end{array}
$$

wo $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ wieder die vollständigen Differentialquotienten von u bedeuten mit Hinweglassung jener Glieder, in denen die $n+1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z vorkommen.

Wenn wir die Function u als von solcher Beschaffenheit voraussetzen, dass die aus den Coefficienten der p zusammengesetzte Determinante nicht verschwindet, so werden die $n+1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z,

$$p_{n+1,0},\ p_{n,1},\ \ldots,\ p_{n-i,i+1},\ \ldots,\ p_{2,n-1},\ p_{1,n},\ p_{0,n+1}$$

aus dem System (3) vollständig bestimmt sein, und man erhält zur Berechnung von z das folgende Gleichungssystem:

$$
(4)\quad
\begin{array}{llll}
 & & \dfrac{dz}{dx}=p\ , & \dfrac{dz}{dy}=q\ , \\
\dfrac{dp}{dx}=r\ , & \dfrac{dp}{dy}=s\ ; & \dfrac{dq}{dx}=s\ , & \dfrac{dq}{dy}=t\ , \\
\dfrac{ds}{dx}=p_{2,1}\ , & \dfrac{ds}{dy}=p_{1,2}\ ; & \dfrac{dt}{dx}=p_{1,2}\ , & \dfrac{dt}{dy}=p_{0,3}\ , \\
\dfrac{dp_{12}}{dx}=p_{22}\ , & \dfrac{dp_{12}}{dy}=p_{13}\ ; & \dfrac{dp_{03}}{dx}=p_{13}\ , & \dfrac{dp_{03}}{dy}=p_{04}\ , \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{dp_{1k}}{dx}=p_{2k}\ , & \dfrac{dp_{1k}}{dy}=p_{1,k+1}; & \dfrac{dp_{0,k+1}}{dx}=p_{1,k+1}\ , & \dfrac{dp_{0,k+1}}{dy}=p_{0,k+2}\ , \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{dp_{1,n-1}}{dx}=p_{2,n-1}\ , & \dfrac{dp_{1,n-1}}{dy}=p_{1,n}\ ; & \dfrac{dp_{0,n}}{dx}=p_{1,n}\ , & \dfrac{dp_{0,n}}{dy}=p_{0,n+1}
\end{array}
$$

wo die in der ersten Colonne stehenden Grössen r, p_{21} u. s. f. die durch die Gleichung $r+f=0$ und ihre Derivirten bestimmten Werthe bedeuten, also der Reihe nach

$$
\begin{array}{lll}
r & \text{durch } s & \text{und } t, \\
p_{21} & \text{durch } p_{12} & \text{und } p_{03}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
p_{2,n-2} & \text{durch } p_{1,n-1} & \text{und } p_{0,n}
\end{array}
$$

auszudrücken sind, während die in der letzten Zeile stehenden $p_{2,n-1}$, p_{1n}, $p_{0,n+1}$ die Lösungen des linearen Systems (3) repräsentiren. In dieser Auffassung ist (4) *ein System von totalen Differentialgleichungen*, das

$$z;\ p,\ q;\ s,\ t;\ \ldots;\ p_{1,k},\ p_{0,k+1};\ \ldots;\ p_{1,n-1},\ p_{0n}$$

als Functionen von x und y bestimmt.

Nur im allergünstigsten Falle, wenn das System (4) unbeschränkt integrabel ist, erhalten wir für z eine Function mit $2n+1$ willkürlichen Constanten, die dann auch eine gemeinschaftliche vollständige Lösung von $r+f=0$ und $u=a_1$ ist.*)

*) Gäbe es nämlich zwischen z, p, q, $\ldots$, $p_{1,n-1}$, p_{0n} eine Relation die keine willkürliche Constante enthält, so könnte man in (4) eine der unbekannten Functionen eliminiren, und die entsprechenden Gleichungen auslassen, und dann

Wenn die Integrabilitätsbedingungen nicht identisch erfüllt sind, so enthält die gemeinschaftliche Lösung, wenn eine solche überhaupt vorhanden, jedenfalls eine kleinere Zahl willkürlicher Constanten.

Mehr als *eine* gemeinschaftliche vollständige Lösung — in dem fixirten Sinne — ist nur dann möglich, wenn die Gleichungen (3) nicht unabhängig von einander sind.

3. Die Gleichungen (3) bestimmen aber, wie man unmittelbar sieht, alle Unbekannten p, sobald die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix}.$$

oder

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 \left[\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}\right)^2 + \left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}\right)\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t}\right] \tag{5}$$

nicht Null ist. Wenn $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} = 0$ ist, kann Δ nur verschwinden, wenn auch $\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0$ ist, also u überhaupt keine Differentialquotienten n^{ter} Ordnung enthält; und *das identische Verschwinden der Determinante Δ bedeutet also auch hier, dass die charakteristischen Gleichungen der beiden Differentialgleichungen $r + f = 0$ und $u = a_1$*

$$\mu^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\mu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\mu + \frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen, d. h. wenn wir die Wurzeln der ersten Gleichung wieder mit μ_1 und μ_2 bezeichnen, eine der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\mu_1 + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\mu_2 + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0$$

erfüllt ist.

---

wären in der allgemeinen Lösung nicht — wie es sein muss — $2n + 1$, sondern nur $2n$ willkürliche Constanten enthalten. Aus demselben Grunde muss man, wenn in $u = a_1$ die allgemeine Lösung des Systems (4) eingesetzt wird, eine Function der $2n + 1$ Constanten, und nicht eine numerische Grösse als Werth des a_1 erhalten.

Wenn nun $\Delta = 0$ ist, so werden die Gleichungen des Systems (3) einander widersprechen, und es giebt überhaupt keine gemeinschaftliche vollständige Lösung, oder es ist wenigstens eine der Gleichungen eine Folge der übrigen. In diesem Falle müssen, wie man aus der Form der Gleichungen (3) leicht sieht, zu einem beliebig gewählten Werthe von $p_{0,n+1}$ bestimmte Werthe von $p_{1,n}$, $p_{2,n-1}$ u. s. f. gehören; da wenn u überhaupt Differentialquotienten n^{ter} Ordnung enthält, Δ und $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}$ nicht zugleich null werden können.

Führen wir nun noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$-P_{n-1} = \begin{vmatrix} \left(\frac{d^{n-1} f}{d y^{n-1}}\right), & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{du}{dx}\right), & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}}, & 0 \\ \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{d^{n-1} f}{d y^{n-1}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}},$$

$$6) \qquad -P_n = \begin{vmatrix} 1, & \left(\frac{d^{n-1} f}{d y^{n-1}}\right), & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \left(\frac{du}{dx}\right), & 0 \\ 0, & \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{d^{n-1} f}{d y^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}},$$

$$-P_{n+1} = \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \left(\frac{d^{n-1} f}{d y^{n-1}}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}}, & \left(\frac{du}{dx}\right) \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \left(\frac{du}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{d^{n-1} f}{d y^{n-1}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right).$$

In dem jetzt zu betrachtenden Falle müssen Δ, P_{n-1}, P_n, P_{n+1} zugleich verschwinden, oder — wie leicht zu sehen — u muss einem der beiden Systeme simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\mu_i + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\mu+\frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}=0,$$
$$(\mu=\mu_1,\ \mu_2)$$

Genüge leisten. Diese beiden Systeme sollen wieder kurz als $S_1^{(n)}$ und $S_2^{(n)}$ bezeichnet werden.

Die Verallgemeinerung des ersten Satzes in § 6. lautet demnach:

Wenn die Differentialgleichungen $r+f=0$ und $u=a_1$ eine gemeinschaftliche vollständige Lösung besitzen und u keine Lösung des Systems $S_1^{(n)}$ oder $S_2^{(n)}$ ist, dann kann es nur eine solche gemeinschaftliche vollständige Lösung geben, und man erhält diese durch Integration des Systems totaler Differentialgleichungen (4), *als den Werth von z in der allgemeinen Lösung dieses Systems. Das System* (4) *muss in diesem Falle unbeschränkt integrabel sein.*

Jener Fall, wo die simultanen Systeme $S_1^{(n)}$ oder $S_2^{(n)}$ Lösungen besitzen, ist das Analogon des bei der Bestimmung der gewöhnlichen vollständigen Lösungen auftretenden Falles (A), und soll weiterhin besonders betrachtet werden. Wir beschäftigen uns zuerst mit jenen Formen von u, für welche

Δ *nicht Null ist.*

3. Die Forderung der unbeschränkten Integrabilität für das System (4) ergiebt alle Formen von u, die so beschaffen sind, dass die Gleichungen $r+f=0$ und $u=a_1$ eine und nur eine gemeinschaftliche vollständige Lösung besitzen. Hierzu sind vor allem die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität zu entwickeln; und es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals zu bemerken, dass alle in (4) vorkommenden Grössen durch

$$z;\ p,\ q;\ s,\ t;\ \cdots;\ p_{1,k-1},\ p_{0k};\ \cdots;\ p_{1,n-1},\ p_{0n};$$

und die Differentialquotienten von f und u ausgedrückt zu betrachten sind, so wie dass u nur in den Ausdrücken für $p_{2,n-1}$, p_{1n}, $p_{0,n+1}$ vorkömmt.

Bei den Differentiationen nach x und y sind die Werthe der Differentialquotienten von $z, p, q, \cdots, p_{1,n-1}, p_{0n}$ aus (4) einzusetzen, so dass $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dy}$ die folgenden Operationen bedeuten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}+r\frac{\partial}{\partial p}+s\frac{\partial}{\partial q}+\cdots+p_{2k}\frac{\partial}{\partial p_{1k}}+p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{0,k+1}}+\cdots\\&\qquad+p_{2,n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}}+p_{1,n}\frac{\partial}{\partial p_{0n}},\\\frac{d}{dy}&=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}+s\frac{\partial}{\partial p}+t\frac{\partial}{\partial q}+\cdots+p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{1k}}+p_{0,k+2}\frac{\partial}{\partial p_{0,k+1}}+\cdots\\&\qquad+p_{1n}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}}+p_{0,n+1}\frac{\partial}{\partial p_{0n}},\end{aligned}\tag{7}$$

wo die Werthe von $r, \cdots, p_{2k}, \cdots, p_{2,n-1}, p_{1n}, p_{0,n+1}$ wieder aus den Gleichungen (1), (2) und (3) zu nehmen sind.

Man sieht zuerst, dass die Integrabilitätsbedingungen, welche den in der dritten und vierten Colonne, mit Ausnahme der letzten Zeile, stehenden Differentialgleichungen entsprechen, identisch erfüllt sind. Es ist allgemein:

$$\frac{dp_{0,k+2}}{dx} - \frac{dp_{1,k+1}}{dy} = 0,$$

weil nach den Gleichungen in der zweiten und dritten Colonne der darauf folgenden Zeile diese Differentialquotienten gleich sind.

Für das in der ersten und zweiten Colonne stehende erste Gleichungspaar hat man ebenfalls identisch:

$$\frac{ds}{dx} - \frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx} + \frac{df}{dy} = \left(\frac{df}{dy}\right) + p_{21} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{12} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{03} = 0,$$

da ja p_{21} gerade aus dieser Gleichung zu bestimmen ist. Ebenso ist allgemein für die Gleichungen der ersten und zweiten Colonne, mit Ausnahme der letzten Zeile:

$$\frac{dp_{1k}}{dx} = p_{2k},$$

und aus der Gleichung $r + f = 0$:

$$-\frac{dp_{2,k-1}}{dy} = \frac{d^{k-1}f}{dy^{k-1}} = \left(\frac{d^{k-1}f}{dy^{k-1}}\right) + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1k} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,k+1},$$

und diess ergiebt in der That, mit Berücksichtigung der Gleichungen (3)

$$\frac{dp_{1k}}{dx} - \frac{dp_{2,k-1}}{dy} = 0.$$

Es sind daher alle Integrabilitätsbedingungen mit Ausnahme derer die den in der letzten Zeile stehenden Gleichungspaaren entstammen, identisch erfüllt, und es bleiben zur Bestimmung von u nur zwei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{d}{dx} p_{1n} = \frac{d}{dy} p_{2,n-1},$$
$$\frac{d}{dx} p_{0,n+1} = \frac{d}{dy} p_{1n},$$

die endlich mit Hülfe der unter (5) und (6) eingeführten Bezeichnungen, die noch

(8) $$p_{2,n-1} = \frac{P_{n-1}}{\Delta}, \quad p_{1n} = \frac{P_n}{\Delta}, \quad p_{0,n+1} = \frac{P_{n+1}}{\Delta}$$

ergeben, folgende Form annehmen:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
T_{n+1} &\equiv \left(\Delta\,\frac{dP_n}{dx} - P_n\,\frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta\,\frac{dP_{n-1}}{dy} - P_{n-1}\frac{d\Delta}{dy}\right) = 0,\\
T_{n-1} &\equiv \left(\Delta\,\frac{dP_{n+1}}{dx} - P_{n+1}\frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta\,\frac{dP_n}{dy} - P_n\,\frac{d\Delta}{dy}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Es ist zu beachten, dass T_{n-1} und T_{n+1} ganze Functionen der Differentialquotienten von u sind. Die Berechnung der bei den Operationen $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ auftretenden Grössen $r, \cdots, p_{2k}, \cdots, p_{2,n-2}$ führt überhaupt keinen Nenner ein. Diess kann also nur bei jenen Gliedern geschehen, wo die auftretenden partiellen Differentialquotienten mit $p_{2,n-1}$, p_{1n} oder $p_{0,n+1}$ zu multipliciren sind. Für diese sind die Werthe aus (8) einzusetzen. In den mit dem Factor Δ versehenen Gliedern fällt der Nenner wieder unmittelbar fort; die übrigen in Betracht kommenden Glieder sind:

$$
\frac{-P_n\left(P_{n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}} + P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{0n}}\right) + P_{n-1}\left(P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}} + P_{n+1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{0n}}\right)}{\Delta}
= \frac{\partial\Delta}{\partial p_{0n}}\,\frac{P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2}{\Delta},
$$

$$
\frac{-P_{n+1}\left(P_{n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}} + P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{0n}}\right) + P_n\left(P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}} + P_{n+1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{0n}}\right)}{\Delta}
= -\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}}\,\frac{P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2}{\Delta},
$$

und hier ist $P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2$, wie die einfache Entwicklung des Ausdrucks zeigt, immer durch Δ theilbar.

In den Gleichungen (9) sind durch Weglassung des Nenners Δ^2 nur die Lösungen der Differentialgleichung erster Ordnung $\Delta = 0$ eventuell hinzugetreten. Diese aus der Gleichung unmittelbar abzulesenden Lösungen besitzen wieder jenen Ausnahmecharakter, der für den einfachsten Fall schon früher discutirt wurde.

Die unter (9) *stehenden Gleichungen sind wieder partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung von u, welche die unbekannte Function u selbst nicht enthalten, und deren Polynom eine ganze Function sämmtlicher Differentialquotienten von u und eine lineare Function der zweiten Differentialquotienten von u ist. Als unabhängige Variable treten dabei die Grössen $x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,k-1}, p_{0k}, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0n}$ auf.*

4. *Die beiden für u erhaltenen Differentialgleichungen lassen sich wieder durch eine einzige ersetzen.*

Es wird entsprechend bewiesen werden können, dass, *wenn* $p_{2,n-1}$, p_{1n}, $p_{0,n+1}$ *Lösungen des Systems* (3) *sind, die Identität besteht:*

$$(10)\quad \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d}{dx}p_{1,n}-\frac{d}{dy}p_{2,n-1}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\left(\frac{d}{dx}p_{0,n+1}-\frac{d}{dy}p_{1,n}\right)=0.$$

Man erhält zuerst, wenn $\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}$ nicht null ist, aus (3):

$$-p_{0,n+1}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}}{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}},$$

$$-p_{1n}=\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}}{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}.$$

Hieraus erhält man ferner durch Differentiation, und indem man die Werthe von $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ in den Zähler einführt:

$$(11)\quad \begin{aligned} -\frac{d}{dx}p_{0,n+1}&=\frac{\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]+p_{0,n+1}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}},\\ -\frac{d}{dy}p_{1n}&=\frac{\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}\right]+p_{1n}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}, \end{aligned}$$

wo noch $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ ausführlich geschrieben folgende Bedeutung besitzen:

$$(12)\quad \begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)&=\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}+\cdots\\ &+p_{2k}\frac{\partial u}{\partial p_{1k}}+p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{0,k+1}}+\cdots+p_{2,n-2}\frac{\partial u}{\partial u_{1,n-2}}+p_{1,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}},\\ \left(\frac{du}{dy}\right)&=\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}+\cdots\\ &+p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,k}}+p_{0,k+2}\frac{\partial u}{\partial p_{0,k+1}}+\cdots+p_{1,n-2}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}+p_{0,n}\frac{\partial u}{\partial u_{0,n-1}}, \end{aligned}$$

wo wieder die Werthe von $r, p_{21}, \cdots, p_{2k}, \cdots, p_{2,n-2}$ aus den Gleichungen (1), (2) und (3) einzusetzen sind.

Man erhält durch einfache Ausführung der Differentiationen die folgenden Identitäten:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]+p_{0,n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}=\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial p_{1n}}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}p\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,p\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=\frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right)-s\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,p\frac{\partial p_{1,n}}{\partial z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,r\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=\frac{d}{dy}\left(r\frac{\partial u}{\partial p}\right)-p_{21}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,r\frac{\partial p_{1n}}{\partial p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,s\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=\frac{d}{dy}\left(s\frac{\partial u}{\partial q}\right)-p_{12}\frac{\partial u}{\partial q}+s\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,s\frac{\partial p_{1n}}{\partial q},\end{aligned}$$

. . . .

(13)

$$\begin{aligned}p_{2k}\frac{\partial}{\partial p_{1k}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,p_{2k}\frac{\partial}{\partial p_{1k}}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=\frac{d}{dy}\left(p_{2k}\frac{\partial u}{\partial p_{1k}}\right)-p_{2,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{1k}}+p_{2k}\frac{\partial u}{\partial p_{1,k-1}}\\&\quad+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,p_{2k}\frac{\partial p_{1n}}{\partial p_{1k}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{0,k+1}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{0,k+1}}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=\frac{d}{dy}\left(p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{0,k+1}}\right)-p_{1,k+2}\frac{\partial u}{\partial p_{0,k+1}}+p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{0k}}\\&\quad+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,p_{1,k+1}\frac{\partial p_{1n}}{\partial p_{0,k+1}},\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}p_{2,n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,p_{2,n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=\frac{d}{dy}\left(p_{2,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)-\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{d}{dy}p_{2,n-1}+p_{2,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\\&\quad+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,p_{2,n-1}\frac{\partial p_{1n}}{\partial p_{1,n+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{1n}\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]&+p_{0,n+1}\,p_{1n}\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\&=p_{1n}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}+p_{1n}\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,p_{1n}\frac{\partial p_{1n}}{\partial p_{0}},\end{aligned}$$

in denen sogleich

$$\frac{dp_{2k}}{dy} = p_{2,k+1}$$

gesetzt wurde, eine Relation, die hier eigentlich aus den Gleichungen (2) zu verificiren ist.

Die Addition der unter (13) stehenden Identitäten ergiebt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}\right]+p_{0,n+1}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\ =\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}\right]+p_{1n}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\\ +\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d}{dx}p_{1n}-\frac{d}{dy}p_{2,n-1}\right),\end{aligned}$$

und diess ist nichts anderes, als die unter (10) stehende Identität, wenn man aus den unmittelbar nach (10) stehenden Gleichungen die Werthe für die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke einsetzt.

Diess bleibt auch dann richtig, wenn $\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0$ ist. In diesem Falle muss, weil das zweite Glied in (10) verschwindet und $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}$ nicht zugleich null sein kann,

$$\frac{d}{dx}p_{1n} - \frac{d}{dy}p_{2,n-1} = 0$$

werden. Diess ist unter den jetzigen Voraussetzungen in der That eine identische Gleichung. Man hat jetzt:

$$-p_{2,n-1} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

$$-p_{1n} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

und hieraus:

$$-\frac{d}{dy}p_{2,n-1} = \frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right)+p_{2,n-1}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

$$-\frac{d}{dx}p_{1n} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right)+p_{1n}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}.$$

Die Identitäten (13) sind selbstverständlich immer richtig und geben, wenn $\frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0$ ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\, p_{1n}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\, p_{2,n-1}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d}{dx}\, p_{1n} - \frac{d}{dy}\, p_{2,n-1}\right),$$

oder, wenn man auf beiden Seiten die Differentiation des zweiten Gliedes ausführt und kürzt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + p_{1n}\frac{d}{dx}\,\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + p_{2,n-1}\frac{d}{dy}\,\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}},$$

was mit der behaupteten Gleichung zusammenfällt.

Setzen wir nun in (10) die Werthe von $p_{2,n-1}$, p_{1n}, $p_{0,n+1}$ ein und multipliciren mit Δ^2, so erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\, T_{n+1} + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\, T_{n-1} = 0, \tag{14}$$

eine Gleichung, die wieder identisch sein muss, weil sie für jedes u gilt. Für jene u, die Lösungen der Gleichung $\Delta = 0$ sind, und bisher ausgeschlossen waren, wird einzeln T_{n-1} und T_{n+1} gleich Null.

Es ist also jedes Glied des Polynoms T_{n-1} durch $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}$ und jedes Glied von T_{n+1} durch $\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}$ theilbar.

Die beiden Differentialgleichungen für u:

$$T_{n-1} = 0, \quad T_{n+1} = 0$$

können also auch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\, R = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} R = 0$$

geschrieben werden; und *es wird demnach das System* (4) *unbeschränkt integrabel für jeden Werth von u, der eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $R = 0$ ist, vorläufig mit Ausschluss jener Lösungen, die zugleich der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\Delta = 0$ genügen.*

§ 9.

Fortsetzung. Classen von partiellen Differentialgleichungen 2. O., deren Integration auf diejenige von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. — Zusammenstellung der entwickelten Integrationsmethoden.

1. Wenn die Determinante Δ *verschwindet*, können die Differentialgleichungen $r + f = 0$ und $u = a_1$ nur dann eine gemeinschaftliche Lösung besitzen, wenn u einem der beiden Systeme simultaner Differentialgleichungen $S_1^{(n)}$ und $S_2^{(n)}$ genügt. Dann kann der Werth von $p_{0,n+1}$ beliebig angenommen werden, und man findet aus (3) bestimmte Werthe für $p_{1,n}$ u. s. f. Endlich wird das System (4) unbeschränkt integrabel, wenn:

$$\frac{d}{dx} p_{0,n+1} - \frac{d}{dy} p_{1n} = 0 \tag{1}$$

ist. Diese Bedingung giebt eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der entsprechenden Werthe von $p_{0,n+1}$. Nach (3) ist:

$$-p_{1n} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} p_{0,n+1}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

$$-p_{2,n-1} = \frac{\left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right) \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\right) p_{0,n+1}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}.$$

Setzt man diese Werthe in (1) ein, so erhält man die erwähnte Differentialgleichung, die $p_{0,n+1}$ als Function von

$$x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0n}$$

bestimmt. Für jeden so bestimmten Werth von $p_{0,n+1}$ wird das System (4) unbeschränkt integrabel und liefert eine vollständige Lösung $2n-4^{\text{ten}}$ Ranges für die Differentialgleichung $r + f = 0$.

2. Zur Ergänzung der bisherigen Resultate, insbesondere um die Allgemeinheit der erhaltenen Lösungen zu untersuchen, muss noch die Verallgemeinerung jener Sätze entwickelt werden, die in den ersten Abschnitten dieser Abhandlung bewiesen wurden. Das Verfahren bleibt jedoch hier genau dasselbe und es wird daher genügen, die entsprechenden Resultate einfach zusammenzustellen.

Das System partieller Differentialgleichungen:

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0,$$

$$u(x, y, z, p, q, s, t; \ldots; p_{1,k-1}, p_{0,k}; \ldots; p_{1,n-1}, p_{0n}) = a_1,$$

$$v(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = a_2$$

soll unbeschränkt integrabel heissen, wenn die folgenden Bedingungen identisch erfüllt sind:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}-\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)\\
&-\left(\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}}\\
&+\left(\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}-\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{\partial y}\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial p_{0n}}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{dv}{dx}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}\left(\frac{dv}{dy}\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}}-\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial p_{0n}}=0;
\end{aligned}
$$

Es sind dies die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das System (2) *eine Lösung besitze, die mit Hinzurechnung von* a_1 *und* a_2 $2n+1$ *willkürliche Constanten enthält.*

Dieser Werth des z kann dann aus dem folgenden Systeme totaler Differentialgleichungen erhalten werden:

$$
(4)\quad
\begin{array}{llll}
 & & \dfrac{dz}{dx}=p, & \dfrac{dz}{dy}=q,\\
\dfrac{dp}{dx}=r, & \dfrac{dp}{dy}=s; & \dfrac{dq}{dx}=s, & \dfrac{dq}{dy}=t,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{dp_{1,k-1}}{dx}=p_{2,k-1}, & \dfrac{dp_{1,k-1}}{dy}=p_{1,k}; & \dfrac{dp_{0,k}}{dx}=p_{1,k}, & \dfrac{dp_{0,k}}{dy}=p_{0,k+1},\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{dp_{1,n-2}}{dx}=p_{2,n-2}, & \dfrac{dp_{1,n-2}}{dy}=p_{1,n-1}; & \dfrac{dp_{0,n-1}}{dx}=p_{1,n-1}, & \dfrac{dp_{0,n-1}}{dy}=p_{0,n},
\end{array}
$$

in welchem Systeme $p_{1,n-1}$, p_{0n} Lösungen der beiden Gleichungen sind:

$$u=a_1,\quad v=a_2,$$

während $r, \ldots, p_{2,k-1}, \ldots, p_{2,n-2}$ aus der Gleichung $r+f=0$ und deren Derivirten zu entnehmen sind. Bei dieser Bedeutung der auftretenden Grössen ist auch (4) unbeschränkt integrabel und in seinem allgemeinen Lösungssysteme ist z in der angegebenen Form enthalten.

Der so erhaltene Werth von z *ist — in der früher entwickelten Bedeutung dieses Ausdrucks — eine vollständige Lösung jeder einzelnen der drei Differentialgleichungen* $r+f=0$, $u=a_1$ *und* $v=a_2$.

Umgekehrt entspricht jeder vollständigen Lösung $2n-4^{\text{ten}}$ *Ranges der Differentialgleichung* $r+f=0$, *wenn die Constanten* a_1 *und* a_2 *als Functionen der in der Lösung auftretenden* $2n+1$ *willkürlichen Constanten gefasst werden, ein solches unbeschränkt integrables System. Ist* a_2 *nicht in der angegebenen Weise bestimmt, so sind die zu einer*

bestimmten vollständigen Lösung gehörenden v-Formen durch ein simultanes System zweier homogener und linearer partieller Differentialgleichungen mit $2n+3$ *unabhängigen Variabeln gegeben. Diese Gleichungen bilden ein vollständiges System und die allgemeinste Form für v ist:*

$$v = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1})$$

wo ω *eine willkürliche Function bedeutet, und* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ *bestimmte Functionen von* $z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0n}$ *sind.*

Jedes System von Functionen u, v, das eine Lösung der Gleichungen (3) *ist, giebt demnach eine vollständige Lösung der Differentialgleichung* $r+f=0$.

Die allgemeine Discussion des Systems (3) *ergiebt wieder drei Fälle. Es kann u eine solche Function sein, dass:*

A) *Das System* (3) *einer einzigen Gleichung äquivalent wird. Dies kann geschehen, indem* 1) *die beiden Gleichungen algebraisch auseinander folgen, d. h. die Coefficienten der partiellen Differentialquotienten von v in den beiden Gleichungen proportional sind oder* 2) *sämmtliche Coefficienten in einer der Gleichungen verschwinden.*

B) *Die beiden Gleichungen in Bezug auf v ein vollständiges System bilden. D. h. die bekannte Integrabilitätsbedingung ist identisch befriedigt und liefert keine neue Gleichung für v.*

C) *Die beiden Gleichungen kein vollständiges System bilden, und die Entwicklung der Integrabilitätsbedingungen wenigstens eine neue Differentialgleichung für v liefert.*

Es zeigt sich zuerst genau wie früher, dass die dem Falle C) *entsprechenden u-Functionen nicht weiter zu berücksichtigen sind,* da die in diesem Falle resultirenden Werthe des v nicht jene Allgemeinheit besitzen, die sie nothwendigerweise haben müssten, wenn $r+f=0$ und $u=a_1$ eine gemeinschaftliche vollständige Lösung hätten.

Der Fall A) *kann nur dann auftreten, wenn u einem der beiden Systeme:*

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\mu + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial s} = 0,$$

$$(\mu = \mu_1, \mu_2)$$

*genügt**), *wo* μ_1, μ_2 *die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung von* $r+f=0$ *bedeutet, also u eine Lösung der früher mit* $S_1^{(n)}$ *und* $S_2^{(n)}$ *bezeichneten Systeme ist.*

*) Es braucht kaum besonders erwähnt zu werden, dass dieser Fall (A) wieder nur bei speciellen Classen von Differentialgleichungen auftreten kann, wenn nämlich die Systeme $S_1^{(n)}$ oder $S_2^{(n)}$ überhaupt eine Lösung besitzen.

Dem Falle B) gehören alle jene u-Functionen an, die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $R^{(n)}=0$ sind, ohne zugleich der Differentialgleichung erster Ordnung $\Delta=0$ zu genügen.

Jene Functionen u, die der Gleichung $\Delta=0$ genügen, ohne zugleich der zweiten Gleichung des entsprechenden Systems $S^{(n)}$ zu entsprechen, geben keine Lösung, da dann $u=a_1$ und $v=a_2$ nicht nach $p_{1,n-1}$ und p_{0n} aufgelöst werden können.

Eine vollständige Lösung $2n-4^{\text{ten}}$ Ranges der Gleichung $r+f=0$ ist bestimmt, wenn die Anfangswerthe von z und p für $x=x_0$, die mit ζ und π bezeichnet werden mögen, als Functionen von y und $2n+1$ willkürlichen Constanten gegeben sind. Dies geschieht am zweckmässigsten in der Form eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das explicite nur die beiden Constanten a_1 und a_2 enthält:

$$u_0(y,\ \zeta,\ \pi,\ \zeta',\ \pi',\ \ldots,\ \pi^{(n-1)},\ \zeta^{(n)})=a_1,$$
$$v_0(y,\ \zeta,\ \pi,\ \zeta',\ \pi',\ \ldots,\ \pi^{(n-1)},\ \zeta^{(n)})=a_2.$$

Ist u die Lösung eines der Systeme $S^{(n)}$, so ist jede der Lösung, deren Anfangswerthe der Relation:

$$u(x_0,\ y,\ \zeta,\ \pi,\ \ldots,\ \pi^{(n-1)},\ \zeta^{(n)})=a_1$$

genügen, eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen $r+f=0$ und $u=a_1$. Man erhält nämlich dann die entsprechenden Functionen v aus einer einzigen Differentialgleichung, der zweiten Gleichung in (3), *deren allgemeine Lösung folgende Form besitzt:*

$$v=\varphi(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2n+2})$$

und in welcher die willkürliche Function φ so gewählt werden kann, dass

$$(v)_{x=x_0}=v_0$$

sei, wo v_0 beliebig ist.

Hat ferner irgend eines der Systeme $S^{(n)}$ zwei von einander unabhängige Lösungen, u_1 und u_2, dann ist auch $\omega(u_1,u_2)$ eine Lösung und die willkürliche Function ω kann so gewählt werden, dass

$$(\omega(u_1,\ u_2))_{x=x_0}=u_0$$

sei, wo u_0 beliebig ist und man kann demnach auf diesem Wege jede particuläre Lösung der Gleichung $r+f=0$, d. h. die allgemeine Lösung erhalten.

3. Die Zusammenstellung der bisherigen Resultate ergiebt folgende Integrationsmethoden für die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln:

$$r+f(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t)=0.$$

Sei n eine beliebige positive, ganze Zahl, die grösser als eins. Man bilde sodann mit Hülfe der im vorhergehenden Paragraphen unter (5)

und (6) *definirten Ausdrücke* Δ, P_{n-1}, P_n, P_{n+1} *die Differentialgleichung:*

$$R \equiv \frac{\left(\Delta \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dP_{n-1}}{dy} - P_{n-1} \frac{d\Delta}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{0n}}}$$

$$\equiv \frac{\left(\Delta \frac{dP_{n+1}}{dx} - P_{n+1} \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dP_n}{dy} - P_n \frac{d\Delta}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}} = 0$$

in welcher u *als unbekannte Function,* $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0n}$ *als unabhängige Variable auftreten.* $R = 0$ *ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.*

Jede particuläre Lösung dieser Differentialgleichung, die nicht zugleich der Differentialgleichung erster Ordnung $\Delta = 0$ *genügt, giebt eine vollständige Lösung* $2n - 4^{\text{ten}}$ *Ranges (mit* $2n + 1$ *willkürlichen Constanten) der vorgelegten Differentialgleichung. Wenn wir nämlich aus dem System* (3) *des* § 8 $p_{2,n-1}$, p_{1n}, $p_{0,n+1}$ *bestimmen, und das nach Einsetzen dieser Werthe unbeschränkt integrable System auflösen, so erhalten wir* z *als Function von* x *und* y *mit* $2n + 1$ *Constanten und dies ist die entsprechende vollständige Lösung.*

Ist u *eine solche particuläre Lösung, die zugleich der Gleichung* $\Delta = 0$, *d. h. der ersten Gleichung eines der Systeme* $S_1^{(n)}$ *oder* $S_2^{(n)}$ *genügt, so kehren wir behufs Integration der Gleichung* $r + f = 0$ *zu dem unter* (3) *in diesem Abschnitte aufgestellten Systeme zurück. Dies liefert dem* u *zugehörige Werthe des* v, *und damit Systeme von der Form:*

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2.$$

Genügt nun u *auch der zweiten Gleichung des entsprechenden Systems* $S^{(n)}$, *so wird man nach dem am Ende des 2. Artikels in diesem Abschnitte gegebenen Verfahren unendlich viele vollständige Lösungen mit der vorgeschriebenen Anzahl von Constanten, d. h. eine Lösung mit einer willkürlichen Function erhalten. — Besitzt eines der Systeme* $S^{(n)}$ *zwei von einander unabhängige Lösungen, so erhält man nach demselben Verfahren die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung. — Zum selben Resultat führt die Bestimmung von* $p_{0,n+1}$ *aus der partiellen Differentialgleichung* (1), *die dann mit den zugehörigen aus* (3) *entnommenen Werthen von* p_{1n}, $p_{2,n-1}$ *das System* (4) *des vorhergehenden Paragraphen zu einem unbeschränkt integrabeln machen.*

Wenn eines der Systeme $S_1^{(n)}$ *oder* $S_2^{(n)}$ *Lösungen besitzt, geschieht die Bestimmung der eine willkürliche Function enthaltenden, respective der allgemeinen Lösung ausschliesslich durch Integration von Systemen totaler Differentialgleichungen.*

Wenn endlich u nur eine Lösung der Gleichung $\Delta = 0$ ist, ohne zugleich auch die zweite Gleichung eines der Systeme $S^{(n)}$ zu befriedigen, dann ist das System von Gleichungen, $u = a_1$ und die zur Ergänzung aufzustellende $v = a_2$ nicht nach $p_{1,n-1}$ und p_{0n} auflösbar, die Gleichungen (3) widersprechen einander und die Gleichungen $r + f = 0$ und $u = a_1$ besitzen überhaupt keine gemeinschaftliche Lösung.

Der Zusammenhang, der zwischen den Anfangswerthen einer particulären Lösung der Gleichung $R = 0$ und den entsprechenden Anfangswerthen einer vollständigen Lösung von $r + f = 0$ besteht, kann genau nach denselben Methoden auch allgemein bestimmt werden, die für den Fall $n = 2$ am Ende des § 6 entwickelt wurden.

Diese Entwicklung zeigt von Neuem, dass die Integration der Gleichung $r + f = 0$ und diejenige der Gleichung $R = 0$ als äquivalente Probleme betrachtet werden können, in denen die vollständigen Lösungen der einen und die particulären Lösungen der andern einander eindeutig entsprechen; mit Ausnahme jenes Falles, in dem die Systeme $S^{(n)}$ Lösungen gestatten. In diesem Falle giebt es particuläre Lösungen der Gleichung $R = 0$, denen unendlich viele vollständige Lösungen der Gleichungen $r + f = 0$ entsprechen. Die Gesammtheit *dieser* Lösungen kann durch Integration totaler Differentialgleichungen bestimmt werden und giebt die allgemeine Lösung, wenn eines der Systeme $S^{(n)}$ zwei unabhängige Lösungen besitzt.

In der Anmerkung zu § 4 wurde schon die hierher gehörige Darboux'sche Arbeit citirt, und auch der Zusammenhang besprochen, der zwischen den Darboux'schen Resultaten und den hier vorgetragenen Entwicklungen besteht.

Hier wird noch die richtige Stelle sein, um eine kurze Mittheilung M. Lévy's in den Comptes Rendus vom November 1872 (pag. 1094) zu erwähnen. Die Note enthält eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, leider ohne Beweis, und auch ohne jede Erläuterung. Diese Sätze, deren Bedeutung ich erst erkennen konnte, als ich meine eigenen Untersuchungen abgeschlossen hatte, geben eine wichtige und interessante Ergänzung der eben dargelegten Integrationstheorie.

Die von Lévy mitgetheilten Sätze sind dem Wortlaut nach die folgenden:

„Théorème I. Les intégrales les plus générales des équations à différences partielles du second ordre, qu'il soit possible d'obtenir moyennant l'intégration de k systèmes successifs d'équations à différences ordinaires, comprenant chacun un nombre quelconque d'équations avec

un pareil nombre de fonctions inconnues, sont celles, dont les arbitraires relatives à l'une des caractéristiques de l'équation différentielle proposée*) n'entrent sous aucun signe d'intégration partielle, celles relatives à l'autre caractéristique pouvant être engagées sous de tels signes ou généralement se présenter d'un façon quelconque."

„La proposition subsiste dans le cas, où les deux caractéristiques sont les mêmes. Les deux fonctions arbitraires de l'intégrale, si elle est générale doivent dans çe cas apparaître distinctes, l'une d'elles étant hors de tout signe d'intégration partielle, l'autre pouvant être engagée sous de tels signes."

„Théorème II. Inversement, toutes les fois qu'une équation à différences partielles du second ordre admet une intégrale de la forme, qui vient d'être définie, elle peut être intégrée, c'est-à-dire que son intégration peut effectivement être ramenée à celle de k systèmes successifs d'équations à différences ordinaires."

„Théorème III. Le nombre k des systèmes à intégrer est toujours et invariablement égal à trois; en sorte que la seule chose, qui varie d'une intégrale à l'autre, ç'est le nombre des équations, que comprend chacun des trois systémes à intégrer."

Wie man sieht, geben die Lévy'schen Sätze keine Methode zur Integration und auch kein Kriterium, um darüber zu entscheiden, ob eine vorgelegte Differentialgleichung in jene Classe gehört. Die Sätze sagen nur aus, dass, wenn das allgemeine Integral jene oben charakterisirte Form besitzt, die Integration mit Hülfe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen geleistet werden kann. Um jedoch eine Methode zur Integration zu erhalten, müssten jene Systeme totaler Differentialgleichungen nicht aus der Integralgleichung sondern aus der vorgelegten Differentialgleichung abgeleitet werden, wenn diese überhaupt auf dem angedeuteten Wege integrirt werden kann. Auch das muss aus der vorgelegten Gleichung erschlossen werden können.

Alle diese Forderungen werden durch unsere Entwicklungen erfüllt. Man erkennt nämlich leicht, dass jede Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral die durch M. Lévy charakterisirte specielle Form besitzt, auch die Eigenschaft besitzt, dass wenigstens eines der Systeme $S^{(n)}$ zwei von einander unabhängige Lösungen besitzt. Umgekehrt sieht man, dass, sobald die Differentialgleichung diese Eigenschaft besitzt, ihr allgemeines Integral in der That durch die succesive Integration dreier Systeme totaler Differentialgleichungen gefunden wird. Das erste derselben giebt die Lösung

*) „J'appellerai toujours caractéristique d'une équation différentielle partielle les quantités, dont dépendent les fonctions arbitraires qui entrent dans son intégrale."

$u = \omega(u_1, u_2)$ eines der Systeme $S^{(n)}$, das zweite die zugehörigen v-Werthe, das dritte endlich leistet die Integration des Systems:

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2.$$

*Unter Voraussetzung der Lévy'schen Sätze geben daher die letzten Abschnitte die vollständige Theorie aller jener partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, deren Integration mit Hülfe von Systemen totaler Differentialgleichungen vollständig ausgeführt werden kann.**)

Das Kriterium dafür, dass eine vorgelegte Differentialgleichung in diese Classe gehöre, ist dann einfach folgendes: Für irgend ein positives, ganzzahliges $n > 1$ muss eines der Systeme $S_1^{(n)}$ und $S_2^{(n)}$ zwei von einander unabhängige Lösungen besitzen**). — Wie in diesem Falle die Integration erfolgt, ist im Vorhergehenden ausführlich auseinander gesetzt.

Indem ich mir eine ausführlichere Besprechung dieser Verhältnisse für später vorbehalte, will ich hier nur noch eine kurze Bemerkung über die resolvirende Gleichung $R^{(n)} = 0$ hinzufügen. Man könnte glauben, dass neue Classen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösung auf die Integration totaler Differentialgleichungen zurückführbar ist, dadurch gefunden werden können, dass man auf die Resolvente $R = 0$ dieselben Methoden anwendet, die hier für die Gleichung $r + f = 0$ auseinandergesetzt wurden. — Die Ausdehnung dieser Methoden ist wohl möglich, aber man wird dabei wieder auf die Bedingungen der Integrabilität der Systeme S in Bezug auf grössere Werthe des n geführt, so dass auch hier der Kreis der auf totale Differentialgleichungen zurückführbaren partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung sich schliesst.

Ich hoffe, dass es mir vergönnt sein wird, in weiteren Beiträgen zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen diese Andeutungen auszuführen.

§ 10.

Bemerkungen über die Methode der Variation der Constanten.

1. Es ist bekannt, welche wichtige Rolle die Methode der Variation der Constanten in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung besitzt. Diese Methode liefert aus irgend einer voll-

*) Leider giebt Herr Lévy gar keine Andeutungen darüber, in welcher Weise er „die allgemeinsten, durch totale Differentialgleichungen zu erhaltenden Integrale“ in einer weitere Entwicklungen ermöglichenden Form charakterisirt. Es ist sehr zu bedauern, dass diese wichtige Abhandlung bisher nicht in extenso publicirt wurde.

**) Der Fall $n = 1$ führt zur Monge-Ampère'schen Methode (s. den Schluss des folgenden Paragraphen).

ständigen Lösung die allgemeine Lösung und zwar in der Weise, dass eine Lösung mit beliebig gewählten Anfangswerthen aus der gegebenen vollständigen Lösung ausschliesslich durch bekannte Operationen abgeleitet werden kann.

Die Verallgemeinerung dieser Sätze giebt bei Differentialgleichungen höherer Ordnung keine ähnliche Vereinfachung des Integrationsverfahrens, da der entsprechende allgemeine Satz sich nicht auf primitive Integrale, sondern auf die sogenannten ersten Integrale bezieht. Man nennt bekanntlich erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung $r + f = 0$ jede Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathfrak{F}(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren allgemeine Lösung auch der Gleichung $r + f = 0$ genügt. Die Monge-Ampère'schen Methoden entscheiden darüber, ob solche erste Integrale überhaupt vorhanden, und bestimmen dieselben vollständig, wenn sie überhaupt existiren.

Wenn ein solches erstes Integral zwei willkürliche Constanten (a, b) enthält, und keiner partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Ausnahme von $r + f = 0$ als erstes Integral angehört, so ist dieses ein sogenanntes *vollständiges erstes Integral*, und man kann aus demselben, wie Darboux in seiner schon öfter angeführten Arbeit gezeigt hat, beliebig viele erste Integrale ableiten, indem man b als beliebige Function von a festsetzt, und dann a aus der Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

bestimmt. — $\mathfrak{F} = 0$ ist auch dann ein erstes Integral, wenn a und b in der angegebenen Weise als Functionen von x, y, z, p, q bestimmt werden.

Die Verallgemeinerung dieser Sätze auf Grundlage der hier vorgetragenen Untersuchungen ergiebt sich in sehr einfacher Weise.

Wenn die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $u = a_1$ mit $r + f = 0$ mehr als eine, also unendlich viele vollständige Lösungen gemeinschaftlich besitzt, so soll *das System*

$$r + f = 0, \quad u = 0,$$

wo man dem u immer eine additive Constante hinzugefügt denken kann, als *erstes Integral* $n - 1^{\text{ten}}$ *Ranges* der Differentialgleichung $r + f = 0$ bezeichnet werden. Die Berechtigung einer solchen Benennung ist unmittelbar klar, denn die Mannigfaltigkeit der durch ein solches System definirten Lösungen stimmt vollständig mit der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definirten Functionenmannigfaltigkeit überein, und auch die Bestimmung dieser Integralmannigfaltigkeit geschieht, wie wir gesehen, durch die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

In diesem Falle ist u eine Lösung eines der beiden, mit $S_1^{(n)}$ und $S_2^{(n)}$ bezeichneten Systeme, und umgekehrt liefert jedes u, das einem dieser Systeme genügt, ein erstes Integral in der angegebenen, verallgemeinerten Bedeutung dieses Ausdrucks. Für $n = 1$ sind dann unter S_1', S_2' die bei der Monge-Ampère'schen Methode auftretenden Systeme zu verstehen, und man erhält dann in diesem Falle die gewöhnlich so benannten ersten Integrale, als erste Integrale 0^{ten} Ranges.

Es ist auch hier unmittelbar klar, dass wenn u zwei willkürliche Constanten enthält, die Variation dieser Constanten im Sinne der Gleichungen

$$b = \varphi(a), \quad \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}\,\varphi'(a) = 0,$$

wo φ eine beliebige Function bedeutet, immer wieder erste Integrale liefert.

Im Uebrigen ist, wenn erste Integrale vorhanden sind, die Variation der Constanten nichts anderes, als die entsprechende Ableitung neuer Lösungen für die Systeme S, und kann daher hier, wo die Integration dieser Systeme erster Ordnung als ausgeführt vorausgesetzt ist, keine neuen Integrationsresultate ergeben. In der That kann man, wenn eine Lösung mit zwei willkürlichen Constanten für eines der Systeme S gegeben ist, aus dieser ohne Weiteres die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung ableiten.

2. Wenn wir die Methode der Variation der Constanten auf eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichung $r + f = 0$ anwenden, erhalten wir keine Vereinfachung der Integration, wohl aber wichtige Transformationen des Problems, oder wie wir auch sagen können, neue Resolventen der gegebenen Gleichung.

Dies soll für die vollständigen Lösungen im gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. i. für diejenigen vom Range 0 hier ausgeführt werden. Die vollständige Lösung sei:

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Nach den Entwicklungen des § 7 bleibt $z = F$ dann und nur dann eine Lösung der Gleichung $r + f = 0$, wenn die a aus dem folgenden Gleichungssysteme bestimmt werden:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dx}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dy},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 F}{dx\,dy}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{d^2 F}{dy^2}$$

wo die Zeichen ∂ und d in der Weise unterschieden sind, dass bei Anwendung des ∂ die a als constant, bei den Operationen d hingegen als Functionen von x und y zu betrachten sind.

Führt man die angedeuteten Differentiationen aus, und berücksichtigt bei Bildung der zweiten Differentialquotienten, dass man nach den vorstehenden Gleichungen für $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ auch $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ setzen kann, so erhält man, wenn man die beiden für $\frac{d^2F}{dx\,dy}$ sich ergebenden und „algebraisch“ unabhängigen Formen beibehält, das folgende System von Differentialgleichungen zur Bestimmung der Functionen a:

$$\text{(1a)}\quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=5}\frac{\partial F}{\partial a_i}\,\frac{da_i}{dx}=0, && \sum_{i=1}^{i=5}\frac{\partial F}{\partial a_i}\,\frac{da_i}{dy}=0,\\ &\sum_{i=1}^{i=5}\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial y}\,\frac{da_i}{dx}=0, && \sum_{i=1}^{i=5}\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial x}\,\frac{da_i}{dy}=0,\\ &\sum_{i=1}^{i=5}\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial x}\,\frac{da_i}{dx}=0, && \sum_{i=1}^{i=5}\frac{\partial^2 F}{\partial a_i\,\partial y}\,\frac{da_i}{dy}=0.\end{aligned}$$

Wenn wir die Functionaldeterminante von F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ nach a_r, a_s, a_t kurz mit (rst) bezeichnen, können diese Gleichungen auch in folgender nach den Differentialquotienten von $a_1\,a_2\,a_3$ gelösten Form geschrieben werden:*)

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} \frac{da_1}{dx} &= \frac{(4\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dx}+\frac{(5\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dx},\\ \frac{da_2}{dx} &= \frac{(4\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dx}+\frac{(5\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dx},\\ \frac{da_3}{dx} &= \frac{(4\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dx}+\frac{(5\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dx},\\ \frac{da_1}{dy} &= \frac{(4\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dy}+\frac{(5\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dy},\\ \frac{da_2}{dy} &= \frac{(4\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dy}+\frac{(5\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dy},\\ \frac{da_3}{dy} &= \frac{(4\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dy}+\frac{(5\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dy}.\end{aligned}$$

Es ist daher $z=F(x,y,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ *dann und nur dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn die Functionen* a *den Gleichungen* (1) *genügen, und umgekehrt erhält man sämmtliche Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn man sämmtliche Lösungen des Systems* (1) *nimmt.*

*) Wenn $z=F$ eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung ist, kann man die Reihenfolge der a immer so wählen, dass $(1\,2\,3)$ nicht verschwindet, also auch das System (1a) immer auf die Form (1) bringen.

Die Integration des Systems (1) ist wohl ein mit der Lösung der vorgelegten Differentialgleichung äquivalentes Problem; doch giebt diese Transformation der Aufgabe einen nicht unwesentlichen Beitrag zur Aufhellung der Structur der Gleichung und des zwischen den Integralen bestehenden Zusammenhanges.

Man kann die Aufgabe präciser und ohne Beschränkung der Allgemeinheit dahin fassen, dass *aus* $z = F$ *alle andern vollständigen Lösungen der vorgelegten Gleichungen abzuleiten sind.* Dann sind als Werthe der a solche Functionen von x und y zu bestimmen, die wieder 5 willkürliche Constanten enthalten. Setzen wir diese Form der a voraus, und bilden ihre Differentialquotienten, so erhält man durch Elimination der willkürlichen Constanten 10 Differentialgleichungen zur Bestimmung der a, die ein Mayer'sches unbeschränkt integrables System bilden müssen.

Von diesen zehn Gleichungen sind sechs, die Gleichungen des Systems (1) bekannt. *Zwei neue Gleichungen — die siebente und achte — erhält man noch in voller Allgemeinheit ohne jede Integration.*

Wenn man nämlich:

$$\frac{d^2 a_1}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 a_2}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 a_3}{dx\,dy}$$

aus der ersten und zweiten Reihe von Gleichungen in (1) besonders bildet, und die erhaltenen Werthe gleichsetzt, so erhält man wegen der besonderen Form der Gleichungen abermals Differentialgleichungen erster Ordnung, und zwar:

$$(2)\quad \begin{aligned}
&\frac{d}{dy}\frac{(4\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{(4\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dy} \\
&+\frac{d}{dy}\frac{(5\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{(5\,3\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dy} = 0, \\
&\frac{d}{dy}\frac{(4\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{(4\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dy} \\
&+\frac{d}{dy}\frac{(5\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{(5\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dy} = 0, \\
&\frac{d}{dy}\frac{(4\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{(4\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_4}{dy} \\
&+\frac{d}{dy}\frac{(5\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{(5\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\frac{da_5}{dy} = 0.
\end{aligned}$$

Dies sind wohl drei Gleichungen, doch sieht man leicht, dass eine derselben nothwendiger Weise eine algebraische Folge der beiden andern sein muss. Wir hatten zu Beginn in der That nur fünf Gleichungen und die sechste entstand schon dadurch, dass wir zwei verschiedene Formen des $\frac{d^2 F}{dx\,dy}$, die algebraisch von einander unabhängig waren, gesondert benutzten. Bilden wir die neuen Gleichungen nicht

aus dem System (1), sondern aus (1a), so wird aus dem ersten Gleichungspaare:

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial y} \frac{da_i}{dx} = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial x} \frac{da_i}{dy},$$

dieselbe Gleichung, die wir durch Subtraction der in der zweiten Zeile stehenden Gleichungen erhalten. An diesem algebraischen Zusammenhange der Gleichungen wird durch die Benutzung der aufgelösten Form im wesentlichen nichts geändert, und es ist wohl nicht nothwendig, durch directe Rechnung den algebraischen Zusammenhang der Gleichungen (1) und (2) aufzuweisen. Für die gewählte Form erhalten wir eben nur noch die Vereinfachung, dass, nachdem die Werthe der Differentialquotienten von a_1, a_2, a_3 aus (1) eingesetzt wurden, schon in den Gleichungen (2) eine die Folge der übrigen sein muss.

Sind a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 Functionen von x und y mit 5 willkürlichen Constanten:

$$a_i = a_i(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

dann erhält man, wenn

$$C = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

gesetzt wird, wo ω eine willkürliche Function bedeutet, eine Relation von der Form

$$\Phi(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = C.$$

Die Integration des bisher entwickelten, aus acht Gleichungen bestehenden Systems verlangt daher dem Wesen der Sache nach, die Bestimmung solcher Relationen $\Phi = C$, dass, wenn man aus dieser z. B. den Werth von a_5 bestimmt und in die acht Gleichungen einsetzt, das System, welches jetzt noch vier unbekannte Functionen enthält, unbeschränkt integrabel sei, und also ausser C bei der Integration noch vier willkürliche Constanten liefere.

Statt $\Phi = C$ kann man die damit äquivalenten Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \frac{da_i}{dx} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \frac{da_i}{dy} = 0 \end{aligned}$$

setzen, welche mit den acht früheren Gleichungen zusammen die Differentialquotienten $\frac{da_i}{dx}$ und $\frac{da_i}{dy}$ als Functionen von x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bestimmen. Die Bedingung der unbeschränkten Integrabilität muss erfüllt sein, damit die Functionen a fünf willkürliche Constanten enthalten. Man erhält ursprünglich fünf Integrabilitätsbedingungen,

doch sieht man aus der Form der Gleichungen, dass diese sich auf eine einzige reduciren müssen, und *diese*

$$\varrho = 0$$

giebt eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung von Φ, *in welcher* $x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ *als unabhängige Variable auftreten.*

Die Rechnung zur Aufstellung dieser Resolvente braucht nicht ausgeführt zu werden, denn man sieht leicht, dass *diese aus der früher* (§ 6) *entwickelten Resolvente* $R = 0$ *durch eine Transformation entsteht, die durch die gegebene vollständige Lösung* $z = F$ *bestimmt ist.*

Ist nämlich z irgend eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung, so kann man irgend eine Lösung der Gleichungen (1) und (2) mit fünf willkürlichen Constanten durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{gathered} z = F, \quad p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial F}{\partial y}, \\ s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{gathered}$$

charakterisiren. Eliminirt man mit Hülfe der Relation $\Phi = C$ aus diesen Gleichungen die a, so erhält man:

$$u(x, y, z, p, q, s, t) = C,$$

und u muss eine Lösung der Gleichung $R = 0$ sein, denn unter den Lösungen der Gleichung $u = C$ befindet sich eine vollständige Lösung der Gleichung $r + f = 0$.

Die Gleichungen (4) *geben daher die Transformationsformeln an, durch welche die Gleichungen* $\varrho = 0$ *und* $R = 0$ *in einander übergehen, wenn man die unabhängigen Variabeln* $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ *und* z, p, q, s, t *mit einander vertauscht.*

Für vollständige Lösungen höheren Ranges finden analoge Entwicklungen statt, die leicht zu überblicken sind und deshalb hier nicht weiter verfolgt werden sollen.

3. Für specielle Classen von Differentialgleichungen gestattet das zur Bestimmung der a aufgestellte System eine einfachere Behandlung. Dies steht natürlich immer im Zusammenhange mit den Eigenschaften der Gleichung $R = 0$. So seien insbesondere die Gleichungen

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = 0$$

erwähnt, deren vollständige Lösungen die Form

$$z = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4 + a_5 \lambda_5$$

besitzt. In diesem Falle geben die Gleichungen (2) für sich ein System von simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von a_4 und a_5. Jedes Lösungssystem von (2) giebt dann

in (1) eingeführt, ein unbeschränkt integrables System zur Bestimmung von a_1, a_2 und a_3. Aus (2) selbst erhält man für a_5 eine in Bezug auf *alle* Differentialquotienten lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die unbekannte Function a_5 selbst nicht enthält, was eine wesentliche Vereinfachung des Problems bedeutet.

Ist a_5 so bestimmt, so giebt (2) ein unbeschränkt integrables System zur Bestimmung von a_4, —

Es ist nicht ohne Interesse, die hier gegebene Methode zur Variation der Constanten an einem von Lagrange behandelten Beispiele*) zu verfolgen und diese mit jenem Verfahren zu vergleichen, das Lagrange selbst bekanntlich als „plus curieux qu'utile" bezeichnet hat.

Die Differentialgleichung ist:

$$t - mr = 0,$$

und eine vollständige Lösung derselben:

$$z = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 (x^2 + my^2) + a_5 xy.$$

Die Gleichungen (1) werden:

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dx} + x\frac{da_2}{dx} + y\frac{da_3}{dx} + (x^2+my^2)\frac{da_4}{dx} + xy\frac{da_5}{dx} &= 0,\\
\frac{da_3}{dx} + \qquad 2my\frac{da_4}{dx} + \;x\frac{da_5}{dx} &= 0,\\
\frac{da_2}{dx} \qquad + \qquad 2x\frac{da_4}{dx} + \;y\frac{da_5}{dx} &= 0
\end{aligned}$$

und die entsprechenden Gleichungen, wenn statt $\frac{da_i}{dx}$ überall $\frac{da_i}{dy}$ gesetzt wird. Nach den Differentialquotienten von a_1, a_2 und a_3 aufgelöst, ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dx} &= (x^2+my^2)\frac{da_4}{dx} + xy\frac{da_5}{dx},\\
\frac{da_2}{dx} &= -\quad 2x\frac{da_4}{dx} - y\frac{da_5}{dx},\\
\frac{da_3}{dx} &= -\quad 2my\frac{da_4}{dx} - x\frac{da_5}{dx},\\
\frac{da_1}{dy} &= (x^2+my^2)\frac{da_4}{dy} + xy\frac{da_5}{dy},\\
\frac{da_2}{dy} &= -\quad 2x\frac{da_4}{dy} - y\frac{da_5}{dy},\\
\frac{da_3}{dy} &= -\quad 2my\frac{da_4}{dy} - x\frac{da_5}{dy}.
\end{aligned}$$

*) „Sur les intégrales particulières des équations différentielles". Oeuvres de Lagrange, Tome IV; pag. 98 (art. 65).

Hieraus erhält man, dem System (2) entsprechend:

$$2my\frac{da_4}{dx} + x\frac{da_5}{dx} = 2x\frac{da_4}{dy} + y\frac{da_5}{dy},$$
$$\frac{da_5}{dx} = 2\frac{da_4}{dy},$$
$$2m\frac{da_4}{dx} = \frac{da_5}{dy},$$

von welchen Gleichungen in der That — unsern allgemeinen Entwicklungen entsprechend — die erste entsteht, wenn man die zweite Gleichung mit x, die dritte mit y multiplicirt und addirt. Man hat demnach zur Bestimmung von a_4 und a_5 das System

$$\frac{da_5}{dx} = 2\frac{da_4}{dy}; \quad \frac{da_5}{dy} = 2m\frac{da_4}{dx}$$

und hieraus:

$$\frac{d^2a_5}{dy^2} = m\frac{d^2a_5}{dx^2},$$

dieselbe Gleichung, die ursprünglich für z vorgelegt war. Das simultane System für a_4 und a_5 kann übrigens hier mittels Differentialgleichungen erster Ordnung integrirt werden. Schreibt man die Gleichungen in der Form:

$$\frac{da_5}{dx} = 2\frac{da_4}{dy},$$
$$2\sqrt{m}\frac{da_4}{dx} = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{da_5}{dy},$$

oder schliesslich nach Addition und Subtraction dieser Gleichungen:

$$\frac{d(a_5 + 2\sqrt{m}\,a_4)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{d(a_5 + 2\sqrt{m}\,a_4)}{dy},$$
$$\frac{d(a_5 - 2\sqrt{m}\,a_4)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{d(a_5 - 2\sqrt{m}\,a_4)}{dy},$$

so erhält man:

$$a_5 + 2\sqrt{m}\,a_4 = 2\varphi\,(x + y\sqrt{m}),$$
$$a_5 - 2\sqrt{m}\,a_4 = 2\psi\,(x - y\sqrt{m}),$$

wo φ und ψ beliebige Functionen bedeuten, und hieraus:

$$a_5 = \varphi\,(x + y\sqrt{m}) + \psi\,(x - y\sqrt{m})$$

oder endlich, da die Differentialgleichung für z und a_5 dieselbe war, auch

$$z = \varphi\,(x + y\sqrt{m}) + \psi\,(x - y\sqrt{m}).$$

4. Der Vollständigkeit wegen sei hier auch noch eine andere Methode zur Variation der Constanten kurz erwähnt, aus welcher sich abermals eine neue Form der resolvirenden Gleichungen ergiebt. Eine

vollständige Lösung (0^{ten} Ranges) kann auch durch das unbeschränkt integrable System:

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

charakterisirt werden. Dieses sei, nach r, s, t aufgelöst:

$$r = \varphi_1(x, y, z, p, q, a_1, a_2);$$
$$s = \varphi_2(x, y, z, p, q, a_1, a_2),$$
$$t = \varphi_3(x, y, z, p, q, a_1, a_2).$$

Jede vollständige Lösung kann durch dieses Gleichungssystem dargestellt werden, wenn a_1 und a_2 passend gewählte Functionen von x, y, z, p, q und zweier willkürlicher Constanten sind. Und zwar *müssen*, wie man aus den zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Integrabilitätsbedingungen unmittelbar entnimmt, *a_1 und a_2 ein Lösungssystem des folgenden simultanen Systems zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung sein:*

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_1}\frac{da_1}{dy} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_2}\frac{da_2}{dy} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2}\frac{da_2}{dx},$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}\frac{da_1}{dy} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_2}\frac{da_2}{dy} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial a_2}\frac{da_2}{dx},$$

wo die Operationen $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ folgende Bedeutung besitzen:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \varphi_1\frac{\partial}{\partial p} + \varphi_2\frac{\partial}{\partial q}.$$
$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \varphi_2\frac{\partial}{\partial p} + \varphi_3\frac{\partial}{\partial q}.$$

Budapest, November 1883.

Ueber Differentialinvarianten.

Von

Sophus Lie in Christiania.

In der nachstehenden kurzgefassten Abhandlung beschäftige ich mich überhaupt mit *continuirlichen Transformationsgruppen*, *die unendlich viele Parameter enthalten*, und *skizzire* eine allgemeine *Invariantentheorie* derselben, deren Hauptsatz ich der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania im Jahre 1883 mitgetheilt habe.

Gleichzeitig erlaube ich mir einerseits einige ältere Untersuchungen über continuirliche Gruppen mit einer begrenzten Anzahl von Parametern zu resumiren, andererseits einige theilweise allgemeine, theilweise persönliche Bemerkungen über die Beziehungen meiner vieljährigen Arbeiten über Differentialgleichungen zu den Untersuchungen anderer Forscher hinzuzufügen. Sind meine Citate unvollständig, was wohl zu befürchten ist, so werde ich jede etwaige Berichtigung in späteren Publicationen verwerthen.

Obwohl ich im Folgenden sehr häufig meine eigenen älteren Arbeiten citire, bemerke ich doch ausdrücklich, dass der Leser, ausser der allgemeinen Theorie der (linearen) partiellen Differentialgleichungen 1. O. und dem Begriffe Berührungstransformation nur noch die Elemente meiner Theorie der Transformationsgruppen (Math. Ann. Bd. XVI) zu kennen braucht, um die nachstehende Arbeit verstehen zu können.

Einleitende Bemerkungen.

1. Schon bei meinen ersten Untersuchungen über Differentialgleichungen, welche bis in die Jahre 1869—72 zurückgehen, war eine consequente Anwendung aller Punkttransformationen resp. aller Berührungstransformationen das zu Grunde liegende Princip.

Ich versuchte eine *allgemeine Transformationstheorie* zu entwickeln und für die Theorie der Differentialgleichungen zu verwerthen. Ich fragte einerseits nach den *Criterien*, vermöge deren sich entscheiden lässt, ob gewisse vorgelegte Differentialgleichungen oder andere ana-

lytische Ausdrücke sich durch zweckmässige Transformationen auf gegebene Formen bringen lassen, und versuchte andererseits, wenn die gestellte Aufgabe möglich war, alle Berührungs- oder Punkttransformationen zu finden, die eine solche Umformung leisten. In sehr vielen von meinen analytischen Arbeiten beschäftigte ich mich mit derartigen Problemen.

Mein erster Schritt auf diesem Wege war die rationelle Begründung des Begriffs *Berührungstransformation* und der zweite war die principielle Einführung des Begriffs *infinitesimale Transformation.* Ich beabsichtigte zunächst die *Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen,* d. h. die Entwickelung des Studiums solcher Eigenschaften der Differentialgleichungen, welche bei allen Berührungstransformationen (oder Punkttransformationen) ungeändert bleiben. In diesem Sinne gab ich insbesondere eine rationelle Begründung der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.*)

Ein weiterer Schritt zur Durchführung meines allgemeinen Programms war *die Begründung einer allgemeinen Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen mit einer begrenzten Anzahl von Parametern und die allgemeine Verwerthung dieses Begriffs für die Theorie der Differentialgleichungen.*

Meine Untersuchungen über derartige Gruppen, die *endliche continuirliche Gruppen* heissen mögen, habe ich in grosser Ausdehnung, wenn auch lange noch nicht vollständig in norwegischen Zeitschriften veröffentlicht (theilweise auch in den Gött. Nachr., Decbr. 1874, in den Math. Ann. Bd. XI, p. 487 und Bd. XVI) und ich hoffe sie bald in ausführlicher Darstellung einem grösseren Publikum vorlegen zu können.

Endlich entwickelte ich neuerdings**) die ersten Principien einer allgemeinen *Theorie der continuirlichen Gruppen mit unendlich vielen Parametern.* Es zeigt sich, dass es möglich ist, alle derartigen Gruppen, die *unendliche continuirliche Gruppen* heissen mögen, durch zweckmässige analytische Umformungen auf gewisse einfache canonische Formen zu bringen. Bei dem allgemeinen Studium der Differentialgleichungen werden auch die unendlichen continuirlichen Gruppen eine fundamentale Rolle spielen.

2. Sind die Grössen $x_1 \dots x_n\ z_1 \dots z_q$ mit den neuen Variabeln $x_1' \dots x_n'\ z_1' \dots z_q'$ durch gewisse Transformationsgleichungen, die

*) Man sehe die Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1871, 1872, 1873, 1874 und 1875, wie auch Math. Ann. Bd. VIII (Begründung einer *Invariantentheorie der Berührungstransformationen* 1874), Bd. IX und Bd. XI; Göttinger Nachrichten von 1872.

**) Gesell. d. W. zu Christiania 1883, Nr. 12.

eine Gruppe bilden, verknüpft, und fasst man dabei $z_1 \dots z_q$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$ und dementsprechend $z_1' \dots z_q'$ als Functionen von $x_1' \dots x_n'$ auf, so sind die Differentialquotienten der z_i nach den x_k gewisse Functionen von x_k', z_i' und den Differentialquotienten der Grössen z_i' nach den x_k'.

Unter diesen Voraussetzungen nenne ich eine Function

$$\Omega\left(x_1 \dots x_n \; z_1 \dots z_q \; \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_m} \cdots\right)$$

eine *Differentialinvariante der betreffenden Gruppe*, wenn sie bei Einführung der accentuirten Buchstaben ihre Form behält, wenn also die Gleichung:

$$\Omega\left(x_1 \dots z_q \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_m} \cdots\right) = \Omega\left(x_1' \dots z_q' \frac{\partial z_1'}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial^2 z_i'}{\partial x_k' \partial x_m'} \cdots\right)$$

stattfindet.

In der vorliegenden Note begründe ich ein allgemeines fundamentales Theorem, das für specielle Fälle schon früher aufgestellt worden ist. Dasselbe kann folgendermassen formulirt werden:

Jede unendliche (wie endliche) continuirliche Gruppe bestimmt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, die sich als Lösungen vollständiger Systeme definiren lassen.

Dieser Satz ist für Gruppen mit einer begrenzten Anzahl von Parametern sozusagen unmittelbar evident. Ich habe ihn auch für diesen speciellen Fall längst gekannt und schon 1872*) und 1874 sowie bei späteren Gelegenheiten, wenn auch nur andeutungsweise, berührt. In präciserer Form theilte ich denselben der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania im Juli 1882 mit.

Für Gruppen mit unendlich vielen Parametern liegt der betreffende Satz, der als specieller Fall die von Gauss und seinen Nachfolgern**) gegebene Deformationstheorie der Flächen etc. umfasst, etwas tiefer. Für einen speciellen Fall, der sich auf die Gruppe aller Berührungstransformationen oder Punkttransformationen bezog, *deutete ich ihn allerdings schon im Jahre 1872 (Gött. Nachr. Nr. 25, p. 478—479) an.* Dass derselbe sich auf *alle* unendlichen continuirlichen Gruppen ausdehnt, theilte ich der Gesellsch. der Wissensch. zu Christiania im Nov. 1883 ausdrücklich mit.

---

*) Gesellschaft d. W. zu Christiania 1872: Zur Theorie der Differentialprobleme; Gött. Nachr., Dec. 1874.

**) Ich denke hier an die bekannten Untersuchungen, die von Minding, Beltrami, Christoffel, Lipschitz und Weingarten herrühren. Meine Theorien stehen im Uebrigen selbstverständlicherweise in genauester Beziehung zu der von Cayley, Sylvester, Aronhold, Clebsch, Gordan u. s. w. begründeten allgemeinen Invariantentheorie der linearen Transformationen.

§ 1.

Functionen und Gleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten.

In diesem ersten Paragraphen resumire ich einige ältere Untersuchungen über Functionen von $x_1 \ldots x_n$, die eine endliche continuirliche Gruppe gestatten. Gleichzeitig erlaube ich mir ausführlich auf die Beziehungen zwischen Klein's und meinen alten Untersuchungen auf diesem Gebiete einzugehen.

3. In den Jahren 1869—70 nahm ich bei liniengeometrischen Untersuchungen über denjenigen Liniencomplex, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse schneiden, meinen Ausgangspunkt in der Bemerkung, dass dieses Geradensystem dreifach unendlich viele vertauschbare lineare Transformationen gestattet. Ich betrachtete die von Complexgeraden umhüllten Curven und studirte eine umfassende Categorie von Berührungstransformationen, welche alle solche Curven in gleichartige überführten.

Hiermit verband sich die Untersuchung einer merkwürdigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Integralflächen derselben sind dadurch charakterisirt, dass in jedem ihrer Punkte die Haupttangenten zu den beiden unserem Complexe angehörigen Tangenten harmonisch liegen. *Diese partielle Differentialgleichung gestattet eine sehr interessante unendliche Gruppe von Berührungstransformationen*, mit deren Eigenschaften ich mich eingehend beschäftigte. Ich integrirte nicht allein die besprochene Gleichung zweiter Ordnung, sondern insbesondere auch diejenige *partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche ein singuläres erstes Integral jener Gleichung darstellt.* Die hierbei benutzte bemerkenswerthe neue Methode zeigte sich einer grossen Verallgemeinerung fähig.

Alle diese Untersuchungen*), die nur äusserst unvollständig publicirt worden sind, setzte ich successiv meinem damaligen Studiengenossen, meinem Freund Felix Klein auseinander, der schon zu dieser Zeit Plücker's Nachlass herausgegeben und dabei u. a. auf interessante Untersuchungen über gewisse *discontinuirliche* projectivische Gruppen, die in der Liniengeometrie eine wichtige Rollen spielen, geführt worden war.

Klein interessirte sich lebhaft für meine gruppentheoretischen

---

*) Ein Résumé von einigen meiner Resultate gab ich im Wintersemester 1869—70 in einem Seminarvortrage bei Prof. Kummer; andererseits auch in den Göttinger Nachr. (Januar 1870). — Man sehe auch Gesellschaft d. W. zu Christiania 1872 (kurzes Résumé . . .) und Archiv for Math. og Naturv. Christiania 1877. Bd. 2 (Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen § 1).

Studien, die von seinen eigenen insofern principiell verschieden waren, als ich continuirliche, er dagegen discontinuirliche Gruppen betrachtete. Er munterte mich energisch in meinen Untersuchungen auf und nahm auch thätigen Antheil an denselben. Wir publicirten einige gemeinsame Noten über diejenigen Curven in der Ebene und im Raume, welche unendlich viele lineare Transformationen gestatten, und zugleich über diejenigen Flächen, welche zweifach unendlich viele vertauschbare lineare Transformationen zulassen*). Es war unsere Absicht, diese wichtigen, wenn auch speciellen Untersuchungen weiter zu verfolgen. Vorläufig wurden jedoch unsere Interessen in andere Richtungen gezogen.

Ich entdeckte eine merkwürdige Berührungstransformation, die gerade Linien in Kugeln umwandelte, und transformirte hierdurch mit einem Schlage die *Plücker'sche Liniengeometrie* in eine *neue Kugelgeometrie*. Hierbei ergab sich u. A., dass die Gruppe aller projectivischen Transformationen des Raumes sich in die Gruppe aller derjenigen Berührungstransformationen, die Kugeln in Kugeln überführen, umwandeln lässt.**)

Klein andererseits entwickelte umfassende geometrische und metaphysische Ideen, besonders in seiner 1872 erschienenen, tiefgehenden Programmschrift: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, Deichert), deren fundamentale Bedeutung mit jedem Jahre in immer weiteren Kreisen erkannt wird.

Bei gegenwärtiger Gelegenheit beschränke ich mich darauf, eine Stelle (p. 40) aus dieser Abhandlung zu citiren, in welcher ein von uns beiden gestelltes allgemeines Problem mit folgenden Worten besprochen wird:

---

*) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces par F. Klein et S. Lie, Comptes Rendus 1870; Ueber diejenigen ebenen Curven etc. Math. Ann. Bd. IV (1871).

**) Die im Texte besprochene Gruppe erhielt neuerdings durch Stephanos schöne Entdeckungen auf dem Gebiete des Quaternionencalculs ein neues und erhöhtes Interesse (Math. Ann. Bd. XXII, p. 589). Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir an zwei alte von mir herrührende Bemerkungen zu erinnern. Die im Texte besprochene Gruppe von Kugeltransformationen lässt sich auffassen als die *Gruppe aller conformen Punkttransformationen eines vierfach ausgedehnten Raumes* (Math. Ann. Bd. V, p. 186, Gött. Nachr. 1871, p. 207—208, 200—203). Die Gruppe aller projectivischen Transformationen des Raumes, die eine gewisse Gerade invariant lassen, lässt sich umwandeln in die Gruppe aller Berührungstransformationen, welche Kugeln in Kugeln, parallele Ebenen in parallele Ebenen überführen (Math. Ann. Bd. V, p. 186; Göttinger Nachr. 1871, p. 200). Diese letzte Gruppe, auf die ich speciell die Aufmerksamkeit gelenkt hatte, ist neuerdings von Laguerre und Stephanos andererseits auch von Darboux studirt worden. Ich hatte ausdrücklich bemerkt, dass alle Flächen mit gemeinsamem sphärischen Bilde in ebensolche Flächen übergingen, wie auch, dass das neue sphärische Bild durch eine conforme Transformation der Bildkugel hervorging.

„Bei der Behandlung einer Mannigfaltigkeit unter Zugrundelegung einer Gruppe, fragen wir (d. h. Klein und Lie) ... zunächst ... nach den Gebilden, die durch alle Transformationen der Gruppe ungeändert bleiben. Aber es giebt Gebilde, welche nicht alle, aber einige Transformationen der Gruppe zulassen ....“

4. Die allgemeine analytische Erledigung dieser Frage, die insbesondere für eine synthetische Auffassung gar keine principielle Schwierigkeit bietet, liegt in einigen von mir 1874 entwickelten Theorien*), die hier kurz reproducirt werden sollen.

Eine infinitesimale Transformation zwischen $x_1\, x_2 \ldots x_n$, welche diesen Grössen die Incremente

$$\delta x_k = \xi_k (x_1\, x_2 \ldots x_n)\, \delta t^{**})$$

ertheilt, bezeichne ich mit dem Symbol:

$$Bf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Dieselbe giebt der Function $\Omega(x_1 \ldots x_n)$ das Increment $B\Omega \cdot \delta t$.

Daher gestattet Ω die infinitesimale Transformation Bf, wenn $B\Omega$ identisch verschwindet. (Gesell. d. W. zu Christiania, Nov. 1874: Zur Theorie des Integrabilitätsfactors p. 4; Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobi'schen Multiplicatortheorie p. 16; Math. Ann. Bd. XI, p. 535). Eine *Gleichung* $\Phi = 0$ lässt die infinitesimale Transformation Bf zu, wenn die Gleichung $B\Phi = 0$ eine blosse Folge von $\Phi = 0$ ist. [Dementsprechend gestattet ein Gleichungssystem

$$\Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0, \ldots, \Phi_q = 0$$

die infinitesimale Transformation Bf, wenn die Ausdrücke $B\Phi_k$ sämmtlich vermöge der Relationen $\Phi_i = 0$ verschwinden.]

Für diese Auffassung, die meinen Arbeiten über die allgemeine Transformationstheorie zu Grunde liegt, deckt sich die Aufsuchung der gemeinsamen Lösungen f_k von gegebenen linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$B_1 f = 0,\ B_2 f = 0, \ldots, B_r f = 0$$

mit der Bestimmung aller Functionen, welche die infinitesimalen Transformationen $B_k f$ gestatten. *Die allgemeine Erledigung dieses letzten*

---

*) Man sehe auch Abhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1872: Zur Theorie der Differentialprobleme. p. 132.

**) Es wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die ξ_k gewöhnliche Potenzreihen der x_k sind. Ich sehe also von solchen Werthsystemen x_k ab, für welche diese Forderung nicht erfüllt ist.

Problems liegt daher nach mir geradezu in der Jacobi-Clebsch'schen Theorie der vollständigen Systeme.

Bilden also $B_1 f = 0, \ldots, B_q f = 0$ ein vollständiges System und sind $f_1, f_2, \ldots, f_{n-q}$ ein System von Lösungen derselben, so ist

$$\Omega(f_1 f_2 \ldots f_q)$$

die allgemeine Form einer Function, welche die infinitesimalen Transformationen $B_k f$ gestattet. Wenn eine Gleichung $\Phi = 0$ die Gleichungen $B_k \Phi = 0$ unseres vollständigen Systems erfüllt, so hat sie im Allgemeinen die Form:

$$\Phi(f_1 f_2 \ldots f_{n-q}) = 0.$$

Ist diess nicht der Fall, so muss Φ bekanntlich eine solche Form besitzen, dass die Unabhängigkeit der Gleichungen $B_k f = 0$ durch $\Phi = 0$ aufgehoben wird. Man findet daher alle derartigen Gleichungen $\Phi = 0$ durch Determinantenbildung, wobei jedoch zu bemerken ist, dass man im Allgemeinen nachträglich verificiren muss, ob die in dieser Weise gefundenen Gleichungen wirklich die Relationen $B_k f = 0$ befriedigen. [In ähnlicher Weise findet man ebenfalls das allgemeinste Gleichungssystem $\Phi_k = 0$, welches die Gleichungen $B_i \Phi_k = 0$ erfüllt].

Eine continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen $x_1 \ldots x_n$ mit r Parametern enthält ∞^{r-1} infinitesimale Transformationen. Unter denselben lassen sich immer r, etwa $B_1 f\, B_2 f \ldots B_r f$ wählen, aus denen sich die übrigen linear zusammensetzen, so dass also ihr allgemeines Symbol das folgende wird:

$$c_1 B_1 f + c_2 B_2 f + \cdots c_r B_r f. \qquad (c_k = \text{Const.})$$

Dabei bestehen die charakteristischen Relationen*)

$$\text{(A)} \qquad B_i\big(B_k(f)\big) - B_k\big(B_i(f)\big) = \sum c_{iks} B_s f.$$

Jede endliche Transformation der Gruppe wird erzeugt durch unendlich-malige Wiederholung einer gewissen infinitesimalen Transformation $\sum c_k . B_k f$ der Gruppe. Daher sind diejenigen Functionen Ω oder diejenigen Gleichungen $\Phi = 0$, welche unsere Gruppe gestatten, wiederum definirt durch die Gleichungen:

$$B_1 f = 0,\ B_2 f = 0, \ldots, B_r f = 0,$$

die immer ein vollständiges System

$$B_1 f = 0 \ldots B_q f = 0, \quad q \leq r$$

*) Im Archiv for Math. og Naturv. Bd. 1, p. 178—181, 1876 zeigte ich, dass die Auffindung aller Untergruppen einer vorgelegten Gruppe sich durch algebraische Operationen erledigen lässt, und sich überdies auf die Discussion einer *linearen* Gruppe reducirt. — Ein Beweis meiner alten Formel (A), die auch in dieser Arbeit eine fundamentale Rolle spielt, folgt später, nämlich in § 3.

bestimmen. [Man sehe Gött. Nachr. Dec. 1874; Math. Ann. Bd. XVI, p. 462; Archiv for Math. og Natur. Bd. I, p. 163—165, 1876; Bd. III, p. 118 im Anfange des Jahres 1878].

In der zuletzt citirten Arbeit betrachtete ich eine ganz beliebige Gruppe $B_1 f \dots B_q f \dots B_r f$ und benutzte die zugehörigen Invarianten, also die Lösungen $f_1 \dots f_{n-q}$ des vollständigen Systems $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0, \dots, B_q f = 0$ bei der Behandlung eines schwierigen Problems, das ich in der nachstehenden Arbeit wieder aufnehmen werde.*) (Man sehe auch meine vierte Abhandlung über Transformationsgruppen in meinem Archiv Bd. 3, p. 379, 1878).

Jede endliche Transformation der Gruppe $B_1 f \dots B_r f$ wird erhalten durch unendlichmalige Wiederholung einer infinitesimalen Transformation $c_1 B_1 f + \cdots c_r B_r f$, das heisst durch Integration der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$c_1 B_1 f + \cdots + c_r B_r f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

mit den arbiträren Constanten $c_1\, c_2 \dots c_r$ (man sehe z. B. Math. Ann. Bd. XVI, p. 464). *Kennt man daher die endlichen Transformationen einer vorgelegten Gruppe $B_k f$, so verlangt die Auffindung der früher besprochenen Grössen $f_1\, f_2 \dots f_{n-q}$ nur sogenannte ausführbare Operationen***), deren Durchführung jedoch unter Umständen Schwierigkeiten darbieten kann.

5. Klein und ich hatten, wie schon gesagt, 1870 alle Flächen mit ∞^2 vertauschbaren linearen Transformationen in sich bestimmt. Im Jahre 1882 beschäftigte sich Poincaré (Journal de l'école poly-

*) Ich werde annehmen, dass die Gleichungen $B_1 f = 0 \dots B_r f = 0$, die sich im Allgemeinen auf $q \leqq r$ Gleichungen reduciren, für diejenigen speciellen Werthsysteme, für welche gewisse bekannte Determinanten $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r$ verschwinden, sich auf $q - m$ Gleichungen $B_k f = 0$ reduciren. *Dann ist es jedenfalls sicher, dass unsere Gruppe das Gleichungssystem $\Phi_k = 0$ invariant lässt* [Math. Ann. Bd. XVI, p. 474—478; Archiv for Math. og Nat., 1883, p. 195]. Giebt es unter den Relationen $\Phi_k = 0$ weniger als $n - q + m$ unabhängige, so giebt es offenbar invariante Gleichungssysteme, die ausser den Relationen $\Phi_k = 0$ noch gewisse hinzutretende Gleichungen enthalten.

Wenn daher ein Gleichungssystem unsere Gruppe gestattet, so lässt es sich im Allgemeinen ausdrücken durch gewisse endliche Relationen zwischen den Invarianten f_k des Textes. Ist diess nicht möglich, so umfasst es jedenfalls ein Gleichungssystem $\Phi_k = 0$ von der früher betrachteten Art, wozu unter den angegebenen Bedingungen noch weitere, leicht definirbare Relationen hinzutreten können.

**) Der Schluss im Texte beruht darauf, dass die Integration des vollständigen Systems $B_1 f = 0 \dots B_q f = 0$ immer geleistet werden kann, sobald jede der q Gleichungen $B_i f = 0$ integrirt ist.

technique t. 31), dessen Arbeiten über discontinuirliche Gruppen von so glänzendem Erfolge gekrönt worden sind, beiläufig mit der Frage nach allen Flächen, die mehrere infinitesimale lineare Transformationen gestatten, und erledigte dieses Problem unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen.

Einige Monate später gab ich*) eine, wenn ich nicht irre, erschöpfende Bestimmung aller nicht geradlinigen Flächen, die eine lineare Gruppe gestatten. Dabei war für mich die Hauptsache *die von Poincaré nicht berührte Frage nach allen linearen Gruppen*, deren Transformationen dadurch definirt sind, dass sie eine Fläche (oder Curve) invariant lassen.**) In einer späteren Arbeit (Comptes rendus 1883) hat sich wiederum Poincaré mit ähnlichen Untersuchungen in einem n-fach ausgedehnten Raume beschäftigt.

An dieser Stelle gedenke ich noch einiger von Picard skizzirten, sehr bemerkenswerthen Untersuchungen über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die sich auf eine Discussion der Untergruppen in der allgemeinen projectivischen Gruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit beziehen. (Comptes rendus 1883).

6. Zur Illustration der vorangehenden allgemeinen Betrachtungen werde ich kurz andeuten, in welchem Verhältniss sie zu der alten, von Cayley, Sylvester und ihren Nachfolgern begründeten Invariantentheorie stehen.

In die binäre Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a y^n = f$$

führe ich neue Variabeln $x_1\, y_1$ ein durch die lineare Substitution:

$$\text{(A)} \qquad x = l x_1 + m y_1, \quad y = n x_1 + p y_1.$$

*) Archiv for Math. og Naturv. 1882, p. 179—193. In einer Schlussnote fügte ich einige allgemeine Bemerkungen über beliebige Gruppen und ihre Differentialinvarianten hinzu. Dieselben präcisiren einen im nächsten Paragraphen citirten Passus aus meiner 1872 publicirten Note: Zur Theorie der Differentialprobleme. Ges. d. W. zu Christiania 1872, p. 132.

Hier möge die Bemerkung hinzugefügt werden, dass die *Cayley'sche Linienfläche* 3. *O.* neben den Flächen zweiten Grades die einzige nicht developpable Regelfläche darstellt, die mehr als zwei infinitesimale lineare Transformationen zulässt. Die Cayley'sche Regelfläche gestattet ausser den beiden von Klein und mir entdeckten permutablen infinitesimalen Transformationen noch eine dritte derartige Transformation. Die Fläche zweiten Grades lässt bekanntlich sechs solche Transformationen zu.

**) Bei derselben Gelegenheit machte ich die für Linien- und Kugelgeometrie interessante Bemerkung, dass die gerade Linie und die Kugel die einzigen Figuren im Raume sind, welche durch Ausführung aller Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen ∞^4 und nur ∞^4 verschiedene Lagen annehmen. Hierin liegt, dass die *Plücker'sche Liniengeometrie* und meine *Kugelgeometrie* nach der Natur der Sache eine ausgezeichnete Stellung einnehmen.

Dann erhält F die analoge Form:

$$F = b_n x_1^n + b_{n-1} x_1^{n-1} y + \cdots + b_1 x y^{n-1} + b y^n,$$

und dabei sind die neuen Coefficienten b_k gewisse Functionen von l, m, n, p und den a_i:

$$(\mathrm{B}) \qquad b_k = \Pi_k (a\, a_1 \ldots a_n\, l\, m\, n\, p).$$

Die Gleichungen (B) bestimmen eine Gruppe und wenn eine Function der a_k diese Gruppe gestattet, so ist sie eine absolute Invariante von F gegenüber der linearen Gruppe (A).

Um diese Invarianten zu berechnen, bilde ich also die infinitesimalen Transformationen der Gruppe $b_k = \Pi_k$, was keine Schwierigkeit bietet und erhalte hierdurch ein zuerst von Cayley aufgestelltes vollständiges System, dessen Lösungen die gesuchten Invarianten sind.

Bemerkt man, dass die vereinigten Gleichungen (A) und (B) wiederum eine Gruppe bilden, und sucht man die bei dieser Gruppe invarianten Functionen von $x\,y$ und den a_k, so erhält man die Covarianten der Form F.

Für diesen speciellen Fall deckt sich also meine Theorie mit der Grundlage der alten Invariantentheorie (insbesondere der binären Formen).

§ 2.

Differentialinvarianten der continuirlichen, endlichen Gruppen.

Die allgemeine Betrachtung von Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten, gehört, soviel ich weiss, mir.

7. In fast allen meinen Arbeiten aus den Jahren 1871 und 1872 gab ich Andeutungen über die Verwerthung von bekannten infinitesimalen Transformationen, welche gegebene Differentialgleichungen in sich überführen. Ich setzte voraus, dass die bekannten Transformationen eine Gruppe bestimmten; und zwar gingen meine ersten Bestrebungen darauf hinaus, für den Fall, dass nicht allein die infinitesimalen sondern zugleich die *endlichen* Transformationen der Gruppe bekannt waren*), durch Einführung zweckmässiger Coordinaten eine Reduction des Problems zu erreichen. Da ich indess bald bemerkte, dass schon die blosse Berücksichtigung der infinitesimalen Transformationen eine so grosse Erniedrigung in der Ordnung der betreffenden Integrationen herbeiführte, als mir überhaupt zu erreichen möglich war, so *beschränkte ich mich in meinen fortgesetzten eingehenden Arbeiten*

*) Die Voraussetzung, dass nicht allein gewisse infinitesimale sondern zugleich die entsprechenden endlichen Transformationen bekannt sind, deckt sich mit der Annahme, dass die von den infinitesimalen Transformationen beschriebenen Bahncurven bekannt sind.

auf den Fall, dass nur die infinitesimalen und nicht zugleich die endlichen Transformationen der Gruppe bekannt waren. Es entging aber keineswegs meiner Aufmerksamkeit, dass man, wenn auch die endlichen Transformationen gegeben waren, durch passende Wahl der Variabeln eine gewisse formelle Vereinfachung erreichen konnte. Erst 1882 nahm ich die Voraussetzung, dass auch die *endlichen* Transformationen der betreffenden Gruppe gegeben waren, wieder auf und zeigte jetzt *eingehend*, welcher Vortheil sich hieraus gewinnen liess.

Ein kurzgefasstes *Programm für meine gesammten späteren Arbeiten* auf diesem Gebiete gab ich in der Note: Zur Theorie der Differentialprobleme (Ges. d. W. zu Christiania 1872) in den folgenden Worten:

> „Es ist mir gelungen meine Arbeiten über partielle Gleichungen mit infinitesimalen Transformationen nach verschiedenen Seiten hin zu erweitern, insbesondere auch auf das Pfaff'sche Problem und simultane Systeme gewöhnlicher Gleichungen auszudehnen. Ich betrachte sowohl permutable Transformationen als auch solche, die eine Gruppe bilden. Es gelingt entweder eine Zahl Integrale sogleich aufzustellen, oder auch das Problem in einfachere zu zerlegen. Vereinfachungen anderer Art treten ein, wenn gewisse Differentialgleichungen sich integriren lassen, welche in gewissem Sinne den betreffenden Transformationen zugeordnet sind.*) Unter diese Betrachtungen subsumiren sich viele alte wie neue Theorien."

Im December 1874 gab ich in den Göttinger Nachrichten eine merkwürdige und fundamentale Reduction aller endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene auf gewisse canonische Formen. Ich beschäftigte mich gleichzeitig eingehend mit den zu einer jeden Gruppe gehörigen invarianten Differentialgleichungen erster, zweiter und dritter Ordnung. Meine Classification aller dieser Gruppen war auf die Betrachtung der invarianten Differentialgleichungen von der niedrigsten Ordnung begründet. Die Bedeutung dieser Untersuchungen für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen kündigte ich am Schlusse der citirten Note mit den folgenden Worten an:

> „Aber besonders möchte ich die Beziehungen hervorheben, in der diese Betrachtungen zur Lehre von den

*) In meiner später eingeführten Terminologie liesse sich der Text präciser folgendermassen redigiren: „Vereinfachungen anderer Art treten ein, wenn die den bekannten infinitesimalen Transformationen $B_k f$ entsprechenden Gleichungen $B_k f = 0$ sich integriren lassen, anders ausgesprochen, wenn die endlichen Gleichungen der Gruppe bekannt sind. Dann ist es nämlich möglich, zweckmässige neue Variabeln einzuführen."

Differentialgleichungen stehen. Hat man eine Differentialgleichung beliebiger Ordnung zwischen zwei Variabeln, so kann dieselbe Berührungstransformationen in sich selbst zulassen, die dann nothwendig eine der aufgezählten Gruppen bilden. Es kann darauf eine Classification dieser Gleichungen gegründet werden und bei denjenigen Gleichungen, die überhaupt Transformationen in sich zulassen, ergiebt sich daraus eine rationelle Theorie ihrer Integration. Eine solche besondere Classe bilden z. B. die *linearen* Gleichungen zusammen mit allen denjenigen, die durch Berührungstransformation auf sie zurückgeführt werden können .... Für partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zwischen beliebig vielen Variabeln gelten ähnliche Betrachtungen, und es ist hiermit eine fruchtbare Untersuchungsrichtung angedeutet. Die Bestimmung der Berührungstransformationen, welche eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in sich überführen, deckt sich geradezu mit deren Integration."

Auch bei vielen anderen Gelegenheiten habe ich stark hervorgehoben, dass meine Theorie der Transformationsgruppen wichtige neue Gesichtspunkte für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen liefert. Man sehe z. B. Archiv for Math. og Naturv. Bd. I, p. 153, wo ich mich folgendermassen ausdrückte: „Weitere Abhandlungen werden ... im Anschlusse an die dargestellten Theorien neue Gesichtspunkte für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen entwickeln" (1876). Siehe ebenfalls p. 19 desselben Bandes; wie auch Math. Ann. Bd. XVI, p. 441 und p. 525—528 u. s. w.

In den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania für den Nov. 1874 (vergl. auch Math. Ann. Bd. XI, p. 487 u. s. f.) entwickelte ich eingehend die Grundzüge einer allgemeinen Integrationstheorie eines vollständigen Systems:

$$A_1 f = 0 \ldots A_q f = 0, \quad (x_1 \ldots x_n),$$

das eine Anzahl bekannter infinitesimaler Transformationen gestattet. Ich erlaube mir folgendes aus dem Anfange und dem Schlusse dieser Arbeit zu citiren:

„Es gelingt mir eine rationelle Theorie zu entwickeln, die aller Wahrscheinlichkeit nach das Grösstmögliche leistet. Bei einer späteren Gelegenheit werde ich die Frage, ob es möglich ist einen noch grösseren Vortheil aus den bekannten Transformationen zu ziehen, näher präcisiren und wenn nicht erledigen, jedenfalls ihrer Lösung näher bringen. ... Eigentlich spielt auch diejenige Theorie der Transformationsgruppen, die ich in neuester Zeit andeutungsweise ent-

wickelt habe, eine fundamentale Rolle; freilich tritt das in dieser vorläufigen Arbeit nicht klar hervor. . . . . .

. . . .

Für den Augenblick muss ich mich damit begnügen, *die Grundprincipien darzulegen* und einige Fälle durchzuführen. . . . Ein besonderes Interesse bietet die Anwendung dieser Theorien auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zwischen zwei Variabeln, welche gewisse infinitesimale Berührungstransformationen gestatten."

8. Die von mir in der erstgenannten Arbeit zwar angekündigte, *nicht aber durchgeführte* Classification beruhte nun eben auf dem Satze, dass jede endliche continuirliche Gruppe unendlich viele Differentialinvarianten bestimmt, die sich als Lösungen von vollständigen Systemen definiren lassen, zusammen mit der Bemerkung, dass diese Invarianten berechnet werden können, wenn die endlichen Gleichungen der Gruppe bekannt sind. 1874 hatte ich indess keineswegs die zur vollständigen Durchführung dieser Classification im Einzelnen erforderlichen Rechnungen durchgeführt und noch weniger publicirt*).

Inzwischen trat Halphen mit einigen schönen, wenn auch auf den ersten Anblick speciellen Arbeiten**) hervor, die zu meinen allgemeinen Untersuchungen in genauer Beziehung standen. Er unternahm nämlich das Studium der Differentialinvarianten der projectivischen Gruppe der Ebene (oder einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit) und beschäftigte sich gleichzeitig mit der Integrationstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, die eine derartige Gruppe gestatten. Dabei machte er aufmerksam auf die Beziehungen seiner Untersuchungen zu Kleins und meinen alten Arbeiten über Curven, die unendlich viele lineare Transformationen gestatten. Dagegen scheint er meine anderen viel weiter reichenden Arbeiten auf diesem Gebiete nicht gekannt zu haben.

Es fällt mir selbstverständlich nicht ein, das grosse Verdienst von Halphens ausgezeichneten Untersuchungen in dieser Richtung, oder gar das seiner neueren hierher gehörigen, tiefen Arbeiten auf dem Gebiete der linearen Differentialgleichungen zu läugnen. Im Gegentheil, ich zolle ihm die grösste Anerkennung. Man gestatte mir aber auch, geltend zu machen, dass seine älteren hier besprochenen Arbeiten

---

*) Siehe meine 1882 und 1883 publicirten Arbeiten über Gleichungen

$$f(x\,y\,y'\,\ldots\,y^{m})=0,$$

die eine continuirliche Gruppe gestatten. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. VIII, 1882, 1883).

**) Comptes rend. Bd. 81, p. 1053, 1875; Journal de mathématiques November 1876; Thèse, Paris 1878, Sur les invariants différentiels des courbes gauches; Journal de l'école polytechnique 1880.

in einem nicht unwesentlichen Maasse ihren Ursprung in allgemeinen Ideen nehmen, welche nach meiner Meinung von mir zuerst entwickelt worden sind.

9. Ich betrachte eine ganz beliebige endliche continuirliche Gruppe in den Variabeln:

$$x\,y\,z\,\ldots\,u\,v\,w\,\ldots$$

Enthalten die betreffenden Transformationsgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = F(x\,y\,z\,\ldots\,u\,v\,w\,\ldots\,a_1\,a_2\,\ldots\,a_r), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u' = f(x\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;a_r), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

r wesentliche Parameter, so enthält unsere Gruppe r unabhängige infinitesimale Transformationen, die ich mit dem gemeinsamen Symbole:

$$Bf = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots + U\frac{\partial f}{\partial u} + V\frac{\partial f}{\partial v} + W\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots$$

bezeichne. Betrachte ich nun etwa $u, v, w, \ldots$ als gegebene aber ganz beliebige Functionen von $x, y, z, \ldots$, so werden $u', v', w', \ldots$ gewisse Functionen von $x', y', z', \ldots$. Setze ich daher überhaupt:

$$\frac{\partial^{m+n+p+\cdots} F}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \cdots} = F_{m,n,p,\ldots}, \qquad \frac{\partial^{m+n+p+\cdots} F'}{\partial x'^m \partial y'^n \partial z'^p \cdots} = F'_{m,n,p,\ldots},$$

so bestimmen die Transformationsgleichungen (1) nicht allein die Grössen $x', y', z', \ldots u', v', w' \ldots$, sondern zugleich die Differentialquotienten erster, zweiter ... N^{ter} Ordnung:

$$u'_{m,n,p,\ldots}, \quad v'_{m,n,p,\ldots}, \quad w'_{m,n,p,\ldots}$$

als Functionen von

$$x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots u_{m,n,p,\ldots}, v_{m,n,p,\ldots}, w_{m,n,p,\ldots},$$

wobei die Summe $m + n + p \ldots$ alle möglichen Werthe, die N nicht übersteigen, anzunehmen hat.

Dieses Abhängigkeitsverhältniss drückt sich aus durch gewisse Relationen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u'_{m,n,p,\ldots} = \Phi(x\,y\,z\,\ldots\,u\,v\,w\,\ldots\,u_{m,n,p,\ldots}\,\ldots), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

die nach der Natur der Sache mit (1) *zusammen eine Gruppe mit den* r *Parametern* $a_1 \ldots a_r$ *bilden.*

Die Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe berechnet man folgendermassen. Bei der infinitesimalen Transformation Bf erhalten $x\,y\,z\,\ldots\,u\,v\,w\,\ldots$ die Incremente:

$$\delta x = X\delta t,\ \delta y = Y\delta t, \ldots, \delta v = V\delta t,\ \delta w = W\delta t \ldots$$

Setzen wir daher:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \cdots,$$

denken uns diese Gleichung *variirt* und die obenstehenden Werthe der Grössen $\delta x \ldots \delta w$ eingeführt, so kommt die Relation:

$$\frac{\delta du}{\delta t} = dU = \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{\partial u}{\partial y} dY + \frac{\partial u}{\partial z} dZ + \cdots$$
$$+ \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz + \cdots,$$

die sich in die folgenden zerlegt:

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dY}{dx} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dZ}{dx} - \cdots,$$
$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU}{dy} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{dy} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dY}{dy} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dZ}{dy} - \cdots,$$
$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dU}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dY}{dz} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dZ}{dz} - \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bei der Benutzung dieser von Poisson herrührenden Formeln, muss man sich erinnern, dass $U, X, Y, Z, \ldots$ von $x, y, z, \ldots u, v, w$ abhängen, und dass $u, v, w, \ldots$ als Functionen von $x, y, z, \ldots$ aufzufassen sind. In entsprechender Weise berechnet man successiv die Incremente aller Grössen

$$u_{m,n,p,\ldots}, \quad v_{m,n,p,\ldots}, \quad w_{m,n,p,\ldots}, \ldots$$

bei der infinitesimalen Transformation Bf. Bezeichnen wir diese Incremente mit:

$$U_{(m,n,p,\ldots)} \cdot \delta t, \quad V_{(m,n,p,\ldots)} \cdot \delta t, \quad W_{(m,n,p,\ldots)} \cdot \delta t, \ldots,$$

so ist

$$\mathsf{B}f = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots + U\frac{\partial f}{\partial u} + V\frac{\partial f}{\partial v} + W\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots$$
$$+ \sum U_{(m,n,p,\ldots)} \frac{\partial f}{\partial u_{m,n,p,\ldots}} + \sum V_{(m,n,p,\ldots)} \frac{\partial f}{\partial v_{m,n,p,\ldots}}$$
$$+ \sum W_{(m,n,p,\ldots)} \frac{\partial f}{\partial w_{m,n,p,\ldots}} + \cdots (m+n+p+ \leqq N)$$

der gesuchte Ausdruck für die infinitesimalen Transformationen $\mathsf{B}f$ der Gruppe (1), (2).

Denken wir uns jetzt die Zahl N jedenfalls so gross gewählt, dass die Ausdrücke $\mathsf{B}f$ mehr als r Differentialquotienten von f enthalten,

und wenden das in Nummer (4) gesagte auf die Gruppe $\mathsf{B}f$ an*), so erhalten wir unmittelbar den Satz:

Satz 1. *Jede endliche continuirliche Gruppe von Transformationen besitzt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, die als Lösungen vollständiger Systeme definirt werden können.*

Kennt man die endlichen Gleichungen der Gruppe, so findet man die Ausdrücke von beliebig vielen Differentialinvarianten durch ausführbare Operationen.

Jedenfalls werden die bei unserer Gruppe (2) *invarianten Systeme von Differentialgleichungen nach den früher angegebenen Regeln gefunden.*

In früheren Arbeiten (Archiv for Math. og Naturv. Bd. VIII, p. 187, 249, 371 habe ich den Fall, dass die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe die Form

$$X(x, u)\frac{\partial f}{\partial x} + U(x, u)\frac{\partial f}{\partial u}$$

besitzen und dass u als Function von x aufgefasst wird, erschöpfend behandelt. In der letzten dieser drei Abhandlungen habe ich mich eingehend mit den Differentialinvarianten einer Gruppe beschäftigt, deren infinitesimale Transformationen

$$U(u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + V(u, v)\frac{\partial f}{\partial v}$$

gar nicht die unabhängigen Variabeln x, y, sondern nur die abhängigen Variabeln u, v enthalten. Die betreffenden Invarianten sind Functionen von:

$$u\ v\ \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial y}\cdots$$

Differentiirt man eine solche Invariante nach x oder nach y, so erhält man, wie leicht einzusehen, neue Invarianten.

Ebenso ist es im allgemeinen Falle, wenn hinlänglich viele Differentialinvarianten berechnet sind, möglich aus denselben durch *Differentiation* (genauer durch Bildung des Quotienten zweier Functional-

---

*) Ich füge hier die Bemerkung hinzu, dass man, wenn r infinitesimale Transformationen

$$B_k f = X_k\frac{\partial f}{\partial x} + Y_k\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + W_k\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots$$

durch die Relationen

$$B_i(B_k(f)) - B_k(B_i(f)) = \sum c_{iks} B_s$$

verknüpft sind, auf *directem* Wege beweisen kann, dass auch die r entsprechenden infinitesimalen Transformationen $\mathsf{B}_1 f, \mathsf{B}_2 f, \ldots, \mathsf{B}_r f$ durch genau dieselben Gleichungen

$$\mathsf{B}_i(\mathsf{B}_k(f)) - \mathsf{B}_k(\mathsf{B}_i(f)) = \sum c_{iks}\mathsf{B}_s f$$

verbunden sind.

determinanten) neue Invarianten herzuleiten. Die endlichen Gleichungen der betreffenden Gruppe brauchen dabei nicht bekannt zu sein, doch gehe ich hierauf an dieser Stelle nicht näher ein.

§ 3.

Differentialinvarianten der unendlichen continuirlichen Gruppen.

10. Eine continuirliche Schaar von Transformationen bildet, sage ich, eine unendliche continuirliche Gruppe, wenn

1) die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen Transformation der Schaar äquivalent ist,

wenn 2) jede endliche Transformation der Schaar durch unendlichmalige Wiederholung einer bestimmten infinitesimalen Transformation der Schaar erzeugt werden kann,

wenn 3) die Schaar unendlichviele unabhängige infinitesimale Transformationen enthält.

r infinitesimale Transformationen:

$$B_i f + \xi_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

heissen dabei unabhängig, wenn sie keiner linearen Relation von der Form:

$$c_1 B_1 f + c_2 B_2 f + \cdots + c_r B_r f = 0$$

mit constanten Coefficienten genügen.

Wir *beschränken* uns auf den Fall, dass, wenn

$$Bf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

das allgemeine Symbol der infinitesimalen Transformationen einer Gruppe ist, sich die ξ_{ik} als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus gewissen partiellen Differentialgleichungen:

$$\Omega_i \left(x_1 \ldots x_n, \xi_1 \ldots \xi_n \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0$$

bestimmen. Diese Gleichungen müssen linear sein. Denn zwei beliebige infinitesimale Transformationen $B_1 f$, $B_2 f$ einer Gruppe liefern mit den arbiträren Constanten c_1, c_2 multiplicirt und addirt eine allgemeinere in der Gruppe enthaltene infinitesimale Transformation, nämlich $c_1 B_1 f + c_2 B_2 f$.

Ich nenne diese linearen partiellen Differentialgleichungen

$$0 = \sum f_i \xi_i + \sum g_{ik} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \sum h_{ikj} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_j} + \cdots$$

die *Definitionsgleichungen unserer Gruppe.*

Das einfachste Beispiel einer unendlichen Gruppe ist der Inbegriff aller Punkttransformationen oder Berührungstransformationen eines n-fach ausgedehnten Raumes. Betrachtet man den Inbegriff aller Punkttransformationen der Mannigfaltigkeit $x_1 x_2 \dots x_n$, so reduciren sich die Definitionsgleichungen für die infinitesimalen Transformationen $Bf = \sum \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ dieser Gruppe auf die identische Gleichung $0 = 0$.

Ein zweites Beispiel ist der Inbegriff aller Berührungstransformationen, welche eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung in sich überführen.*)

Ein drittes Beispiel ist der Inbegriff aller Punkttransformationen, die eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung in sich überführen.

Als ein viertes Beispiel nenne ich endlich den Inbegriff aller Punkttransformationen, welche die *nichtlineare* Gleichung zweiter Ordnung $s = e^{kz}$ in sich transformiren. —

Mit den soeben genannten (wie auch mit einigen anderen speciellen) unendlichen Gruppen habe ich mich längst eingehend beschäftigt.

Im Jahre 1872 gab ich einige kurze Andeutungen über die Existenz von Invarianten einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung gegenüber allen Berührungs- oder Punkttransformationen (Gött. Nachr. 1872, Nr. 25, p. 478—479. Ges. d. W. zu Christiania 1872, Zur Theorie der Diffpr., p. 132). Es dauerte indess lange Zeit, bis es mir gelang eine allgemeine Theorie der unendlichen continuirlichen Gruppen zu begründen (man sehe insbesondere: Abhandlungen der

---

*) Sind $u_1 u_2 \dots u_r$ Functionen von $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$, die paarweise Relationen von der Form $(u_i, u_k) = f_{ik}(u_1 \dots u_r)$ erfüllen, und bezeichnet Ω eine arbiträre Function der u_k, so bestimmen alle infinitesimalen Transformationen, deren gemeinsames Symbol $Bf = (\Omega, f)$ ist, eine unendliche Gruppe. Aus diesem Grunde habe ich dem Inbegriffe der Grössen u_k längst den Namen *Gruppe* beigelegt. (Gesell. d. W. zu Christiania 1872, p. 135; 1873, p. 18 u. 59; Math. Ann. Bd. VIII, p. 248 und 286.)

Die linearen partiellen Differentialgleichungen $(u_1, v) = 0 \dots (u_r, v) = 0$ bilden nach mir ein vollständiges System, dessen Lösungen $v_1 v_2 \dots v_{2n-r}$ eine neue Gruppe (die *Polargruppe*) bilden. Fasse ich die (u_k, f) als Symbole von infinitesimalen Transformationen auf, so sind die v_i die zugehörigen *Invarianten.* Man kann aber sowohl die u_k als auch die v_i als Symbole von infinitesimalen Transformationen betrachten; alsdann ist jede Transformation der einen Gruppe mit jeder Transformation der andern Gruppe vertauschbar. In meinen alten synthetischen Untersuchungen über derartige Gruppen benutzte ich häufig diese beiden Auffassungen. Evident, aber wichtig ist der Satz:

Ist die Gruppe $u_1 \dots u_r$ vorgelegt und dabei eine jede der Gleichungen $u_k = Const.$ integrabel, so können die v_k immer angegeben werden.

Ges. d. W. zu Christiania 1883, Nr. 12). Indem ich im Uebrigen auf die soeben citirte wie auf meine älteren Arbeiten verweise, beschränkeich mich hier auf nachstehende Bemerkungen, die für das Folgende genügen.

Ich denke mir eine beliebige endliche oder unendliche continuirliche Transformationsgruppe der Mannichfaltigkeit $x_1 x_2 \ldots x_n$ vorgelegt. Sind

$$Bf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$Cf = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

zwei gegebene infinitesimale Transformationen dieser Gruppe, so ist es auf verschiedene Weisen möglich, neue infinitesimale Transformationen die ebenfalls in der Gruppe enthalten sind, zu construiren.

Bei der infinitesimalen Transformation Bf geht das Werthsystem x_i über in das benachbarte Werthsystem

$$x_i + Bx_i \delta t = x_i + \xi_i . \delta t.$$

Dieses seinerseits wird durch Anwendung von Cf in das neue Werthsystem

$$x_i + \xi_i . \delta t + C(x_i + \xi_i . \delta t)\, \delta \tau$$

übergeführt. Durch successive Anwendung von Bf und Cf geht daher das Werthsystem x_i, wenn wir von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung absehen, in das Werthsystem

$$x_i + \xi_i . \delta t + \eta_i . \delta \tau$$

über. Also gehört jede infinitesimale Transformation, welche den Grössen x_i die Incremente

$$\delta x_i = \xi_i . \delta t + \eta_i . \delta \tau$$

ertheilt, unserer Gruppe an.

Diesen Satz, den wir schon oben als selbstverständlich erwähnt haben, formuliren wir folgendermassen:

Satz 2. *Enthält eine continuirliche Gruppe die beiden infinitesimalen Transformationen Bf und Cf, so enthält sie ebenfalls die Transformation $c_1 Bf + c_2 Cf$ mit der arbiträren Constante $\frac{c_1}{c_2}$.*

Wir können indess auch anders verfahren.

Zuerst führen wir das Werthsystem x_i durch Anwendung von Bf nach der neuen Lage:

$$x_i' = x_i + \delta t . \xi_i + \frac{1}{2} \delta t^2 . B\xi_i,$$

bei deren Berechnung wir erst von infinitesimalen Grössen dritter Ordnung abgesehen haben. Darnach bringen wir das Werthsystem x_i' durch Anwendung von Cf in die Lage:

$$x_i'' = x_i + \delta t \cdot \xi_i + \frac{1}{2}\,\delta t^2 \cdot B\xi_i$$
$$+ \delta\tau \cdot \eta_i + \delta t \cdot \delta\tau \cdot C\xi_i$$
$$+ \frac{1}{2}\,\delta\tau^2 \cdot C\eta_i.$$

Andererseits nehmen wir wiederum das Werthsystem x_i und bringen dasselbe zuerst durch Anwendung von Cf in die Lage:

$$(x_i)' = x_i + \delta\tau \cdot \eta_i + \frac{1}{2}\,\delta\tau^2 \cdot C\eta_i$$

und dann $(x_i)'$ durch Anwendung von Bf in die Lage:

$$(x_i)'' = x_i + \delta\tau \cdot \eta_i + \frac{1}{2}\,\delta\tau^2 \cdot C\eta_i$$
$$+ \delta t \cdot \xi_i + \delta t \cdot \delta\tau \cdot B\eta_i$$
$$+ \frac{1}{2}\,\delta t^2 \cdot B\xi_i.$$

Es ist nun klar, dass diejenige infinitesimale Transformation, welche das Werthsystem x_i'' nach $(x_i)''$ bringt, unserer Gruppe angehört. Da aber

$$(x_i)'' - x_i'' = \delta t \cdot \delta\tau \cdot (B\eta_i - C\xi_i)$$

ist, erhalten wir folgenden Fundamentalsatz, den ich 1872 entdeckt habe:

Satz 3. *Enthält eine continuirliche Gruppe die beiden infinitesimalen Transformationen*

$$Bf = \sum \xi_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} \quad \textit{und} \quad Cf = \sum \eta_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

so enthält sie ebenfalls die infinitesimale Transformation

$$\sum (B\eta_i - C\xi_i) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

deren Symbol bekanntlich auf die beiden äquivalenten Formen

$$B(C(f)) - C(B(f)) = (B, C)$$

*gebracht werden kann**).

Verlangt man insbesondere, dass die beiden infinitesimalen Transformationen Bf und Cf *vertauschbar* sein sollen, präciser ausgedrückt,

---

*) Aus dem Satze des Textes fliesst, wie ich längst bemerkt habe, u. A. das wichtige Corollar: Gestattet ein System von Differentialgleichungen die beiden Transformationen Bf und Cf, so gestattet es ebenfalls die Transformation $B(C(f)) - C(B(f))$. Particularisirt man diesen Satz noch weiter, indem man annimmt, dass unser Gleichungssystem nur aus einer einzigen partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung besteht, so erhält man das sogenannte Poisson-Jacobi'sche Theorem.

dass jede durch unendlich-malige Wiederholung von Bf erzeugte endliche Transformation mit allen durch Wiederholung von Cf erzeugten endlichen Transformationen vertauschbar sein soll, so ergiebt sich zunächst das identische Verschwinden der Grösse (BC) als eine nothwendige Bedingung. Dieselbe ist überdiess hinreichend, indem Bf und Cf unter dieser Voraussetzung immer durch Einführung neuer Variabeln y_x entweder auf die Form:

$$Bf = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad Cf = \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

oder auf die Form:

$$Bf = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad Cf = y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

gebracht werden können. (Siehe z. B. Ges. d. W. zu Christiania 1872; Mein Archiv Bd. III, p. 100—105, Bd. 7, p. 180).

Hiermit haben wir also meinen alten Satz:

Satz 4. *Die beiden infinitesimalen Transformationen Bf und Cf sind vertauschbar, wenn der Ausdruck (B, C) identisch gleich Null ist.*

Die Methode, welche uns die Sätze 2. und 3. geliefert hat, lässt sich, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, verallgemeinern. Man erhält hierdurch neue Methoden zur Construction von beliebig vielen infinitesimalen Transformationen einer jeden Gruppe, die Bf und Cf enthält. Es lässt sich indess nachweisen, (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3, p. 100), dass alle Methoden, die man in dieser Weise findet, nur auf eine wiederholte Anwendung des Satzes 3. herauskommen. Aus diesem Satze folgt offenbar, dass die Ausdrücke $((B, C), B)$ und $((B, C), C)$ Symbole von infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe darstellen*).

11. Indem wir jetzt dazu übergehen, allgemein die Existenz von Differentialinvarianten einer ganz beliebigen unendlichen Gruppe nach-

---

*) Hier mögen noch die folgenden Bemerkungen, die indess in dieser Abhandlung nicht angewandt werden, ihren Platz finden. Es sei eine continuirliche Schaar von infinitesimalen Transformationen Bf vorgelegt, unter denen ich zwei *beliebige*, etwa $B_1 f$ und $B_2 f$, wähle. Gehören dabei die beiden infinitesimalen Transformationen (B_1, B_2) und $c_1 B_1 + c_2 B_2$ jedesmal unserer Schaar an, so liegt es äusserst nahe zu vermuthen, dass es eine continuirliche Gruppe giebt, deren infinitesimale Transformationen eben die vorgelegte Schaar bilden.

Enthält die Schaar nur eine begrenzte Zahl unabhängiger Transformationen, so kann die Richtigkeit dieser Vermuthung ohne grosse Schwierigkeit nachgewiesen werden. (Siehe Archiv for Math. og Nat. Bd. 3, p. 100.)

Enthält dagegen unsere Schaar unendlich viele unabhängige infinitesimale Transformationen, so ist die Entscheidung der gestellten Frage nicht so einfach. Allerdings glaube ich die allgemeine Gültigkeit des betreffenden Satzes nachgewiesen zu haben und jedenfalls besteht er für infinitesimale *Punkt*transformationen oder *Berührungs*transformationen einer *Ebene*.

zuweisen, werden wir, um das Verständniss der allgemeinen Theorie möglichst zu erleichtern, mit der detaillirten Discussion von zwei einfachen Beispielen beginnen.

Wir betrachten alle infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$Bf = X(x)\frac{\partial f}{\partial x} + yX'\frac{\partial f}{\partial y} + zX'\frac{\partial f}{\partial z},$$

und interpretiren dabei X als eine arbiträre Function von x, X' als ihren Differentialquotienten. Unter allen hierdurch definirten Transformationen wählen wir zwei aus:

$$B_1 f = X_1\frac{\partial f}{\partial x} + yX_1'\frac{\partial f}{\partial y} + zX_1'\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$B_2 f = X_2\frac{\partial f}{\partial x} + yX_2'\frac{\partial f}{\partial y} + zX_2'\frac{\partial f}{\partial z},$$

und bilden den Ausdruck

$$(B_1B_2) = (X_1X_2' - X_2X_1')\frac{\partial f}{\partial x} + y(X_1X_2'' - X_2X_1'')\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$+ z(X_1X_2'' - X_2X_1'')\frac{\partial f}{\partial z},$$

welcher durch die Substitution

$$X_1X_2' - X_2X_1' = \xi(x)$$

die Form:

$$(B_1B_2) = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + y\xi'\frac{\partial f}{\partial y} + z\xi'\frac{\partial f}{\partial z}$$

annimmt.

Es liegt daher nahe zu vermuthen, dass es eine unendliche Gruppe giebt, deren infinitesimale Transformationen eben die Schaar Bf bilden.

Um diess am einfachsten zu beweisen, verificirt man zunächst, dass die Transformationsgleichungen:

$$x_1 = F(x), \quad y_1 = yF'(x), \quad z_1 = zF'(x)$$

mit der arbiträren Function $F(x)$ eine unendliche Gruppe bilden. Setzt man hiernach:

$$F(x) = x + X(x)\,\delta t,$$

so erkennt man, dass diese Gruppe wirklich alle infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$x_1 = x + X\delta t, \quad y_1 = y + yX'\delta t, \quad z_1 = z + zX'\delta t,$$

das heisst alle infinitesimalen Transformationen Bf und keine weiteren umfasst.

Es ist leicht zu erkennen, dass diese unendliche Gruppe nicht allein Differentialinvarianten, sondern sogar invariante Functionen von $x\,y\,z$ allein bestimmt. Lässt man nämlich in der Gleichung

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot X'\frac{\partial f}{\partial y} + z\cdot X'\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

die Grösse X successiv beliebig viele Functionen von x bezeichnen, so ist der Inbegriff von allen in dieser Weise erhaltenen Gleichungen äquivalent mit den beiden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Diese bilden ein vollständiges System mit der Lösung $\frac{y}{z}$, daher ist diese Grösse eine Invariante unserer unendlichen Gruppe, wie man übrigens unmittelbar verificiren kann.

Bei der Bildung von Differentialinvarianten können wir auf verschiedene Weisen verfahren. Wir können nämlich zu den Grössen x, y, z beliebig viele weitere $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ hinzufügen, welche bei der Gruppe invariant bleiben. Dann steht es uns frei, welche unter allen diesen Grössen wir als unabhängige und welche wir als abhängige Variable betrachten wollen.

Zunächst seien x, y, z Functionen einer einzigen bei der Gruppe invarianten Grösse α. Dann erhalten wir die Transformationsgleichungen:

$$(3) \qquad \alpha_1 = \alpha, \quad x_1 = F(x), \quad y_1 = yF'(x), \quad z_1 = zF'(x).$$

Setzen wir noch:

$$\frac{dx}{d\alpha} = x', \quad \frac{dy}{d\alpha} = y', \quad \frac{dz}{d\alpha} = z', \quad \frac{dx_1}{d\alpha} = x_1' \cdots,$$

so drückt sich das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Differentialquotienten erster Ordnung folgendermassen aus:

$$(4) \quad x_1' = F'(x)\cdot x'; \; y_1' = y'F'(x) + yF''(x)x'; \; z_1' = z'F'(x) + zF''(x)x'.$$

Es liegt in der Natur der Sache und kann auch ohne weiteres verificirt werden, dass die Gleichungen (3) und (4) eine unendliche Gruppe bestimmen. Man erkennt durch die Substitution

$$F(x) = x + X(x)\,\delta t,$$

dass ihre infinitesimalen Transformationen die Form

$$\delta x = X\delta t, \quad \delta y = yX'\delta t, \quad \delta z = zX'\delta t, \quad \delta x' = X'x'\delta t,$$
$$\delta y' = (y'X' + yX''\cdot x')\,\delta t, \quad \delta z' = (z'X' + zX''x')\,\delta t$$

besitzen, und folglich mit dem Symbole

$$B'f = X\frac{\partial f}{\partial x} + yX'\frac{\partial f}{\partial y} + zX'\frac{\partial f}{\partial z} + X'x'\frac{\partial f}{\partial x'}$$
$$+ (y'X' + yx'X'')\frac{\partial f}{\partial y'} + (z'X' + zx'X'')\frac{\partial f}{\partial z'}$$

bezeichnet werden können. Giebt man X zwei particuläre Werthe X_1 und X_2 und bezeichnet die beiden entsprechenden infinitesimalen Transformationen mit $B_1'f$ und $B_2'f$, so ist es a priori gewiss und

kann überdiess leicht verificirt werden, dass auch die infinitesimale Transformation (B_1', B_2') die Form $B'f$ besitzt.

Hieraus folgt ohne weiteres, dass der Inbegriff aller möglichen Gleichungen von der Form $B'f=0$, *der sich übrigens durch die drei Relationen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+x'\frac{\partial f}{\partial x'}+y'\frac{\partial f}{\partial y'}+z'\frac{\partial f}{\partial z'}=0,$$
$$y\frac{\partial f}{\partial y'}+z\frac{\partial f}{\partial z'}=0$$

ausdrücken lässt, ein vollständiges System bilden muss. Die Lösungen dieses vollständigen Systems:

$$(5)\qquad \frac{z}{y},\ \frac{x'}{y}\ \text{ und }\ \frac{yz'-zy'}{y^2}=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{z}{y}\right)$$

sind *Invarianten* der Gruppe (3), (4) und gleichzeitig *Differentialinvarianten* der Gruppe (3).

Wünscht man, indem man fortwährend $x\ y\ z$ als Functionen von α betrachtet, noch weitere Differentialinvarianten und zwar solche *zweiter* Ordnung zu berechnen, so bilde man die Formeln:

$$x_1''=F'x''+F''x'^2,\quad y_1''=y''F'+2y'F''x'+yF'''x'^2+yF''x'',$$
$$z_1''=z''F'+2z'F''x'+zF'''x'^2+zF''x''.$$

Dieselben bestimmen mit (3), (4) vereinigt eine unendliche Gruppe von Transformationen der Grössen:

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ x'',\ y'',\ z''.$$

Setzt man sodann $F(x)=x+X(x)\,\delta t$, so findet man den allgemeinen Ausdruck für die infinitesimalen Transformationen $B''f$ dieser Gruppe und erkennt, dass sie die Form:

$$B''f=XAf+X'A'f+X''A''f+X'''A'''f$$

besitzen. Dabei bezeichnen Af, $A'f$, $A''f$, $A'''f$ *determinirte* Grössen, die von der Form der arbiträren Function X vollständig unabhängig sind. Also müssen alle möglichen Gleichungen von der Form $B''f=0$, die sich überdies auf die vier Gleichungen

$$Af=0,\quad A'f=0,\quad A''f=0,\quad A'''f=0$$

reduciren, ein vollständiges System mit *fünf* Lösungen bilden.

Unter diesen Lösungen finden sich drei (siehe (5)) von nullter oder erster Ordnung; die beiden übrigen sind die gesuchten Invarianten zweiter Ordnung. Es ist klar, dass man in dieser Weise beliebig viele Differentialinvarianten finden kann.

Zu der unendlichen Gruppe:

$$(3)\qquad x_1=F(x),\quad y_1=yF',\quad z_1=zF'$$

mit den infinitesimalen Transformationen

$$Bf = X\frac{\partial f}{\partial x} + yX'\frac{\partial f}{\partial y} + zX'\frac{\partial f}{\partial z}$$

gehören indess, wie wir jetzt in Uebereinstimmung mit unseren früheren Andeutungen zeigen werden, noch mehrere andere Reihen von Differentialinvarianten. Z. B. können wir die Grössen y und z als Functionen von x betrachten, und dementsprechend

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = z' \quad \text{u. s. w.}$$

setzen. Dann wird

$$y_1' = y' + y\frac{F''}{F'}, \quad z_1' = z' + z\frac{F''}{F'},$$

und diese Gleichungen bilden mit (3) vereinigt eine Gruppe, deren infinitesimale Transformationen das gemeinsame Symbol:

$$B'f = X\frac{\partial f}{\partial x} + yX'\frac{\partial f}{\partial y} + zX'\frac{\partial f}{\partial z} + yX''\frac{\partial f}{\partial y'} + zX''\frac{\partial f}{\partial z'}$$

besitzen. Der Inbegriff aller Gleichungen $B'f = 0$ bildet das vollständige System:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y'} + z\frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

mit den Lösungen:

$$\frac{y}{z}, \quad \frac{zy' - yz'}{y},$$

welche Differentialinvarianten erster Ordnung darstellen. In entsprechender Weise fände man Invarianten höherer Ordnung.

Um eine dritte Reihe Invarianten unserer Gruppe zu finden, könnte man eine bei der Gruppe invariante Grösse α einführen und als Function von x, y, z auffassen. Dann erhielte man zwei wesentliche Differentialinvarianten erster Ordnung u. s. w.

Es ist indess wohl zu bemerken, dass gewisse Invarianten gleichzeitig mehreren Reihen angehören können. Z. B. umfasst unsere erste Reihe *alle* Invarianten der zweiten.

12. Alle infinitesimalen Transformationen:

$$Bf = X(\mathrm{x}, \mathrm{y})\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + Y(\mathrm{x}, \mathrm{y})\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}},$$

welche der Relation

$$\frac{\partial X}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial Y}{\partial \mathrm{y}} = 0$$

genügen, erzeugen eine unendliche Gruppe. Ihre Transformationen sind dadurch charakterisirt, dass sie alle Flächenräume der Cartesi'schen Ebene x, y invariant lassen*). Um Differentialinvarianten dieser un-

*) Möbius hat sich gelegentlich mit der im Texte besprochenen unendlichen Gruppe beschäftigt (Crelle's Journal Bd. XII).

endlichen Gruppe zu finden, führen wir zwei neue Grössen x, y ein, *die bei unserer Gruppe nicht transformirt werden*, betrachten sodann x, y als Functionen von x, y und setzen:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x} = \mathrm{x}', \quad \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y} = \mathrm{x}_{,}, \quad \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x} = \mathrm{y}', \quad \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial y} = \mathrm{y}_{,}, \quad \text{u. s. w.}$$

Sodann bilden wir, um die Incremente von $\mathrm{x}', \mathrm{x}_{,}, \mathrm{y}', \mathrm{y}_{,} \ldots$ bei der infinitesimalen Transformation Bf zu berechnen, die Gleichungen:

$$\delta(d\mathrm{x} - \mathrm{x}'dx - \mathrm{x}_{,}dy) = 0, \qquad \delta(d\mathrm{y} - \mathrm{y}'dx - \mathrm{y}_{,}dy) = 0.$$

Dieselben liefern uns, wenn wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}} = F_{\mathrm{x}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}} = F_{\mathrm{y}}$$

setzen, die Werthe:

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{x}' &= (X_{\mathrm{x}}\mathrm{x}' + X_{\mathrm{y}}\mathrm{y}')\,\delta t, & \delta\mathrm{x}_{,} &= (X_{\mathrm{x}}\mathrm{x}_{,} + X_{\mathrm{y}}\mathrm{y}_{,})\,\delta t, \\ \delta\mathrm{y}' &= (Y_{\mathrm{x}}\mathrm{x}' + Y_{\mathrm{y}}\mathrm{y}')\,\delta t, & \delta\mathrm{y}_{,} &= (Y_{\mathrm{x}}\mathrm{x}_{,} + Y_{\mathrm{y}}\mathrm{y}_{,})\,\delta t. \end{aligned}$$

Daher können wir sagen, dass die Grössen $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{x}', \mathrm{x}_{,}, \mathrm{y}', \mathrm{y}_{,}$ *durch eine unendliche Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen:*

$$\begin{aligned} X\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} + Y\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} &+ (X_{\mathrm{x}}\mathrm{x}' + X_{\mathrm{y}}\mathrm{y}')\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}'} + (X_{\mathrm{x}}\mathrm{x}_{,} + X_{\mathrm{y}}\mathrm{y}_{,})\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_{,}} \\ &+ (Y_{\mathrm{x}}\mathrm{x}' + Y_{\mathrm{y}}\mathrm{y}')\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}'} + (Y_{\mathrm{x}}\mathrm{x}_{,} + Y_{\mathrm{y}}\mathrm{y}_{,})\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}_{,}} = B'f, \end{aligned}$$

transformirt werden. Dabei ist zu erinnern, dass X und Y nur der Relation $X_{\mathrm{x}} + Y_{\mathrm{y}} = 0$ unterworfen sind. Giebt es nun Functionen von x, y und ihren Differentialquotienten *erster* Ordnung, welche diese Gruppe gestalten, so müssen sie alle Gleichungen von der Form $B'f = 0$, oder was auf dasselbe hinauskommt, sie müssen die fünf Gleichungen:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} = 0, \quad \mathrm{x}'\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}'} + \mathrm{x}_{,}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_{,}} - \mathrm{y}'\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}'} - \mathrm{y}_{,}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}_{,}} = 0, \\ &\mathrm{y}'\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}'} + \mathrm{y}_{,}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_{,}} = 0, \quad \mathrm{x}'\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}'} + \mathrm{x}_{,}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}_{,}} = 0 \end{aligned} \right.$$

erfüllen.

Dass diese fünf Gleichungen ein vollständiges System bilden, kann direct in der bekannten Weise verificirt werden. Es lässt sich übrigens auch in der folgenden rationellen Weise einsehen.

Da X und Y durch die Gleichung $X_{\mathrm{x}} + Y_{\mathrm{y}} = 0$ verknüpft sind, so giebt es eine Function von x und y, deren Differentialquotienten erster Ordnung bezüglich X und $-Y$ sind. Nehmen wir daher zwei beliebige infinitesimale Transformationen Bf, so besitzen dieselben jedenfalls die Form:

$$B_1 f = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$B_2 f = \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Durch directe Berechnung erhält man die Formel:

$$(B_1, B_2) = \frac{\partial(U_y V_x - U_x V_y)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial(U_y V_x - U_x V_y)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

sodass (B_1, B_2) wirklich in Uebereinstimmung mit unserem Satze 2. die allgemeine Form Bf besitzt. Setzt man sodann im allgemeinen Ausdrucke der infinitesimalen Transformation $B'f$ zuerst $X = U_y$, $Y = - U_x$, darnach $X = V_y$, $Y = - V_x$, so erhält man die beiden Ausdrücke $B_1'f$, $B_2'f$ und verificirt ohne Schwierigkeit, dass (B_1', B_2') die Form $B'f$ besitzt. Hieraus folgt, dass die fünf Gleichungen (6), auf welche sich der Inbegriff aller Gleichungen $B'f = 0$ reducirt, ein vollständiges System bilden. Die Lösung dieses Gleichungssystems, nämlich

$$I = x'y, - x,y'$$

ist somit die einzige Differentialinvariante erster Ordnung unserer Gruppe.

Da die unabhängigen Variabeln $x\, y$ von unserer Gruppe gar nicht transformirt werden, so ist es klar, dass alle Differentialquotienten von I nach x und y selbst Invarianten sind, und da diese Differentialquotienten der Natur der Sache nach durch keine Relation verknüpft sein können, erkennen wir, dass unsere Gruppe (jedenfalls) zwei Differentialinvarianten zweiter Ordnung, drei dritter Ordnung, und überhaupt n Invarianten n^{ter} Ordnung besitzt.

Dass es soviele Invarianten zweiter, dritter ... n^{ter} Ordnung giebt, liesse sich auch durch Aufstellung ihrer Definitionsgleichungen erkennen. Die Grössen x, y mit ihren vier Differentialquotienten erster Ordnung und sechs Differentialquotienten zweiter Ordnung werden nämlich durch eine unendliche Gruppe transformirt, deren infinitesimale Transformationen die Form:

$$B''f = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + X_x A_1 f + X_y A_2 f + Y_x A_3 f + Y_y A_4 f$$
$$+ X_{xx} A_5 f + X_{yx} A_6 f + X_{yy} A_7 f + Y_{xx} A_8 f + Y_{xy} A_9 f + Y_{yy} A_{10} f$$

besitzen. Dabei sind die A_{xy} determinirte Ausdrücke, die von der Form der arbiträren Functionen X, Y vollständig unabhängig sind. Der Inbegriff aller Gleichungen $B''f = 0$ reducirt sich vermöge der Relationen

$$X_x + Y_y = 0, \quad X_{xx} + Y_{xy} = 0, \quad X_{xy} + Y_{yy} = 0$$

auf die *neun* Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} = 0, \quad A_1 f - A_4 f = 0, \quad A_2 f = 0, \quad A_3 f = 0,$$

$$A_5 f - A_9 f = 0, \quad A_6 f - A_{10} f = 0, \quad A_7 f = 0, \quad A_8 f = 0$$

die ein vollständiges System mit *drei* Lösungen bilden. Unter denselben ist eine von der ersten Ordnung, nämlich J, während die beiden übrigen von der zweiten Ordnung sind. Durch ein analoges Räsonnement könnten wir die Existenz von drei Invarianten dritter Ordnung u. s. w. erkennen.

Unsere unendliche Gruppe bestimmt indess noch andere Reihen von Invarianten, wie hier kurz angedeutet werden mag.

Neben x und y, die bei unserer Gruppe transformirt werden, führen wir *drei* weitere bei der Gruppe invariante Grössen x, y, z ein und betrachten x, y als Functionen von x, y, z. Dann werden x, y zusammen mit ihren Differentialquotienten durch eine unendliche Gruppe transformirt. Man findet drei Invarianten erster Ordnung:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial y},$$

acht wesentliche Invarianten zweiter Ordnung u. s. w.

13. Jetzt wollen wir versuchen die allgemeine Existenz von Differentialinvarianten einer jeden unendlichen Gruppe nachzuweisen.

Wir denken uns die Variabeln $x, y \ldots u, v \ldots$ durch eine unendliche Gruppe:

$$x_1 = F(xy \ldots uv \ldots),$$
$$y_1 = \Phi(xy \ldots uv \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

transformirt. Nehmen wir gewisse weitere bei der Gruppe invariante Grössen $z, w \ldots$ an, so können wir offenbar behaupten, dass auch die vereinigten Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad x_1 = F, \quad y_1 = \Phi \cdots z_1 = z, \quad w_1 = w$$

eine unendliche Gruppe bilden. Die infinitesimalen Transformationen dieser neuen Gruppe haben die Form:

$$Bf = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots + U\frac{\partial f}{\partial u} + V\frac{\partial f}{\partial v} + W\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots.$$

Dabei sind die Grössen Z und W gleich Null, während $XY \ldots UV \ldots$ nur von den $xy \ldots uv \ldots$ abhängen und als ihre Functionen durch die Definitionsgleichungen der Gruppe:

$$\text{(7)} \qquad 0 = A_i X + B_i Y + \cdots + L_i X_x + M_i X_y + \cdots$$

bestimmt sind.

Betrachten wir $u, v, w \ldots$ wie in Nummer 9. als Functionen von $x, y, z \ldots$ und setzen wir:

$$\frac{\partial^{m+n+p+\cdots} F}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \ldots} = F_{m,n,p\ldots},$$

so werden auch jetzt die Differentialquotienten

$$u_{m,n,p\ldots}, \quad v_{m,n,p\ldots}, \quad w_{m,n,p\ldots}$$

durch die Formeln (A) transformirt.

Es ist zunächst klar, dass die Grössen $x\,y\,z\ldots u\,v\,w$ und die zugehörigen Differentialquotienten *erster* Ordnung durch eine gewisse unendliche Gruppe transformirt werden. Man findet die infinitesimalen Transformationen $B'f$ derselben, wenn man in der Formel:

$$B'f = Bf + \sum_{m+n+p\ldots=1} \frac{\delta u_{m,n,p,\ldots}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_{m,n,p,\ldots}} + \sum_{m+n+p\ldots=1} \frac{\delta v_{m,n,p,\ldots}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{m,n,p,\ldots}} + \cdots$$

die Werthe der Incremente

$$\delta u_{m,n,p,\ldots}, \quad \delta v_{m,n,p,\ldots}, \quad \delta w_{m,n,p,\ldots}, \ldots$$

einführt.

Diese Incremente, welche nach den Regeln der Variationsrechnung berechnet werden, sind offenbar *lineare* Functionen von den Grössen $X, Y, U, V\ldots$ und ihren Differentialquotienten *erster* Ordnung nach $x, y, u, v\ldots$

Es ist ferner klar, dass die Grössen $x, y, z\ldots u, v, w\ldots$ und die zugehörigen Differentialquotienten *erster und zweiter Ordnung* durch eine unendliche Gruppe transformirt werden. Die infinitesimalen Transformationen $B''f$ derselben stellen sich dar in der Form:

$$B''f = B'f + \sum_{m+n+p\ldots=2} \frac{\delta u_{m,n,p,\ldots}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_{m,n,p,\ldots}} + \sum_{m+n+p\ldots=2} \frac{\delta v_{m,n,p,\ldots}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{m,n,p,\ldots}} + \cdots,$$

wo die Incremente $\delta u_{m,n,p,\ldots}\ldots$ sich bei der Berechnung als lineare Functionen von $X, Y, U, V\ldots$ und ihren Differentialquotienten *erster* und *zweiter* Ordnung nach $x, y\ldots u, v$ ergeben.

In entsprechender Weise kann man die allgemeinen Ausdrücke der Grössen $B^{(3)}f$, $B^{(4)}f\ldots B^{(q)}f$ bilden. Unter allen Umständen sind die $B^{(q)}f$ die infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe zwischen $x\,y\,z\ldots u\,v\,w\ldots$ und den entsprechenden Differentialquotienten erster, zweiter $\ldots q^{\text{ter}}$ Ordnung.

Diese $B^{(q)}f$ haben die Form:

$$B^{(q)}f = X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + \cdots + U\frac{df}{du} + V\frac{df}{dv} + \cdots + X_x A_1 f + X_y A_2 f$$
$$+ X_u A_3 f + \cdots + V_x C_1 f + V_y C_2 f + V_u C_3 f + V_v C_4 f + \cdots$$
$$+ X_{xx} D_1 f + \cdots.$$

Die Grössen $A_x f$, $C_x f$, $D_x f \ldots$ aber sind von der Form der Functionen $X\,Y \ldots U\,V \ldots$ vollständig unabhängig. Der angegebene Ausdruck von $B^{(q)}f$ lässt sich vereinfachen. Vermöge der Definitionsgleichungen (7) und der aus ihnen durch Differentiation hervorgehenden Relationen können nämlich gewisse von den Grössen

(a) $$X\,Y \ldots V \ldots X_x \ldots X_{xx} \ldots$$

aus dem Ausdrucke $B^{(q)}f$ weggeschafft werden. Und zwar kann man im Allgemeinen erreichen, dass die Anzahl (ν) der in $B^{(q)}f$ zurückgebliebenen Grössen (a) kleiner ausfällt als die Anzahl (μ) der Grössen $x y z \ldots u v w \ldots$ und der entsprechenden Differentialquotienten erster, zweiter ... q^{ter} Ordnung.

Dass dies immer möglich ist, beruht darauf, dass man einerseits die Zahl q beliebig gross wählen kann, andererseits darauf, dass es in jedem einzelnen Falle uns frei steht, wie viele bei der Gruppe invariante Grössen $z, w \ldots$ wir einführen wollen.

Setzen wir voraus, dass $\nu < \mu$ ist, so ist der Inbegriff *aller* Gleichungen von der Form $B^{(q)}f = 0$ äquivalent mit ν linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit μ unabhängigen Variabeln. Dabei ist es sicher, dass diese ν Gleichungen ein vollständiges System mit (jedenfalls) $\mu - \nu$ Lösungen bilden: in allen Fällen eine einfache Consequenz des Satzes 3. Die besprochenen Lösungen sind nach dem Vorangehenden Differentialinvarianten q^{ter} Ordnung unserer Gruppe. Hiermit ist also das angekündigte Theorem erwiesen.

Theorem. *Jede unendliche continuirliche Gruppe bestimmt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, die als Lösungen von vollständigen Systemen definirt werden können.*

Gestattet ein System von Differentialgleichungen q^{ter} Ordnung unsere unendliche Gruppe, so lässt sich dasselbe im Allgemeinen in der Form von endlichen Relationen zwischen den Differentialinvarianten q^{ter} oder niedrigerer Ordnung darstellen. Ist dies nicht der Fall, so können diese Differentialgleichungen in jedem einzelnen Falle durch einfache Betrachtungen (siehe pag. 544) bestimmt werden. Hierauf gehe ich indess bei dieser Gelegenheit nicht näher ein. Dagegen bemerke ich ausdrücklich, dass man, wenn hinlänglich viele Differentialinvarianten gefunden sind, beliebig viele weitere durch *Differentiation* berechnen kann. Die neuen Invarianten werden gebildet durch Division von Functionaldeterminanten.

Wir gehen dazu über die vorangehende Theorie durch eine grosse Anzahl Beispiele zu illustriren.

14. Ich betrachte eine beliebige vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = \Phi(x, y, y').$$

Führe ich nun statt y und x neue Variabeln y_1, x_1 ein durch die Substitutionen:

$$(8) \qquad y_1 = Y(xy), \quad x_1 = X(xy),$$

so wird

$$(9) \qquad y_1' = \frac{Y_x + Y_y \cdot y'}{X_x + X_y \cdot y'}$$

und

$$y_1'' = \frac{Ay'' + By'^3 + Cy'^2 + Dy' + E}{(X_x + X_y y')^3}.$$

A, B, C, D, E bezeichnen gewisse Functionen von x, y, deren Ausdrücke wir nicht hinzuschreiben brauchen.

In den neuen Variabeln $x_1 y_1$ erhält somit die Gleichung $y'' - \Phi = 0$ die Form $y_1'' - \Phi_1 = 0$, wo

$$(10) \qquad \Phi_1 = \frac{A\Phi + By'^3 + Cy'^2 + Dy' + E}{(X_x + X_y y')^3}$$

ist.

Es ist nun selbstverständlich, dass die Gleichungen (8), (9), (10) eine unendliche Gruppe von Transformationen zwischen den Grössen $x\, y\, y'\, \Phi$ bestimmen und zwar denke ich mir hierbei zunächst x, y, y' und Φ als vier unabhängige Grössen. Diese Gruppe besitzt nach unserem allgemeinen Theoreme mehrere Reihen von unendlich vielen Differentialinvarianten. Es liegt indess in der Natur der Sache, dass wir jetzt nur solche Invarianten zu berücksichtigen brauchen, welche der Annahme entsprechen, dass Φ als Function von x, y und y' aufgefasst wird.

Wir berechnen zuerst den Ausdruck für die infinitesimalen Transformationen Af unserer Gruppe. Setzen wir:

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t,$$

so wird:

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\delta y'}{\delta t} = \eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) - y'^2 \xi_y = \zeta, \\ \dfrac{\delta \Phi}{\delta t} = (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)\,\Phi - y'^3 \xi_{yy} + y'^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) \\ \qquad + y'(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + \eta_{xx} = \varphi \end{cases}$$

und

$$Bf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial y'} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \Phi}.$$

Nunmehr berechnen wir nach den Regeln der Variationsrechnung die Incremente der Grössen Φ_x, Φ_y, $\Phi_{y'}$ und setzen:

$$B'f = Bf + \frac{\delta\Phi_x}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial\Phi_x} + \frac{\delta\Phi_y}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial\Phi_y} + \frac{\delta\Phi_{y'}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial\Phi_{y'}}.$$

Dabei bemerken wir, dass $B'f$ i. B. auf $\xi\,\eta$ und die Differentialquotienten erster, zweiter, dritter Ordnung von $\xi\eta$ linear und homogen sind. Ferner ermöglichen es die Definitionsgleichungen (11) unserer Gruppe die Grössen ζ und φ aus den Ausdrücken Bf und $B'f$ wegzuschaffen. In ganz analoger Weise berechnen wir die Ausdrücke $B''f \ldots B^{(q)}f$ und erkennen hierdurch wie früher die allgemeine Existenz von Differentialinvarianten unserer Gruppe.

Jede gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - \Phi(x, y, y') = 0$$

bestimmt daher beliebig viele Ausdrücke

$$\Omega(y', \Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_{y'}, \Phi_{xx}, \ldots),$$

die sich gegenüber allen Punkttransformationen als Invarianten verhalten.

Wir werden andeuten, wie man Covarianten der Gleichung $y'' - \Phi = 0$ gegenüber allen Punkttransformationen finden kann.

Man setzt:

$$B'f + \frac{\delta y'''}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial y'''} = C'f,$$

berechnet $\delta y'''$ in gewöhnlicher Weise als ein *lineare* Function von ξ, η und ihren Differentialquotienten erster, zweiter und dritter Ordnung. Darnach ersetzt man in dem gefundenen Ausdrucke die Grösse y'' durch Φ. Alsdann sind die $C'f$ die infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe.

Nunmehr setzt man:

$$B''f + \frac{\delta y'''}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial y'''} + \frac{\delta y^{(4)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial y^{(4)}} = C''f$$

und ersetzt wiederum überall y'' durch Φ. Dann sind auch die $C''f$ die infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe. Berechnet man in entsprechender Weise die Ausdrücke $C^{(3)}f \ldots C^{(q)}f$ und wählt q hinlänglich gross, so bestimmen die Gleichungen $C^{(q)}f = 0$ ein vollständiges System. Die Lösungen desselben besitzen die Form:

$$W(y', y''' \ldots y^{(q+2)}, \Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_{y'}, \Phi_{xx} \ldots)$$

und verhalten sich gegenüber allen Punkttransformationen invariant*).

*) Es mag übrigens bemerkt werden, dass es bei der Berechnung von Covarianten der Gleichung $y'' - \Phi = 0$ nicht nothwendig ist die Grösse y'' wegzuschaffen.

Es ist klar, dass man in ganz analoger Weise Invarianten oder Covarianten der Gleichung $y'' - \Phi = 0$ gegenüber einer ganz beliebigen unendlichen (oder endlichen) Gruppe von Punkttransformationen berechnen kann.

15. Wir betrachten jetzt einen Ausdruck von der Form $W(x, y, y')$ und werden zeigen, dass derselbe Invarianten (und Covarianten) gegenüber allen Punkttransformationen besitzt.

Bei der infinitesimalen Punkttransformation:

$$\xi(xy)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xy)\frac{\partial f}{\partial y}$$

erhält y', wie wir wissen, das Increment:

$$\frac{dy'}{dt} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\, y' - \xi_y \cdot y'^2 = \zeta.$$

Daher sind die Ausdrücke

$$B'f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

die infinitesimalen Transformationen der unendlichen Gruppe:

$$(12) \qquad y_1 = Y(x, y), \quad x_1 = X(x, y), \quad y_1' = \frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'}.$$

Führt man nun in $W(x, y, y')$ die neuen Variabeln x_1, y_1, y_1' ein, so erhält W allerdings eine neue Form $W_1(x_1, y_1, y_1')$. *Doch besteht die Gleichung:*

$$W(x\, y\, y') = W_1(x_1\, y_1\, y_1')$$

und daher muss W als eine bei der Gruppe (12) *invariante Grösse betrachtet werden.*

Dagegen ändern die Differentialquotienten von W nach x, y, y' bei jeder Transformation (12) nicht allein ihre Form, sondern zugleich ihren *Zahlenwerth.* Man berechnet die Incremente

$$\delta W_x,\ \delta W_y,\ \delta W_{y'},\ \delta W_{xx} \ldots$$

wie gewöhnlich und erkennt somit die Existenz von Invarianten:

$$\Omega(y',\ W_x,\ W_y,\ W_{y'} \ldots$$

und von Covarianten

$$\Phi(y',\ y'',\ y''' \ldots\ W_x,\ W_y,\ W_{y'} \ldots),$$

die wie immer als Lösungen von vollständigen Systemen definirt sind.

16. Ich betrachte wiederum die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen:

$$y_1 = Y(x, y), \quad x_1 = X(x, y).$$

Führe ich in drei Functionen f, F und Φ von x, y die neuen Variabeln x_1, y_1 ein, so erhalten sie allerdings neue Formen f_1, F_1 und Φ_1, während ihre Zahlenwerthe ungeändert bleiben, indem

$$f = f_1, \quad F = F_1, \quad \Phi = \Phi_1$$

ist. Ich betrachte daher f, F und Φ als invariante Grössen bei unserer unendlichen Gruppe. Dagegen werden die Differentialquotienten f_x, f_y, F_x, F_y, Φ_x, Φ_y transformirt und man erkennt leicht die Existenz von Invarianten von der Form:

$$I(f_x, f_y, F_x, F_y, \Phi_x, \Phi_y \ldots).$$

Da auch die Grössen $y', y'' \ldots$ durch unsere Gruppe transformirt werden, so existiren ebenfalls invariante Ausdrücke von der Form:

$$\Omega(f_x, f_y \ldots \Phi_y \ldots y', y'' \ldots).$$

Bemerkt man, dass die Gleichungen $f =$ Const., $F =$ Const., $\Phi =$ Const. drei Curvenschaaren bestimmen und dass diejenige vierte Curvenschaar, welche jene drei nach constantem anharmonischen Verhältniss schneidet, durch eine Differentialgleichung *erster* Ordnung bestimmt wird, so findet man ohne Rechnung eine Covariante Ω, die nur von den vier Grössen

$$\frac{f_x}{f_y}, \quad \frac{F_x}{F_y}, \quad \frac{\Phi_x}{\Phi_y}, \quad y'$$

abhängt.

17. Ist eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter oder höherer Ordnung

$$y^{(n)} - \Phi(x\, y\, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

vorgelegt, so besitzt dieselbe Invarianten und Covarianten nicht allein gegenüber allen Punkttransformationen, sondern zugleich gegenüber allen Berührungstransformationen.

Nimmt man zwei oder mehrere Differentialgleichungen, so besitzen dieselben simultane Invarianten und Covarianten.

Desgleichen bestimmen Ausdrücke von der Form $\Phi(x\, y\, y' \ldots y^{(m)})$ Invarianten und Covarianten.

18. Führe ich in eine Gleichung von der Form:

$$0 = y'' + F_3(xy)\, y'^3 + F_2(xy)\, y'^2 + F_1 y' + F$$

die neuen Variabeln:

$$y_1 = Y(x, y), \quad x_1 = X(x, y)$$

ein, so erhalte ich eine neue Gleichung von der analogen Form:

$$0 = y_1'' + \Phi_3(x_1 y_1)\, y_1'^3 + \Phi_2(x_1 y_1)\, y_1'^2 + \Phi_1 y' + \Phi.$$

Dabei sind die Φ_x gewisse Functionen von den F_i und von X, Y mit ihren Differentialquotienten:

$$\Phi_x = \Pi_x(F_3, F_2, F_1, F, X_x, X_y \ldots),$$

und zwar bestimmen die zuletzt geschriebenen Gleichungen zusammen mit $y_1 = Y$, $x_1 = X$ eine unendliche Gruppe. Um die zugehörigen Invarianten zu finden, berechnen wir zunächst die $\delta\Phi_x$ folgendermassen:

In die Gleichung

$$\delta y'' + \delta y'(3F_3 y'^2 + 2F_2 y' + F_1) + \delta F_3 \cdot y'^3 + \delta F_2 \cdot y'^2 + \delta F_1 \cdot y' + \delta F = 0$$

tragen wir die Werthe

$$\delta y' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\, y' - \xi_y y'^2,$$

$$\delta y'' = (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')\, y'' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\, y'^2 + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y' + \eta_{xx}$$

ein, schaffen y'' weg und verlangen, dass die hervorgehende Relation in Bezug auf y' identisch besteht. Hieraus ergiebt sich eine Bestimmung der δF_x und wir erkennen die Existenz von Invarianten von der Form:

$$\Omega(F, F_1, F_2, F_3, F_x, F_y \ldots).$$

19. Führt man in die Gleichung:

$$y'' - F(x, y) = 0$$

neue Variabeln von der Form

(13) $$x_1 = \Phi(x), \quad y_1 = cy\sqrt{\Phi'(x)} + \Pi(x)$$

ein, so erhält man, wie man leicht verificirt, eine neue Gleichung von der analogen Form:

$$y_1'' - F_1(x_1 y_1) = 0,$$

und zwar ist F_1 eine gewisse Function von F, Φ, c und Π:

(14) $$F_1 = f(F, \Phi, \Pi, c).$$

Da die Gleichungen (13) eine unendliche Gruppe bestimmen, so muss diess ebenfalls von den vereinigten Gleichungen (13) und (14) gelten. Folglich hat die Gleichung $y'' - F(xy) = 0$ Invarianten von der Form:

$$\Omega(F, F_x, F_y \ldots).$$

20. In eine vorgelegte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$r = F(x, y, z, p, q, s, t)$$

führe ich neue Variabeln

(15) $$x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$$

ein und erhalte hierdurch eine neue Gleichung:

$$r_1 = F_1(x_1\, y_1\, z_1\, p_1\, q_1\, s_1\, t_1).$$

Dabei sind $p_1\, q_1\, s_1\, t_1$ und F_1 gewisse Functionen:

(16) $$p_1 = P, \quad q_1 = Q, \quad s_1 = S, \quad t_1 = T, \quad F_1 = \Phi$$

von $p\, q\, s\, t\, F$ wie auch von X, Y, Z und ihren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung. Da nun die Gleichungen (15), (16) eine unendliche Gruppe definiren müssen, bestimmt die Gleichung $r - F = 0$ unendlich viele Differentialinvarianten von der Form:

$$\Omega(p, q, s, t, F, F_x, F_y \ldots F_t \ldots).$$

Wünscht man diese Invarianten zu berechnen, so muss man zuerst die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe aufstellen. Man geht aus von der infinitesimalen Transformation:

$$\xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z},$$

berechnet die entsprechenden Incremente von p, q, r, s, t und setzt sodann überall F statt r ein. Hernach bestimmt man die Incremente:

$$\delta F_x\ \delta F_y \ldots \delta F_t$$

durch *Variation* der Gleichung

$$dF - F_x dx - F_y dy - F_z dz - F_p dp - F_q dq - F_s ds - F_t dt = 0$$

und fährt sodann in der gewöhnlichen Weise fort.

Dass partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung Invarianten gegenüber allen Punkttransformationen wie auch gegenüber allen Berührungstransformationen bestimmen, kündigte ich schon 1872 an. Nimmt man hinlänglich viele Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_8$ einer *vorgelegten* Gleichung $r - F = 0$ und berechnet dieselben als Functionen von $x\ y\ z\ p\ q\ s\ t$, so ist es immer möglich durch Elimination Relationen von der Form

$$\Pi(J_1\ J_2 \ldots J_8 \ldots) = 0$$

herzuleiten.

Hierauf lässt sich eine naturgemässe Classification aller partiellen Differentialgleichungen $r - F = 0$ gründen und offenbar dehnt sich diese Bemerkung auf beliebige partielle Differentialgleichungen aus. (*Göttinger Nachr.* 1872, p. 479.)

Sind mehrere Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t vorgelegt, so bestimmen dieselben offenbar simultane Invarianten und Covarianten gegenüber allen Punkt- oder Berührungstransformationen.

21. Denken wir uns insbesondere *algebraische* partielle Differentialgleichungen vorgelegt, so vereinfacht sich die Theorie ihrer Invarianten. Wir wollen insbesondere eine Gleichung von der Form:

$$r + Bs + Ct + D = 0$$

betrachten.

Führen wir neue Variabeln

$$x_1 = X(x\ y\ z),\quad y_1 = Y,\quad z_1 = Z \tag{17}$$

ein, so erhalten wir eine Gieichung von analoger Form:

$$r_1 + B_1 s_1 + C_1 t_1 + D_1 = 0.$$

Dabei sind p_1, q_1, B_1, C_1, D_1 gewisse Functionen von p, q, B, C, D und X, Y, Z mit ihren Differentialquotienten:

$$p_1 = P \ldots D_1 = F. \tag{18}$$

Die Gleichungen (17), (18) bestimmen nun offenbar eine unendliche

Gruppe, deren infinitesimale Transformationen man findet, indem man δp, δq, δr, δs, δt berechnet und diese Werthe in die Gleichung

$$\delta r + B\delta s + C\delta t + s\delta B + t\delta C + \delta D = 0$$

einführt. Man erkennt hierdurch die Existenz von Invarianten von der Form:

$$\Omega(p, q, B, C, D, B_x, B_y, \ldots).$$

Es sei anderseits vorgelegt, eine Monge-Ampère'sche Gleichung

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0.$$

Führt man auf dieselbe eine beliebige Berührungstransformation aus, so erhält man eine neue Gleichung von der analogen Form:

$$r_1 t_1 - s_1^2 + A_1 r_1 + B_1 s_1 + C_1 t_1 + D_1 = 0.$$

Dabei sind A_1, B_1, C_1, D_1 gewisse Functionen von A, B, C, D.

Hierdurch erhalten wir wiederum eine unendliche Gruppe, die uns Differentialinvarianten von der Form:

$$\Omega(x, y, z, p, q, A, B, C, D, A_x, A_y, \ldots)$$

liefert.

22. Die äusserst wichtige Aufgabe alle Invarianten der linearen Gleichung

$$y^{(r)} + X_{r-1}y^{(r-1)} + \cdots + X_1 y' + Xy = 0 \tag{19}$$

gegenüber der unendlichen Gruppe

$$x_1 = \Phi(x), \quad y_1 = yF(x)$$

zu finden, ist bekanntlich von Laguerre und noch eingehender von Halphen behandelt worden.

Man kann gleichzeitig die allgemeinere Frage nach den zugehörigen Covarianten stellen.

Die genannten Mathematiker haben ebenfalls eine Integrationstheorie für diejenigen linearen Gleichungen (19) entwickelt, welche in eine ebensolche Gleichung mit *constanten* Coefficienten transformirt werden können. Diese Theorie subsumirt sich im Wesentlichen als sehr specieller Fall unter meine 1874 angekündigten und 1882—83 im Detail durchgeführte Integrationstheorie von Gleichungen

$$f(x\,y\,y' \ldots y^{(m)}) = 0$$

mit einer continuirlichen Gruppe, (Göttinger Nachr. vom Dec. 1874; Archiv for Math. og Nat. Bd. VII und VIII, 1882—83.)

Ich hebe übrigens hervor, dass Halphens schöne Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen (Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables, gekrönte Preisschrift, eingeliefert 1880, veröffentlicht 1883) sich ohne weiteres auf solche Gleichungen

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}) = 0$$

ausdehnen, die durch eine unbekannte Punkt- oder Berührungstransformation auf eine integrable *lineare* Gleichung reductibel sind, (Ges. d. W. z. Chr. 1883: Untersuchungen über Differentialgleichungen, III). Ich behalte mir vor hierauf zurückzukommen.

23. Eine lineare, partielle Differentialgleichung (zweiter Ordnung):

$$r + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0, \tag{20}$$

deren Coefficienten $S, T, \ldots, Z$ nur von x und y abhängen, erhält durch eine beliebige Transformation der unendlichen Gruppe:

$$z_1 = z \cdot F(x, y), \quad x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y) \tag{21}$$

die ebenfalls lineare Form:

$$r_1 + S_1 s_1 + T_1 t_1 + P_1 p_1 + Q_1 q_1 + Z_1 z_1 = 0.$$

Die neuen Coefficienten werden als Functionen der alten durch Gleichungen definirt, die mit (21) vereinigt eine unendliche Gruppe bilden. Man berechnet zuerst die Incremente $\delta S, \delta T, \ldots, \delta Z$ bei einer infinitesimalen Transformation der besprochenen Gruppe, und findet hiernach beliebig viele Invarianten (und Covarianten) der Gleichung (20) gegenüber unserer Gruppe.

24. Wir bringen nach Gauss' Vorgang das Bogenelement einer beliebigen Fläche auf die Form

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx\, dy + G dy^2. \tag{22}$$

Führen wir nun neue Variable

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

ein, so erhält unser Bogenelement die neue Form:

$$ds^2 = E_1\, dx_1^2 + 2F_1\, dx_1\, dy_1 + G_1\, dy_1^2.$$

Dabei werden E_1, F_1 und G_1 als Functionen von E, F, G, x, y durch gewisse Relationen bestimmt, die mit $x_1 = X$, $y_1 = Y$ vereinigt eine unendliche Gruppe bilden. Wünschen wir die von Gauss und seinen Nachfolgern entdeckten Invarianten (und Covarianten) dieser Gruppe nach meinen allgemeinen Regeln zu finden, so variiren wir erst die Gleichung (22), indem wir ds als Constante betrachten:

$$\delta E \,.\, dx^2 + 2\delta F\, dx\, dy + \delta G\, dy^2$$
$$+ \{(2E dx + 2F dy)\, d\xi + 2(F dx + G dy)\, d\eta\}\, \delta t = 0$$

und erhalten hierdurch die Relationen

$$-\frac{\delta E}{\delta t} = 2E\xi_x + 2F\eta_x,$$

$$-\frac{\delta F}{\delta t} = E\xi_y + F\xi_x + F\eta_y + G\eta_x,$$

$$-\frac{\delta G}{\delta t} = 2F\xi_y + 2G\eta_y,$$

Darnach bilden wir die Gleichungen:

$$\delta(dE - E_x dx - E_y dy) = 0 \ldots$$

und finden so die Werthe der Incremente von E_x, E_y, ..., G_y. Indem wir in bekannter Weise fortfahren, finden wir offenbar zuerst das *Gauss'sche Krümmungsmass.*

Fügen wir zu der soeben betrachteten Gruppe diejenigen Gleichungen, welche y_1', y_1'', ... als Functionen von x, y, y', y'', ... bestimmen, so erhalten wir invariante Grössen, die Differentialquotienten von y enthalten.

Statt y', y'', ... könnte man eine Function Φ (oder auch mehrere Functionen) von x, y einführen. In den Variabeln $x_1\, y_1$ erhält Φ eine neue *Form*

$$\Phi_1(x_1, y_1) = \Phi(x, y)$$

während der entsprechende *Zahlenwerth* ungeändert bleibt. Daher setzen wir $\delta\Phi = 0$ und ebenso:

$$\delta(d\Phi - \Phi_x dx - \Phi_y dy) = 0,$$

woraus:

$$-\frac{\delta\Phi_x}{\delta t} = \Phi_x \xi_x + \Phi_y \eta_x,$$

$$-\frac{\delta\Phi_y}{\delta t} = \Phi_x \xi_y + \Phi_y \eta_y.$$

Setzen wir diese Werthe wie auch die früher bestimmten Werthe von δE, δF, δG in

$$B'f = X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + \frac{\delta E}{\delta t}\frac{df}{dE} + \cdots + \frac{\delta\Phi_x}{\delta t}\frac{df}{d\Phi_x} + \frac{\delta\Phi_y}{\delta t}\frac{df}{d\Phi_y}$$

ein, so erhalten wir die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe. Alle Gleichungen von der Form $B'f = 0$ haben eine gemeinsame Lösung, nämlich die von Beltrami eingeführte Invariante:

$$\frac{E\Phi_y^2 + 2F\Phi_x\Phi_y + G\Phi_x^2}{EG - F^2}$$

u. s. w.

Die vorangehenden Betrachtungen können durch die Annahme:

$$E = G = 0, \quad \xi_y = \eta_x = 0$$

bedeutend vereinfacht werden.

25. Ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den Variabeln $z, x_1 \ldots x_n$ vorgelegt, so kann man, wie ich in den Göttinger Nachr. 1872, p. 479 angedeutet habe, die Invarianten derselben gegenüber allen Punkttransformationen bestimmen. Darnach könnte man die synthetische Bedeutung der einfachsten dieser Invarianten aufsuchen. Man könnte z. B. versuchen, diejenigen *invarianten Relationen* aufzustellen, welche bestehen müssen, wenn unsere Gleichung

ein vollständiges Integral besitzt, das durch *mehrere* Relationen zwischen $z, x_1 \dots x_n$ definirt wird. Ich habe noch nicht Zeit gefunden, diese Fragen, mit denen ich mich schon 1872 beiläufig beschäftigte, näher zu discutiren.

26. In r gegebenen Functionen $F_1 F_2 \dots F_r$ von $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ führen wir neue Variabeln x'_k, p'_i vermöge einer *arbiträren* Berührungstransformation ein, wobei eine Relation von der Form

$$\sum p' dx' = \sum p dx + dV$$

besteht.

In den neuen Variabeln erhält jede Grösse F_k eine neue Form F_k', während ihr Zahlenwerth ungeändert bleibt. Erinnern wir uns nun, dass jede infinitesimale Berührungstransformation das Symbol (W, f) besitzt, und dass dabei W eine arbiträre Function von den x_k, p_k bezeichnet, so stellt man leicht die Definitionsgleichungen aller Differentialinvarianten der Grössen F_k gegenüber allen Berührungstransformationen auf. Man verificirt ohne Schwierigkeit den bekannten Satz, dass alle Ausdrücke (F_i, F_k), $((F_i, F_k), F_j)$ etc. Invarianten sind und erkennt überdiess, dass alle Invarianten sich durch Wiederholung der Poisson-Jacobi'schen Operation ausdrücken lassen. (Vergl. hierzu Math. Ann. Bd. VIII, p. 270–273, p. 297–298).*)

In der soeben citirten Arbeit erledigte ich die Frage, ob r gegebene Functionen $F_1 \dots F_r$ von $x_1 \dots p_n$ durch eine Berührungstransformation in r vorgelegte Functionen $F_1' \dots F_r'$ von $x_1' \dots p_n'$ übergeführt werden können. Diese Aufgabe liess sich auf den Fall reduciren, dass die F_k unabhängig waren und Relationen von der Form:

$$(F_i, F_k) = \Omega_{ik}(F_1, F_2, \dots, F_r)$$

erfüllen. Alsdann bestanden die zur Existenz der verlangten Transformation erforderlichen und hinreichenden Criterien darin, dass die F_k' ebenfalls unabhängig waren und dabei die analogen Relationen

$$(F_i', F_k') = \Omega_{ik}(F_1' \dots F_r')$$

befriedigten.

Da die F_k sich bei einer Berührungstransformation als Invarianten verhalten, indem die Gleichungen $F_k = F_k'$ bestehen, beruhen die soeben besprochenen Criterien darauf, dass gewisse bei den ursprünglichen Variabeln bestehende Relationen zwischen Invarianten auch bei den neuen Variabeln stattfinden müssen.

---

*) Durch Ausführung der im Texte angegebenen Entwickelungen erkennt man u. A., dass die $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Grössen $(F_i F_k)$ wenn r hinlänglich gross ist, durch gewisse *von der Form der Functionen F_k unabhängige endliche Relationen* verknüpft sind.

§ 4.

Schlussbemerkungen.

27. Stellt man überhaupt die Frage, ob gewisse Differentialgleichungen $F_k = 0$ oder gewisse analytische Ausdrücke Φ_k durch eine Transformation einer vorgelegten continuirlichen Gruppe auf gewisse gegebene Formen gebracht werden können, so erhält man jedesmal leicht als nothwendige Criterien gewisse Differentialrelationen, die gegenüber der betreffenden Gruppe einen invarianten Charakter besitzen.

Fragt man z. B., wenn ein vorgelegter Ausdruck $Xdx + Ydy$ die Form eines vollständigen Differentials dU erhalten kann, so ist die Antwort bekanntlich, dass hierzu das Bestehen der Gleichung $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ erforderlich und hinreichend ist. Diese Bedingungsgleichung wird durch jede Punkttransformation in ungeänderter Form reproducirt.

Die Theorie des Pfaff'schen Problems giebt in ganz ähnlicher Weise eine Reihe Criterien, die gegenüber beliebigen Punkttransformationen einen invarianten Character besitzen.

Wünscht man zu entscheiden, ob eine Fläche mit dem Bogenelemente

$$ds^2 = Edx^2 + 2F\,dx\,dy + Gdy^2$$

auf eine andere Fläche mit dem Bogenelemente

$$ds_1^2 = E_1 dx_1^2 + 2F_1\,dx_1\,dy_1 + G_1\,dy_1^2$$

abwickelbar ist, so nimmt man nach den von Minding gegebenen Regeln gewisse zugehörige Differentialinvarianten A, B, C, berechnet sie für jede der beiden Flächen als Functionen von x und y, und bestimmt hiernach durch Elimination von x, y die zwischen A, B, C bestehenden Relationen. Findet man nur eine solche, etwa:

$$A = \Omega(B, C),$$

so ist ihre Form das wahre Bild aller Eigenschaften der Fläche, welche bei Biegung ungeändert bleiben. Zwei Flächen sind auf einander abwickelbar, wenn A, B, C für beide Flächen durch dieselbe Relation verknüpft sind. A, B, C sind durch mehrere Relationen verknüpft, wenn die betreffende Fläche in sich ohne Dehnung verschoben werden kann.

Sollen m gegebene Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ von $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ durch eine Berührungstransformation in $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ oder in $p_1' \ldots p_m'$ übergeführt werden können, so ist dazu nach meinen alten Untersuchungen nothwendig und hinreichend, dass die $\frac{m(m-1)}{2}$ Aus-

drücke (F_i, F_k) sämmtlich identisch verschwinden. Dabei ist jede Grösse (F_i, F_k) eine Invariante gegenüber allen Berührungstransformationen.

Wünscht man zu entscheiden, ob gewisse Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_r$ von $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ durch eine zweckmässige Berührungstransformation in gewisse gegebene Functionen $F_1' \ldots F_r'$ von $x_1' \ldots p_n'$ übergeführt werden können, so bildet man nach meinen früher citirten Untersuchungen eine gewisse Anzahl Invarianten $(F_i, F_k) \ldots$, und bestimmt die zwischen ihnen bestehenden Relationen. Erhält man in beiden Fällen identisch dieselben Relationen, so ist die verlangte Transformation möglich, sonst aber nicht.

Sind immer $F_1 \ldots F_r$ und $\varrho + 1$ *beliebige* zugehörige Differentialinvarianten durch eine Relation verknüpft, so gestattet ein jedes unter den F_k $2n - r - \varrho$ wesentlich verschiedene infinitesimale Transformationen. Unter diesen Voraussetzungen bestimmen nämlich die F_k eine Gruppe, deren Polargruppe $2n - r - \varrho$ unabhängige Functionen enthält.*)

Fragt man, ob eine gegebene Function $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ durch eine Berührungstransformation auf eine gewisse andere Form $F'(x', y', z', p', q', r', s', t')$ gebracht werden kann, so bestimmt man die Differentialinvarianten $J_1, J_2, \ldots$ der Grösse F gegenüber allen Berührungstransformationen und berechnet sie als Functionen von $x\, y\, z \ldots t$:

$$J_k = J_k(x, y, \ldots, s, t).$$

Man findet hierdurch zur Beantwortung der gestellten Frage beliebig viele Relationen

$$J_k(x \ldots t) = J_k'(x' \ldots t').$$

Erhält man in dieser Weise nie contradictorische Gleichungen, so ist die verlangte Transformation möglich. Gestattet F eine oder mehrere infinitesimale Berührungstransformationen in sich, so sind immer acht beliebige Grössen J_k durch eine Relation verknüpft u. s. w.

Besonders einfach stellt sich die, zuerst von mir erledigte Frage, ob eine gegebene Gleichung $f(x, y, \ldots, r, s, t) = 0$ auf die Form $s = 0$, oder auf die Form $r = 0$ reductibel ist.

Christiania, 29. Mai 1884.

---

*) Siehe hierzu Math. Ann. Bd. VIII, Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen p. 217 und p. 270.

Ueber die Factorenzerlegung der Discriminanten algebraischer Gleichungen.

Von

Eugen Netto in Berlin.

§ 1.

Wir gehen von der irreductiblen Gleichung

$$(1) \qquad f(x) \equiv x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

aus, in welcher $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Grössen des Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ sein sollen; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mögen die Wurzeln der Gleichung (1) und

$$(2) \qquad \Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$$

die Discriminante dieser Gleichung sein. Ferner bezeichnen wir, wenn unter $u_1, u_2, \ldots, u_n$ unbestimmte Grössen verstanden werden, mit

$$(3) \qquad \xi_i = u_1 x_{i_1} + u_2 x_{i_2} + \cdots + u_n x_{i_n}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n!)$$

die Werthe der Galois'schen Resolvente von (1), und mit

$$(4) \qquad G(\xi; u_1 u_2, \ldots, u_n) \equiv \prod (\xi - \xi_i) = 0$$

die Galois'sche Resolventengleichung, endlich mit

$$(5) \qquad g(\xi; u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \prod_k (\xi - \xi_k) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

einen ihrer irreductiblen Factoren im Bereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$.

Die r Substitutionen, welche die Werthe ξ_k in einander überführen, bilden *die Gruppe der Substitutionen von $f(x)$* oder kurz *die Gruppe von $f(x)$*. Wir können dieselbe ebensowohl als Gruppe unter den x, wie unter den u auffassen. Das Letztere ist deshalb von Wichtigkeit, weil wir uns dadurch von etwaigen Beziehungen befreien können, durch welche die x miteinander verbunden sind. (Vgl. L. Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, § 11).

Die Betrachtung dieser Gruppe gewährt einen Einblick in die Beschaffenheit der Discriminante Δ hinsichtlich ihrer Factorenzerlegung. Es wird ersichtlich: *Ist die Gruppe von $f(x) = 0$ einfach*

transitiv, dann zerfällt Δ *in ebenso viele Theile, als diejenige Untergruppe transitiv verbundene Elementensysteme umfasst, welche ein beliebiges Element* x *nicht mehr umstellt.* Denn wegen der vorausgesetzten Irreductibilität von $f(x)=0$ enthält jeder Factor von Δ mindestens eine der Differenzen $(x_1 - x_\alpha)$ als Theiler. Umgekehrt treten zu $(x_1 - x_\alpha)$ in denselben irreductiblen Factor von Δ alle und auch nur diejenigen Differenzen $(x_1 - x_\beta)$, welche aus jener ersteren durch Anwendung von solchen Substitutionen der Gruppe abgeleitet werden können, die x_1 nicht umsetzen. Folglich umfasst der Factor von Δ, welcher $(x_1 - x_\alpha)$ enthält, $(x_1 - x_\beta)$ dann und nur dann, wenn x_α, x_β in derjenigen Untergruppe transitiv verbunden vorkommen, deren Substitutionen das Element x_1 nicht umstellen.

Denselben Satz können wir auch in folgender Form aussprechen: *Zerfällt eine irreductible Gleichung* $f(x)=0$ *bei der Adjunction einer ihrer Wurzeln in* μ *irreductible Theile, dann zerfällt auch die Discriminante* Δ *von* $f(x)=0$ *in* μ *Factoren.* Hierbei sei hervorgehoben, dass diese Factoren nicht irreductibel zu sein brauchen.

Dieses, aus den Eigenschaften der Gruppe hergeleitete Resultat ist für jede Gleichung derselben Gattung wie $f(x)=0$ und somit auch für die Fundamentalgleichung der Gattung gültig.

Die Discriminante jeder Gleichung, deren Gruppe einfach transitiv ist, zerfällt in rationale Factoren. Liegt eine Abel'sche Gleichung vor, so ergiebt sich die Existenz von $(n-1)$ Factoren. Allgemein aber findet dies bei jeder Gleichung statt, deren Wurzeln rationale Functionen einer einzigen unter ihnen sind, also bei Gleichungen, welche Galois'sche Resolventen zu Wurzeln haben. Denn, mit Ausnahme der identischen Substitution, setzen alle Substitutionen der Gruppe sämmtliche Elemente um; oder auch: bei der Adjunction einer einzigen Wurzel zerfällt die Gleichung in lauter lineare Factoren.

Bei Gleichungen, deren Gruppe metacyklisch und somit zweifach transitiv ist, braucht die Discriminante nicht zu zerfallen; bei Gleichungen, die zur halb-metacyklischen Gruppe gehören, ergeben sich zwei Factoren.

§ 2.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass in der irreductiblen Gleichung $f(x)=0$ zwischen zwei Wurzeln x_1, x_1' die Beziehung $x_1' = \Theta(x_1)$ bestehe, wobei Θ eine *ganze ganzzahlige* Function sein soll. Die Wurzeln der Gleichung (1) ordnen sich dann in das Schema:

$$
\begin{array}{llll}
x_1, & \Theta(x_1), & \Theta^2(x_1), \; \ldots, & \Theta^{m-1}(x_1), \\
x_2, & \Theta(x_2), & \Theta^2(x_2), \; \ldots, & \Theta^{m-1}(x_2), \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{6}
$$

wobei natürlich für $x_1, x_2, \ldots$ jedesmal $\Theta^m(x) = x$ ist.

In Δ tritt der Factor $(x_1 - \Theta(x_1))$ auf. Da die Gruppe von (1) transitiv ist, so wird derjenige Factor E_1 der Discriminante, welcher diese Differenz enthält, folgende Gestalt annehmen:

$$(7)\quad E_1 = (x_1 - \Theta(x_1))(\Theta(x_1) - \Theta^2(x_1))\ldots(x_2 - \Theta(x_2))(\Theta(x_2) - \Theta^2(x_2)) \\ \ldots(x_3 - \Theta(x_3))\ldots,$$

da ja die Substitution, welche x_1 in eine andere Wurzel x' überführt, die Differenz $x_1 - \Theta(x_1)$ in $x' - \Theta(x')$ verwandelt.

Ebenso erhält man durch die Betrachtung von $x_1 - \Theta^2(x_1)$, $x_1 - \Theta^3(x_1)$, ... als Factoren der Discriminante:

$$(7')\quad \begin{cases} E_2 = (x_1 - \Theta^2(x_1))(\Theta(x_1) - \Theta^3(x_1)) \ldots (x_2 - \Theta^2(x_2)) \ldots, \\ E_3 = (x_1 - \Theta^3(x_1))(\Theta(x_1) - \Theta^4(x_1)) \ldots (x_2 - \Theta^3(x_2)) \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir werden jetzt zeigen, dass E_1 ein Theiler von E_2, E_3, ... wird.

Um dies zu beweisen, bilden wir die Zerlegung

$$\Theta(x) - x = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \ldots (x - z_k);$$

die z können zum Theil oder sämmtlich unter einander gleich werden. Aus dieser Zerlegung folgt

$$z_\alpha = \Theta(z_\alpha), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Weiter ergiebt sich, da $\Theta[\Theta(x)] = \Theta^2(x)$ ist,

$$\Theta^2(x) - \Theta(x) = (\Theta(x) - z_1)(\Theta(x) - z_2) \ldots (\Theta(x) - z_k) \\ = (\Theta(x) - \Theta(z_1))(\Theta(x) - \Theta(z_2)) \ldots (\Theta(x) - \Theta(z_k));$$

und weil der Quotient

$$\frac{\Theta(x) - \Theta(z)}{x - z}$$

eine ganze, ganzzahlige Function von x und z ist, so wird

$$\frac{\Theta^2(x) - \Theta(x)}{\Theta(x) - x} = \frac{\Theta(x) - \Theta(z_1)}{x - z_1} \cdot \frac{\Theta(x) - \Theta(z_2)}{x - z_2} \cdots \frac{\Theta(x) - \Theta(z_k)}{x - z_k}$$

eine ganze, ganzzahlige Function von $x, z_1, z_2, \ldots, z_k$, welche in den z_α symmetrisch ist. Folglich ist dieselbe ganz und ganzzahlig in x und in den Coefficienten von $\Theta(x) - x$, d. h. in dem festgestellten Rationalitätsbereiche.

Bezeichnen wir den Quotienten mit $T_1(x)$, so können wir setzen

$$(8)\quad \Theta^2(x) - \Theta(x) = [\Theta(x) - x] \cdot T_1(x),$$

und ebenso ergiebt sich

$$(8') \begin{cases} \Theta^3(x) - \Theta^2(x) = (\Theta^2(x) - \Theta(x))\, T_1(\Theta(x)) = (\Theta(x) - x)\, T_2(x), \\ \Theta^4(x) - \Theta^3(x) = (\Theta^3(x) - \Theta^2(x))\, T_1(\Theta(x)) = (\Theta(x) - x)\, T_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und es werden daher auch $\Theta^2(x) - x = \Theta^2(x) - \Theta(x) + \Theta(x) - x$, $\Theta^3(x) - x, \dots$ durch $\Theta(x) - x$ theilbar sein. Somit ist, wenn wir sämmtliche Factoren in den Producten (7) betrachten

$$(9) \qquad E_2 = E_1 Q_2, \quad E_3 = E_1 Q_3, \dots,$$

und Δ *enthält den rationalen Factor* E_1^{m-1}.

Es möge noch bemerkt werden, dass aus der Combination der Gleichungen (8')

$$(10) \qquad Nm\, T_1(x_\alpha) = 1, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

sich ergiebt.

Ist m eine Primzahl, dann kann an der Stelle von Θ ebensogut $\Theta^2, \Theta^3, \dots, \Theta^{m-1}$ in (6) zur Darstellung aller Wurzeln einer Zeile benutzt werden; denn die beiden Reihen

$$x_\alpha,\ \Theta(x_\alpha),\ \Theta^2(x_\alpha), \dots, \Theta^{m-1}(x_\alpha)$$

und

$$x_\alpha,\ \Theta^\nu(x_\alpha),\ \Theta^{2\nu}(x_\alpha), \dots, \Theta^{(m-1)\nu}(x_\alpha)$$

sind identisch. Das heisst: jedes der $E_1, E_2, \dots$ ist durch ein jedes andere theilbar, so dass sie sämmtlich einander gleich werden. In diesem Falle ergiebt sich daher der Factor von Δ:

$$(11) \qquad E_1 \cdot E_2 \dots E_{m-1} = E_1^{m-1}.$$

Ist m zusammengesetzt, so werden doch wenigstens diejenigen $\varphi(m)$ Glieder der Reihe $E_1, E_2, \dots, E_m$ gleich E_1 werden, deren Index relativ prim zu m ist. Allgemeiner folgt, dass wenn ν_1 und ν_2 denselben grössten gemeinsamen Theiler mit m besitzen, die beiden Reihen

$$x_\alpha,\ \Theta^{\nu_1}(x\ ),\ \Theta^{2\nu_1}(x_\alpha), \dots \quad \text{und} \quad x_\alpha,\ \Theta^{\nu_2}(x_\alpha),\ \Theta^{2\nu_2}(x_\alpha), \dots$$

mit einander, abgesehen von der Folge der einzelnen Glieder, übereinstimmen, so dass also $\Theta^{\nu_2}(x_\alpha)$ in der ersten, $\Theta^{\nu_1}(x_\alpha)$ in der zweiten Reihe vorkommt. Hieraus ergiebt sich wie oben die Theilbarkeit von E_{ν_1} durch E_{ν_2}, sowie umgekehrt, die von E_{ν_2} durch E_{ν_1}. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Hat m die Theiler $m_1 = 1,\ m_2 > m_1,\ m_3 > m_2, \dots,$ *und sind* $\mu_1 = m,\ \mu_2,\ \mu_3, \dots$ *die complementären Factoren zu den m, so dass* $m_\alpha \cdot \mu_\alpha = m$ *wird, dann ist*

$$(12) \qquad E_1 E_2 E_3 \dots E_{m-1} = E_{m_1}^{\varphi(\mu_1)} E_{m_2}^{\varphi(\mu_2)} E_{m_3}^{\varphi(\mu_3)} \dots .$$

Hierbei ist E_α ein Theiler von E_β, sobald α ein Theiler von β wird, und speciell sind E_{m_2}, E_{m_3}, ... Vielfache von E_1. Das Product (12) *tritt als Factor der Discriminante Δ auf; die $E_1, E_2, \ldots$, sind rational darstellbare Grössen.*

§ 3.

Wenn unter den Grössen (6) die Beziehung $x_2 = \vartheta(x_1)$ besteht, wobei $\vartheta^q(x_1) = x_1$ sein soll, dann lassen sich die gemachten Schlüsse bei der Differenz $x_1 - x_2 = x_1 - \vartheta(x_1)$ wiederholen; wir erhalten als rationale Factoren der Discriminante Δ die Functionen

$$(13)\quad \begin{cases} H_1 = \prod (x_\alpha - \vartheta(x_\alpha))\,(\vartheta(x_\alpha) - \vartheta^2(x_\alpha)) \ldots, \\ H_2 = \prod (x_\alpha - \vartheta^2(x_\alpha))\,(\vartheta(x_\alpha) - \vartheta^3(x_\alpha)) \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Genau wie oben ergiebt sich

$$(14)\qquad H_1 \,.\, H_2 \ldots H_{q-1} = H_1^{\varphi(q)} H_{q_2}^{\varphi(\varkappa_2)} \ldots,$$

wenn $q_2, q_3, \ldots$ die Theiler von q und $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ ihre complementären Factoren bedeuten. Da keiner der Factoren aus (13) bereits in (7), (7′) vorkommt, so wird (14) als neuer Theiler von Δ auftreten.

Ist $f(x) = 0$ eine allgemeinere Abel'sche Gleichung, von der Art, wie sie Abel in seinem „Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algebriquement" § 4 behandelt hat, so dass

$$\Theta(\vartheta(x_\alpha)) = \vartheta(\Theta(x_\alpha))$$

ist, dann ergeben die Differenzen $x_\alpha - \Theta^\mu(\vartheta^\nu(x_\alpha))$ wiederum ähnliche Factoren, wie die E und die H.

Ist $f(x) = 0$ eine einfache Abel'sche Gleichung, dann sind alle ihre Wurzeln in der ersten Zeile des Schema (6) enthalten. Demnach giebt es hier ausser $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ keine weiteren Factoren von Δ, da bereits alle Differenzen $(x_1 - x_2), (x_1 - x_3), \ldots, (x_1 - x_m)$ in jenen Functionen vorkommen. Folglich ist hier

$$(15)\qquad \Delta = E_1^{\varphi(m)} E_{m_2}^{\varphi(\mu_2)} E_{m_3}^{\varphi(\mu_3)} \ldots = E_1^{m-1} \cdot Q.$$

Falls $m = n$ eine Primzahl wird, ergiebt sich

$$(15')\qquad \Delta = E_1^{m-1},$$

d. h. *die Discriminante einer einfachen Abel'schen Gleichung des Primzahlgrades m wird eine $(m-1)^{te}$ Potenz.* In (15) und (15′) ist eine Verallgemeinerung des Satzes enthalten, den ich im Journal f. d. reine u. angew. Mathematik Bd. 95, S. 237 ausgesprochen habe.

§ 4.

Es sei jetzt p eine Primzahl und

$$(16)\qquad f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=0$$

die Kreistheilungsgleichung für p; ω möge eine primitive Wurzel derselben, g eine primitive Congruenzwurzel für p bedeuten. Dann ist

$$Nm(1-\omega)=Nm(1-\omega^2)=\cdots=(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots=p.$$

Die Discriminante Δ von (16) wird

$$\Delta=Nm(\omega-\omega^2)\,Nm(\omega-\omega^3)\cdots Nm(\omega-\omega^{p-1})=p^{p-2}.$$

Die Grössen $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1}$ bilden ein Fundamentalsystem der durch $f(x)=0$ bestimmten Gattung. Die Fundamentalgleichung der Gattung hat daher die $(p-1)$ Grössen.

$$(17)\qquad \xi_\alpha=u_0\omega^{g^\alpha}+u_1\omega^{g^{\alpha+1}}+u_2\omega^{g^{\alpha+2}}+\cdots+u_{p-1}\omega^{g^{\alpha-1}},\qquad (\alpha=0,1,\ldots,p-2)$$

zu Wurzeln. Bezeichnen wir ihre Discriminante mit Δ_ξ, so folgt

$$\xi_0-\xi_1=(1-\omega)\,U_{01},\qquad \xi_0-\xi_2=(1-\omega)\,U_{02},\ \ldots,$$

$$\Delta_\xi=Nm(\xi_0-\xi_1)\,Nm(\xi_0-\xi_2)\ldots Nm(\xi_0-\xi_{p-2})$$
$$=p^{p-2}U,$$

wobei aus dem Werthe von Δ zu ersehen ist, dass U keinen von den $u_0, u_1, \ldots$ unabhängigen Factor enthält. *Es ist also p^{p-2} der wesentliche Theiler der Gattungsdiscriminante für $f(x)=0$.*

Für $p-1=e\cdot f$ setzen wir nunmehr

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \xi_0+\xi_e+\xi_{2e}+\cdots+\xi_{(f-1)e},\\
\eta_1 &= \xi_1+\xi_{e+1}+\xi_{2e+1}+\cdots+\xi_{(f-1)e+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_{e-1} &= \xi_{e-1}+\xi_{2e-1}+\xi_{3e-1}+\cdots+\xi_{f.e-1};
\end{aligned}$$

dann erkennen wir zunächst, dass $\eta_\alpha-\eta_\beta$, so wie jede Differenz $\xi_\mu-\xi_\nu$ durch $1-\omega$ theilbar, und daher

$$Nm(\eta_\alpha-\eta_\beta)$$

ein Vielfaches von p ist. Nehmen wir nun zu Wurzeln der Fundamentalgleichung für (η) die Grössen

$$(18)\qquad \zeta_\alpha=v_0\eta_\alpha+v_1\eta_{\alpha+1}+\cdots+v_{e-1}\eta_{\alpha-1},\qquad (\alpha=0,1,\ldots,e-1),$$

dann folgt wiederum, dass

$$Nm(\zeta_\alpha-\zeta_\beta)=Nm(v_0[\eta_\alpha-\eta_\beta]+\cdots)=Nm(1-\omega)\cdot V_{\alpha\beta}$$

durch p theilbar sei, und daraus weiter, dass

$$\Delta_\zeta=Nm(\zeta_0-\zeta_1)\,Nm(\zeta_0-\zeta_2)\ldots Nm(\zeta_0-\zeta_{e-1})$$
$$=p^{e-1}\cdot V$$

die Discriminante der Fundamentalgleichung für die Gattung (η) sein wird. Es lässt sich beweisen, dass V keinen weiteren von den $v_0, v_1, \ldots, v_{e-1}$ unabhängigen Theiler besitzt, so dass sich p^{e-1} als wesentlicher Theiler der Gattungsdiscriminante der durch die e f-gliedrigen Perioden bestimmten Gattung herausstellen wird. Es reicht dazu aus, den Nachweis zu liefern, dass die Discriminante der η gleich p^{e-1} ist, da diese aus Δ_ζ durch $v_0 = 1, v_1 = v_2 = \cdots = 0$ entsteht.

Zu diesem Zwecke muss ich auf meine früheren Untersuchungen (vgl. Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 90, S. 164 ff., sowie Acta mathem., Bd. 1, S. 371 ff.) zurückgreifen und dabei den schon oben erwähnten von Herrn Kronecker in seiner Festschrift zuerst benutzten Uebergang von den bestimmten Grössen ω zu den unbestimmten Parametern u verwenden.

Die $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ sind Functionen von $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots,$ und zwar gehören die ersteren zur Gattung (η), die letzteren zur Gattung (ω). Wird demnach

$$s = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{p-2})$$

gesetzt, wo dann s in bekannter Weise die cyklische Substitution der Grössen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-2}$ bedeutet, dann ist die zu (ω) gehörige Substitutionengruppe

$$1,\ s,\ s^2,\ \ldots,\ s^{p-1}; \tag{19}$$

und die zu (η) gehörige Untergruppe von (19) wird

$$1,\ s^e,\ s^{2e},\ \ldots,\ s^{(f-1)e}. \tag{20}$$

Die Substitutionen von (19) können daher in eine Tabelle so eingeordnet werden, dass die in der ersten, zweiten, dritten, ... Zeile enthaltenen Substitutionen η_0 bezw. in $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ überführen. Diese Anordnung ist

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1, & s^e, & s^{2e}, & \ldots, & s^{(f-1)e}, \\ s, & s^{e+1}, & s^{2e+1}, & \ldots, & s^{(f-1)e+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s^{e-1}, & s^{2e-1}, & s^{3e-1}, & \ldots, & s^{fe-1}. \end{array}\right. \tag{21}$$

Nun habe ich gezeigt (Acta mathem., Bd. 1, S. 380), dass die Discriminante der Gattung (η) überhaupt nur solche Factoren erster oder höherer Stufe haben kann, welche die Form besitzen

$$(\xi_\alpha - \xi_\beta,\ \xi_\gamma - \xi_\delta,\ \xi_\epsilon - \xi_\vartheta,\ \ldots);$$

ferner, dass aus jeder Substitution in der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile von (21) sich ein solches Divisorensystem für $\eta_0 - \eta_k$ bilden lässt, indem man jeden Cyklus der betreffenden Substitution $(\xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \ldots)$ durch $(\xi_\alpha - \xi_\beta, \xi_\alpha - \xi_\gamma, \ldots)$ ersetzt; endlich, dass jedes für die Gattung existirende derartige Divisorensystem auf die Existenz einer solchen

Substitution in der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile schliessen lässt. (J. f. r. u. a. M., Bd. 90, S. 167 A.) Somit können für $\eta_0 - \eta_k$, den f Substitutionen der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zeile entsprechend, höchstens f Divisorensysteme bestehen; denn möglicherweise ist ein solches mehreren der Substitutionen zugeordnet. Ebenso giebt es dann für $Nm(\eta_0 - \eta_k)$ höchstens $e \cdot f = p - 1$ solcher Divisorensysteme.

Jede in einem derselben auftretende Differenz

$$\xi_\alpha - \xi_\beta = u_0(\omega^{g^\alpha} - \omega^{g^\beta}) + u_1(\omega^{g^{\alpha+1}} - \omega^{g^{\beta+1}}) + \cdots$$

ist durch $(1-\omega)$ und wegen der Unbestimmtheit der u auch durch keine höhere Potenz von $(1-\omega)$ theilbar, so dass wegen der Beziehungen der ω^α zu einander aus den Divisoren höherer Stufe ein Factor im gewöhnlichen Sinne sich ausscheidet. Das Vorkommen von $(p-1)$ Divisorensystemen der obigen Form bedingt also den Factor $(1-\omega)^{p-1}$, und es kann daher $Nm(\eta_0 - \eta_k)$ höchstens durch $(1-\omega)^{p-1}$ theilbar sein. Da nun $(1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{p-1}) = p = (1-\omega)^{p-1}\Omega$ ist, so erhält man auch wirklich den Factor $(1-\omega)^{p-1}$ für die Norm von $(\eta_0 - \eta_k)$. Dieses Resultat zeigt, *dass* Δ_ζ *durch* p^{e-1} *und durch keine höhere Potenz von p theilbar ist. Folglich wird* p^{e-1} *der wesentliche Theiler für die Discriminante der Gattung* (η).

Hiermit ist das Resultat abgeleitet, auf welches Herr Hensel in seiner Dissertation (Berlin 1884) S. 14 Bezug nimmt.

§ 5.

Die abgeleiteten Sätze der vorigen Paragraphen können ohne Mühe verallgemeinert werden. Wir setzen $f(x) = 0$ als einfache Abel'sche Gleichung mit den Wurzeln $x_1, \Theta(x_1), \Theta^2(x_1), \ldots, \Theta^{m-1}(x_1)$ voraus, wo dann $\Theta^m(x_1) = x_1$ wird, und schreiben mit unbestimmten Coefficienten $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= u_0 x_1 + u_1\Theta(x_1) + u_2\Theta^2(x_1) + \cdots + u_{m-1}\Theta^{m-1}(x_1),\\
\xi_1 &= u_0\Theta(x_1) + u_1\Theta^2(x_1) + u_2\Theta^3(x_1) + \cdots + u_{m-1}\cdot x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ist nun $\Theta(x)$ wieder, wie früher, eine ganze, ganzzahlige Function, dann folgt, dass aus

$$\xi_\alpha - \xi_\beta = u_0[\Theta^\alpha(x_1) - \Theta^\beta(x_1)] + \cdots$$

der Factor $x_1 - \Theta(x_1)$ sich heraussetzen lässt und, unabhängig von den u, auch nur dieser; dass folglich $Nm(\xi_\alpha - \xi_\beta)$ durch $Nm(x_1 - \Theta(x_1))$ theilbar ist, d. h. durch den in (15) angegebenen Ausdruck. Da ferner $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = \cdots = 0$ die ξ in $x_1, \Theta(x_1), \cdots$ umwandelt und diese wiederum (15) als Discriminante ergeben, so folgt, *dass* (15) *der wesentliche Theiler der Discriminante für die Gleichungen mit den Wurzeln* $\xi_0, \xi_1, \ldots$ *ist.*

Die zu der betrachteten Gattung gehörige Gruppe lautet:

$$1, s, s^2, s^3, \ldots, s^{m-1},$$

wenn durch s die cyklische Substitution $(x_1 \Theta(x_1) \Theta^2(x_1) \ldots)$ dargestellt wird. Ist m_1 ein Theiler von m, und μ_1 so bestimmt, dass $m_1 \cdot \mu_1 = m$ ist, dann können wir durch die Gruppe

$$1, s^{m_1}, s^{2m_1}, \ldots, s^{(\mu_1-1)m_1}$$

eine Untergattung jener ersteren charakterisiren. Nun sei wieder

$$\eta_\alpha = \xi_\alpha + \xi_{m_1+\alpha} + \xi_{2m_1+\alpha} + \cdots, \quad (\alpha = 0, 1, \cdots, m_1 - 1),$$
$$\xi_\alpha = v_0 \eta_\alpha + v_1 \eta_{\alpha+1} + v_2 \eta_{\alpha+2} + \cdots, \quad (\alpha = 0, 1, \cdots, m_1 - 1);$$

dann können wir nach den obigen Principien Δ_ξ behandeln und die Aufsuchung des wesentlichen Theilers auf die Berechnung von Δ_η zurückführen. Eine Tabelle, welche dem Schema (21) entsprechend gebildet ist, und in der nur e, f durch m_1, μ_1 ersetzt sind, zeigt dann das Vorkommen von $(x_1 - \Theta(x_1))^{\mu_1}$ als maximales in $\eta_0 - \eta_k$ und also dasjenige von $(x_1 - \Theta(x_1))^{m.(m_1-1)}$ in Δ_η. Während aber bei den Kreistheilungsgleichungen wegen der Relation $Nm(\omega - \omega^a) = p$ sofort auf den wesentlichen Factor geschlossen werden konnte, ist dies hier unmöglich, sobald die Normen von $(x_1 - \Theta(x_1))$, $(x_1 - \Theta^2(x_1))$, ... von einander verschieden sind. Sind dieselben jedoch einander gleich und damit sämmtliche Quotienten $\frac{x_1 - \Theta^\alpha(x_1)}{x_1 - \Theta(x_1)}$ $(\alpha = 2, 3, \ldots, m - 1)$ Einheiten, dann ergiebt sich wiederum $[Nm(x_1 - \Theta(x_1))]^{m_1-1}$ als wesentlicher Theiler.

Berlin, den 29. Juni 1884.

Notiz über ganzzahlige lineare Substitutionen.

Von

G. Pick in Prag.

Die nachfolgende Mittheilung bezweckt den Beweis des Satzes, dass die Gruppe der ganzzahligen linearen Substitutionen

$$(\Omega) \qquad \omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$$

mit der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

in keiner von ihr wesentlich verschiedenen Gruppe linearer Substitutionen als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist. Dieser Satz ist geeignet, bei Fragen, welche durch Hinzuziehung von fremden Operationen zur Gruppe (Ω) ihre Erledigung finden können, wenigstens einen negativen Fingerzeig an die Hand zu geben.

Der Beweis wird in der Weise geführt, dass man eine Substitution

$$(\Sigma) \qquad \omega' = \frac{C + D\omega}{A + B\omega} \qquad (AD - BC = 1)$$

zu bestimmen sucht, welche mit der Gruppe (Ω) vertauschbar ist. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass, unter S, T die beiden Erzeugenden

$$\omega' = 1 + \omega \quad \text{resp.} \quad \omega' = \frac{-1}{\omega}$$

der Gruppe (Ω) verstanden,

$$\Sigma^{-1} S \Sigma \qquad \text{und} \qquad \Sigma^{-1} T \Sigma$$

in (Ω) enthalten seien. Es ist aber

$$\Sigma^{-1} S \Sigma = \left[\omega, \frac{D^2 + (1 - BD)\omega}{(1 + BD) - B^2\omega}\right],$$

$$\Sigma^{-1} T \Sigma = \left[\omega, \frac{(C^2 + D^2) - (AC + BD)\omega}{(AC + BD) - (A^2 + B^2)\omega}\right]$$

in bekannter Bezeichnungsweise; woraus man schliesst, dass in dem angenommenen Falle die sechs Grössen

$$A^2,\ B^2,\ C^2,\ D^2,\ AC,\ BD$$

ganze Zahlen sein müssen. Dann ist aber auch

$$A^2 D^2 - B^2 C^2 = AD + BC$$

eine ganze Zahl, und somit erwiesen, dass die Coefficienten A, B, C, D in rationalen Verhältnissen stehn, weil die sämmtlichen aus ihnen zusammengesetzten Grössen

$$AC,\ BD,\ AD,\ BC$$

rationale Zahlen sind.

Man setze demnach

$$\begin{aligned} \varrho A &= a, \\ \varrho B &= b, \\ \varrho C &= c, \\ \varrho D &= d, \end{aligned}$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Es wird dann

$$\varrho^2 = ad - bc,$$

$$\varrho^2 A^2 = a^2, \quad \varrho^2 C^2 = c^2,$$

$$\varrho^2 B^2 = b^2, \quad \varrho^2 D^2 = d^2.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass ϱ^2 eine ganze Zahl ist, aus den anderen aber, weil nach früherem A^2, B^2, C^2, D^2 selbst ganze Zahlen sind, dass ϱ^2 als gemeinsamer Theiler von a^2, b^2, c^2, d^2 nur gleich

$$\pm 1$$

sein kann.

Die so bestimmten Substitutionen

$$(\Sigma) \qquad \omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \qquad (ad - bc = \pm 1)$$

erfüllen nun, wie leicht zu sehen ist, in der That die geforderte Bedingung, mit der Gruppe (Ω) vertauschbar zu sein. — Damit ist der Eingangs aufgestellte Satz erwiesen, und zugleich präcisirt, was unter der nur „unwesentlich“ von (Ω) verschiedenen Gruppe verstanden sein sollte.

Leipzig, im Juni 1884.

Ueber gewisse durch Functionalgleichungen definirte Functionen.

Von

Georg Pick in Prag.

Bei der Wichtigkeit, welche die Kenntniss algebraischer Eigenschaften von transcendenten Functionen in Hinsicht auf die leichtere Handhabung und Berechnung solcher Functionen besitzt, dürfte die nachfolgende Bemerkung einiges Interesse für sich haben. Es wird darin gezeigt, dass sich gewisse durch algebraische Eigenschaften zu definirende Functionen mit den gewöhnlichen periodischen Functionen im Wesen decken.

Es sei eine eindeutige analytische Function $f(u)$ gefordert von der Beschaffenheit, dass einer trilinearen Beziehung:

$$(1) \quad Auvw + Bvw + Cwu + Duv + Eu + Fv + Gw + H = 0$$

zwischen drei Werthen u, v, w allemal die algebraische Gleichung

$$(2) \quad R(f(u), f(v), f(w)) = 0$$

zwischen den entsprechenden Functionswerthen correspondirt.

Man nehme nun drei Werthe u_0, v_0, w_0 sämmtlich im Inneren des Bereichs, innerhalb welches die Function $f(u)$ definirt ist, der Gleichung (1) gemäss an. Setzt man dann die Function aus der Umgebung von u_0 und v_0 analytisch fort, so ergiebt (2) die Fortsetzung aus der Umgebung von w_0. Auf solche Art erkennt man, dass, so lange u und v innerhalb des Existenzbereichs T der Function f angenommen werden, nothwendiger Weise auch w innerhalb desselben befindlich sein muss. Nähert sich hingegen eine der drei Grössen der natürlichen Grenze von f, so muss dies gleichzeitig noch mit einer zweiten von ihnen der Fall sein.

Man nehme nun etwa v innerhalb T willkürlich an, hingegen u auf der Grenze von T, so folgt aus dem eben Gesagten, dass dann w auf die Grenze von T, also auf ein Gebiet beschränkt ist, welches nirgends nach zwei Dimensionen von endlicher Ausdehnung ist. Es stellt aber (1) nach Festlegung von u eine lineare Beziehung zwischen v und w dar, vermöge welcher dem Flächengebiet T, als Ort von v,

ein ebenfalls zweifach ausgedehntes w-Gebiet entsprechen würde. Es ist deshalb erforderlich, dass die Gleichung (1), wenn u in einen wesentlich singulären Punkt a von $f(u)$ rückt, keine Relation zwischen v und w darstellt, dass somit

$$\begin{vmatrix} Aa + B & Ca + G \\ Da + F & Ea + H \end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese in a quadratische Gleichung, welche offenbar nicht identisch erfüllt sein kann, zeigt, *dass die Function $f(u)$ höchstens zwei wesentlich singuläre Stellen besitzen kann.*

Die Gleichung (1) aber besitzt die Eigenschaft, *identisch befriedigt zu werden, wenn man für irgend eine der Grössen u, v, w einen beliebigen, für eine zweite einen hiedurch bestimmten wesentlich singulären Werth des Arguments von $f(u)$ setzt.*

Wir untersuchen nun erstens Functionen $f(u)$ mit nur einer wesentlich singulären Stelle. Dieselbe kann unbeschadet der Allgemeinheit im Unendlichen angenommen werden, wohin sie doch jedesmal durch eine passende *lineare* Transformation der unabhängigen Veränderlichen zu verlegen ist. Die Relation (1) muss dann erfüllt sein, sobald man für irgend zwei der Unbestimmten u, v, w den Werth ∞ substituirt. Dies ergiebt

$$A = B = C = D = 0,$$

so dass man für (1) setzen kann:

$$w = \alpha u + \beta v + \gamma.$$

Aus der Beziehung

$$R(f(u), f(v), f(\alpha u + \beta v + \gamma)) = 0$$

aber folgert man in genau derselben Weise, dass die in Frage kommende Function $f(u)$ periodisch im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist, wie dies von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen über die elliptischen Functionen für Functionen mit einem Additionstheoreme ausgeführt wird.*)

Auf diesen hiermit erledigten ersten Fall lässt sich der zweite, in welchem $f(u)$ *zwei* wesentlich singuläre Stellen besitzt, leicht zurückführen. Verlegt man dieselben vermöge einer geeigneten linearen Substitution nach $u = 0$ und $u = \infty$, so erhält man je nach der Zusammengehörigkeit der Werthe von u, v, w, durch welche zu je zweien die Gleichung (1) identisch befriedigt wird, folgende beide Typen für jene Gleichung:

---

*) Vgl. Rausenberger, Math. Ann. Bd. XVIII, S. 381 ff., wo der Weierstrass'sche Satz in erweiterter Form bewiesen wird. Der Beweis ist für Functionen mit nur endlicher Vielwerthigkeit bedingungslos zuzugeben. Für Functionen mit eindeutigen Transformationen in sich scheinen jedoch die Ausführungen des Textes zu ergeben, dass der in Rede stehende Satz keine über die elliptischen Functionen hinausführende Anwendung gestattet.

(a) $$w = k \cdot uv,$$

(b) $$w = \frac{k}{uv}.$$

Durch die Substitutionen

$$u = e^{u_1}, \quad v = e^{v_1}, \quad w = e^{w_1}, \quad k = e^{k_1}$$

verwandelt sich $f(u)$ in eine eindeutige Function von u_1, und die Relationen (a), (b) in

(a_1) $$w_1 = \quad u_1 + v_1 + k_1,$$

(b_1) $$w_1 = -u_1 - v_1 + k_1,$$

wodurch die Betrachtung auf den früheren Fall hinübergeleitet ist. —

Es kann nicht zweifelhaft sein, dass ähnliche Ueberlegungen, wie die hier angestellten, auf jeden Fall einer algebraischen Functionalgleichung

$$R(f(u),\, f(v),\, f(w)) = 0,$$
$$[r(u,\, v,\, w) = 0]$$

angewendet werden können, und Aufschlüsse über die Natur der betreffenden Functionen im Allgemeinen liefern würden. Es ist mir jedoch nicht gelungen, irgend einen allgemeinen Satz über derartige Functionen zu finden, trotzdem man wohl mit grosser Wahrscheinlichkeit auf einen solchen rechnen kann.*)

Leipzig, im Juni 1884.

---

*) Vgl. übrigens Rausenberger a. a. O.

Berichtigung.

S. 298 und S. 299 ist in der *zweiten* Zeile jeder der 10 doppelzeiligen Formeln (32) der Nenner $z_1 - z_2$ durch den Nenner $z_2 - z_1$ zu ersetzen.

[illegible]

[illegible]

[illegible]